DOI: 10.2478/awutm-2013-0006

VERSITA

Analele Universităţii de Vest,
Timişoara
Seria Matematică – Informatică
LI, 1, (2013), 75– 90

Etude du Théorème de Plongement de Kodaira

A. Lesfari

Abstract. The archetype of embedding theorems is the Kodaira Embedding theorem for compact complex manifolds. The aim of the present paper is to give a direct proof of this theorem and discuss the relation with Hodge theory and Kähler manifolds.

AMS Subject Classification (2000). 32Q55, 51N15, 32Q15, 58A14.
Keywords. Complex manifolds, Hodge theory, Kähler manifolds.

1 Introduction

Soient $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur une variété complexe compacte M et $s_0, ..., s_N$ des sections de $\mathcal{L}$ que l'on suppose non toutes nulles. Rappelons que puisque M est compacte, alors la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))$ des sections de $\mathcal{L}$ sur M est finie. Désignons par $\mathcal{B}$ le lieu de base

$$\mathcal{B} \equiv \{s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L})) : s(p) = 0, p \in M\}.$$

Ce dernier est une sous-variété analytique; il peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{B} = D(s_0) \cap ... \cap D(s_N),$$

où $D(s_j)$ est un élément de $\mathrm{Div}(M)$.

Proposition 1. *Soit $\psi_{\mathcal{L}}$ l'application définie par*

$$\psi_{\mathcal{L}} : M\backslash\mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \quad p \longmapsto [s_0(p) : ... : s_N(p)],$$

où $(s_0, ..., s_N)$ est une base de $H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))$. Alors l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ est holomorphe.

Démonstration: En effet, notons d'abord que cette notion d'holomorphie a un sens car $M\backslash\mathcal{B}$ est une sous-variété ouverte de M puisque $\mathcal{B} \subset M$ est un sous-ensemble fermé. Pour montrer que l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ est holomorphe et à valeurs dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, il suffit de choisir localement une trivialisation holomorphe du fibré en droites $\mathcal{L}$. Un tel choix nous permet de voir localement les sections $s_0, ..., s_N$ comme des fonctions holomorphes. Ensuite, un changement de trivialisation multiplie ces fonctions par une même fonction inversible, ce qui donne lieu à la même application à valeurs dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Explicitement, soit $p \in M\backslash\mathcal{B}$ et notons par φ une trivialisation de $\mathcal{L}$ sur un voisinage ouvert de $p \in M$. Dès lors, $\psi_{\mathcal{L}}(p) = [s_0(p) : ... : s_N(p)]$ désigne le point $[\varphi(s_0(p)) : ... : \varphi(s_N(p))] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. La définition de l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ est indépendante de la trivialisation φ car pour toute autre trivialisation, elle est de la forme $\lambda\varphi$, $\lambda \in \mathcal{O}^*_{\mathcal{U}}$ et

$$[\lambda(p)\varphi(s_0(p)) : ... : \lambda(p)\varphi(s_N(p))] = [\varphi(s_0(p)) : ... : \varphi(s_N(p))].$$

La description locale de l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ montre qu'elle est bien définie et qu'elle est holomorphe sur $M\backslash\mathcal{B}$. $\square$

En fait au lieu de supposer $(s_0, ..., s_N)$ comme une base, on peut considérer toute autre collection des sections $s_0, ..., s_N$. On définit une application holomorphe

$$\psi_{\mathcal{L}} : M\backslash\mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}))^*), \quad p \longmapsto [s_0(p) : ... : s_N(p)],$$

