

Table des matières

1	Généralités	9
1.1	Produit scalaire, espace préhilbertien	9
1.2	Norme, espace vectoriel normé	11
1.3	Distance, espace métrique	13
1.4	Éléments de topologie (de \mathbb{R}^n, \dots)	15
1.5	Exercices corrigés	20
2	Fonctions de plusieurs variables	29
2.1	Limite et continuité	29
2.2	Fonctions partielles, dérivées partielles et directionnelles	30
2.3	Fonctions différentiables et leurs propriétés	31
2.4	Matrice jacobienne	35
2.5	Théorème des accroissements finis	37
2.6	Dérivées partielles d'ordre supérieur	38
2.7	Formule de Taylor	40
2.8	Théorème d'inversion locale	42
2.9	Théorème des fonctions implicites	44
2.10	Fonctions homogènes	45
2.11	Extremum	45
2.12	Théorème du rang constant, sous-variétés de \mathbb{R}^n	49
2.13	Exercices corrigés	51
3	Intégrales généralisées	93
3.1	Définitions et propriétés générales	93
3.2	Intégrales de fonctions positives	95
3.3	Intégrales de fonctions quelconques	97
3.4	Autres types d'intégrales généralisées	99
3.5	Exercices corrigés	100

4	Séries numériques	111
4.1	Définitions et propriétés générales	111
4.2	Séries à termes positifs	114
4.3	Séries à termes de signes quelconques	118
4.4	Opérations sur les séries	121
4.4.1	Séries multiples	125
4.4.2	Multiplication des séries	126
4.5	Produits infinis	127
4.6	Exercices corrigés	129
5	Suites et séries de fonctions	161
5.1	Convergence simple, convergence absolue	161
5.2	Convergence uniforme	162
5.2.1	Définitions et propriétés générales	162
5.2.2	Continuité, intégration et dérivation	165
5.2.3	Convergence normale et critère de Weierstrass	167
5.2.4	Critère d'Abel-Dirichlet de convergence uniforme	168
5.3	Exercices corrigés	169
6	Séries entières	195
6.1	Généralités	195
6.2	Comportement sur le bord	199
6.3	Convergence normale et uniforme	201
6.4	Continuité, dérivation et intégration	201
6.5	Développement d'une fonction en série entière	202
6.6	Calcul de la somme d'une série entière	204
6.7	Résolution des équations différentielles	205
6.8	Exercices corrigés	207
7	Séries de Fourier	239
7.1	Séries trigonométriques, séries de Fourier	239
7.2	Théorème de Dirichlet	243
7.3	Cesàro, Fejér, Jordan et Weierstrass	248
7.4	Convergence en moyenne quadratique	249
7.5	Exercices corrigés	250
8	Intégrales généralisées (suite)	277
8.1	Intégrales définies	277
8.2	Intégrales généralisées	278
8.3	Exercices corrigés	286

9 Problèmes de synthèse corrigés	309
9.1 Problème 1 : fonction zêta de Riemann	309
9.2 Problème 2 : polynômes de Bernoulli	313
9.3 Problème 3 : série de fonctions à deux variables	317
9.4 Problème 4 : valeur principale de Cauchy	320
9.5 Problème 5 : projection orthogonale	323
9.6 Problème 6 : phénomène de Gibbs	328
9.7 Problème 7 : stabilité asymptotique	334
9.8 Problème 8 : équation différentielle de Legendre	338
9.9 Problème 9 : équation différentielle de Bessel	343
Bibliographie	354
Index	357