en associant à un point $p \in M\backslash\mathcal{B}$, l'application linéaire

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longmapsto s(p),$$

ou ce qui revient au même, en envoyant un point p d'un ouvert $\mathcal{U}_\alpha$ de $M\backslash\mathcal{B}$ sur le point de coordonnées homogènes $[s_0(p) : ... : s_N(p)]$ de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}))^*)$ défini par l'hyperplan constitué des sections s'annulant en p. Notons que le point p ne dépend pas de l'ouvert $\mathcal{U}_\alpha$ car nous avons vu précédemment que dans un autre ouvert $\mathcal{U}_\alpha$, toutes ces coordonnées sont multipliées par le même scalaire non nul $g_{\alpha\beta}(p)$ et il est bien défini puisque nous avons exclus les sections nulles. Lors de l'étude du théorème de plongement de Kodaira, on travaillera avec une application méromorphe de la forme

$$\psi_{\mathcal{L}} : M \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}))^*),$$

plus précisément $\psi_{\mathcal{L}^k}$ avec $\mathcal{L}^k$ une puissance tensorielle, k entier strictement positif.
Soit $\mathcal{D} = \sum_j n_j \mathcal{D}_j$, $n_j \in \mathbb{Z}$, un diviseur sur la variété complexe M, où les $\mathcal{D}_j$ sont des sous-variétés analytiques irréductibles de codimension 1. Soit $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $M \backslash \mathcal{D}$, ayant au plus un pôle d'ordre n_j sur $\mathcal{D}_j$ lorsque $n_j > 0$ et un zéro d'ordre au moins égal à $-n_j$ lorsque $n_j \leq 0$ et soit $(1, f_1, ..., f_N)$ une base de cet espace. Si $\mathcal{L}$ est le fibré en droites associé au diviseur $\mathcal{D}$ (que l'on note $\mathcal{L} = [\mathcal{D}]$), alors la restriction de $\psi_{\mathcal{D}} \equiv \psi_{\mathcal{L}}$ à $M \backslash \mathcal{D}$ peut-être construite comme ci-dessus en écrivant

$$\psi_{\mathcal{L}} : M \backslash \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \quad p \longmapsto [1, f_1(p) : ... : f_N(p)]. \tag{1}$$

On dit que la variété M est projective ou de façon équivalente M admet un plongement holomorphe dans un espace projectif si elle admet un fibré en droites sans point de base qui détermine un plongement holomorphe de M dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Une variété projective est une sous-variété analytique fermée d'un espace projectif complexe. En outre, elle est compacte et tout point régulier admet un voisinage qui peut être paramétré à l'aide de fonctions analytiques. Un fibré en droites $\mathcal{L}$ est dit très ample si ses sections globales fournissent un plongement de la variété M dans un espace projectif ou autrement dit si l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ plonge la variété M dans un espace projectif. Un fibré en droites $\mathcal{L}$ est dit ample si une puissance $\mathcal{L}^k \equiv \mathcal{L}^{\otimes k}$, $k > 0$ est très ample. Un diviseur $\mathcal{D}$ est dit ample (resp. très ample) si le fibré en droites $[\mathcal{D}]$ associé à ce diviseur est ample (resp. très ample). Rappelons que sur $\mathbb{C}^n$, il n'y a pas de sous-variétés compactes intéressantes car la seule sous-variété complexe et compacte de $\mathbb{C}^n$ est un point. En effet, si $\psi : M \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est un plongement holomorphe où M est une variété complexe compacte, alors ψ est constante en vertu du théorème de Liouville. Nous allons donc examiner les différents plongements de la variété M dans un espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Le théorème de plongement de Kodaira suivant caractérise les variétés complexes compactes admettant un plongement holomorphe dans un espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

Théorème 2. *Soit M une variété complexe compacte et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites positif sur M. Alors, il existe k_0 tel que pour $k \geq k_0$, l'application*

$$\psi_{\mathcal{L}^k} : M \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}),$$

est bien définie et c'est un plongement de M dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Autrement dit, pour un diviseur $\mathcal{D}$ si $\mathcal{L} \equiv [\mathcal{D}]$ est positif, alors pour $k \in \mathbb{N}$, *l'application (1) définie par les fonctions de l'espace $\mathcal{L}(k\mathcal{D})$ plonge M dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ où $N = \dim \mathcal{L}(k\mathcal{D}) - 1$.*

Démonstration: La preuve procède en plusieurs étapes.
Etape 1 : Nous allons d'abord montrer que l'expression $\psi_{\mathcal{L}}$ est un plongement peut s'exprimer en terme de cohomologie et ainsi voir la possibilité d'utiliser le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano [1][9]. Pour que l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ soit bien définie sur M (un morphisme), il faut et il suffit que pour tout $p \in M$, il existe au moins une section $s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))$ jamais nulle; autrement dit il faut et il suffit que le lieu de base $\mathcal{B}$ soit non vide. Soit $\mathcal{L}_p$ la fibre au point $p \in M$, $p \neq 0$. L'évaluation des sections de $\mathcal{L}$ en ce point détermine une application linéaire

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L})) \xrightarrow{r_p} \mathcal{L}_p.$$

Lorsque p est un point de base de $\mathcal{L}$, alors toutes les sections de $\mathcal{L}$ s'annulent en p et donc l'application r_p est identiquement nulle. En fixant un isomorphisme de $\mathcal{L}_p$ avec $\mathbb{C}$, l'application r_p s'interprète comme une forme linéaire et ne dépend du choix de l'isomorphisme $\mathcal{L}_p \simeq \mathbb{C}$ que par un facteur multiplicatif. En tout point p de M qui n'est pas un point de base de $\mathcal{L}$, on obtient un élément de l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))^*)$. Pour les fibrés en droites qui admettent au moins une section non nulle, ce procédé détermine une application méromorphe

$$\psi_{\mathcal{L}} : M \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))^*),$$

dont les points d'indétermination sont contenus dans le lieu de base $\mathcal{B}$. Donc de façon équivalente, pour montrer que $\psi_{\mathcal{L}}$ est un plongement il faut et il suffit que l'application restreinte

$$\mathbb{C}^{N+1} = H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L})) \xrightarrow{r_p} \mathcal{L}_p = \mathbb{C},$$

soit surjective. Si tel est le cas, alors l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ est un plongement si deux conditions sont satisfaites. La première condition : l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ est injective. Autrement dit, $\psi_{\mathcal{L}}$ sépare les points, i.e., pour $p, q \in M$ avec $p \neq q$, on peut trouver une section $s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))$ satisfaisant à $s(p) = 0$ et $s(q) \neq 0$. De façon équivalente, $\psi_{\mathcal{L}}$ est injective si et seulement si pour $p, q \in M$ avec $p \neq q$, l'application restreinte

$$\mathbb{C}^{N+1} = H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L})) \xrightarrow{r_{p,q}} \mathcal{L}_p \oplus \mathcal{L}_p = \mathbb{C}^2, \tag{2}$$

[1]Si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites positif, alors $H^q(M, \Omega^p(\mathcal{L})) = 0$ pour $p + q > n$.

est surjective ou ce qui revient au même si et seulement si

$$\ker r_{p,q} = \ker r_p \cap \ker r_q,$$

est de codimension deux. Dans ce cas le système linéaire complet $|\mathcal{L}|$ détermine un morphisme injective et il est sans point de base. La seconde condition : la différentielle

$$D\psi_{\mathcal{L}}(p) : T_pM \longrightarrow T_{\psi_{\mathcal{L}}(p)}\mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \quad p \in \mathcal{U}_\alpha$$

est injective si et seulement si $s_0(p) \neq 0$ et

$$D\psi_{\mathcal{L}}(p) = \{ds_1(p), ..., ds_N(p)\} : T_pM \longrightarrow \mathbb{C}^N, \quad p \in \mathcal{U}_\alpha$$

est un plongement. On peut toujours supposer que l'image de $\psi_{\mathcal{L}}(p)$ est $\psi_{\mathcal{L}}(p) = (1, 0, ..., 0)$; il suffit de faire un changement de coordonnées s_j en ajoutant λs_0, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ $s_j(p)$. Donc, la seconde condition est équivalente au fait que $\bigcap_{j\geq 1} ds_j(p) \neq 0$ ou si on veut que $\psi_{\mathcal{L}}$ admet une différentielle jamais nulle. De façon équivalente (il suffit d'utiliser une transformation linéaire) pour tout $v* \in T_p^*(M)$, on peut trouver une section $s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))$ satisfaisant à $s_\alpha(p) = 0$ et $ds_\alpha(p) = v^*$ où $s_\alpha = \varphi_\alpha^* s$ et φ_α désigne une trivialisation de $\mathcal{L}$ autour de p. On peut formuler cette seconde condition d'une autre manière indépendante du choix du voisinage $\mathcal{U}_p$ de p. On désigne par $\mathcal{J}_p$ le faisceau des fonctions holomorphes s'annulant en p et par $\mathcal{J}_p(\mathcal{L})$ le faisceau des sections de $\mathcal{L}$ s'annulant en p. Soient s une section de $\mathcal{J}_p(\mathcal{L})$ définie près de p et φ_α, φ_β des trivialisations de $\mathcal{L}$ dans les voisinages $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{U}_\beta$ de p. En écrivant $s_\alpha = \varphi_\alpha^* s$, $s_\beta = \varphi_\beta^* s$ et $s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta$ où $g_{\alpha\beta}$ est la fonction de transition de $\mathcal{L}$, alors les différentielles ds_α et ds_β correspondants au changement de $\mathcal{U}_\alpha$ à $\mathcal{U}_\beta$ sont liées par la relation

$$d(s_\alpha) = d(s_\beta) g_{\alpha\beta},$$

en p. Dès lors, nous avons défini une application

$$d_p : \mathcal{J}_p(\mathcal{L}) \longrightarrow T_p'^* \otimes \mathcal{L}_p,$$

qui est bien défini et par conséquent la seconde condition ci-dessus peut se formuler en disant que pour tout $p \in M$, l'application

$$H^0(M, \mathcal{J}_p(\mathcal{L})) \xrightarrow{d_{p,q}} T_p'^* \otimes \mathcal{L}_p, \tag{3}$$

est surjective. Celle-ci est un cas limite de (2) lorsque $q \longrightarrow p$.

Etape 2 : Nous allons passer maintenant à la preuve proprement dite du théorème. On a deux suites exactes de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{p,q}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{O}_M(\mathcal{L}) \xrightarrow{r_{p,q}} \mathcal{L}_p \oplus \mathcal{L}_q \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_p^2(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{J}_p(\mathcal{L}) \xrightarrow{d_p} T_p'^* \otimes \mathcal{L}_p \longrightarrow 0.$$

Donc pour montrer que les applications (2) et (3) sont surjectives, il suffit de prouver que :

$$H^1(M, \mathcal{J}_{p,q}(\mathcal{L})) = 0, \tag{4}$$

et

$$H^1(M, \mathcal{J}_p^2(\mathcal{L})) = 0. \tag{5}$$

Notons que dans le théorème, le fait d'avoir $\mathcal{L}^k$ (k entier strictement positif) au lieu de $\mathcal{L}$, ne pose pas de problème car cette construction peut-être répétée en remplaçant $\mathcal{L}$ par sa puissance tensorielle $\mathcal{L}^k$ et on utilise le fait que $H^1(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}^k)) = 0$ pour $k \geq k_1$. Nous avons mentionné plus haut que nous allons voir la possibilité d'utiliser les théorèmes d'annulation. Or notre problème ici (sauf dans le cas où $\dim M = 1$) est dû au fait que nous avons affaire aux faisceaux $\mathcal{J}_{p,q}$, $\mathcal{J}_p^2$ et ce ne sont pas des fibrés en droites, ce sont en fait des faisceaux cohérents. On peut certes utiliser un diviseur et procéder par induction, mais le problème est qu'on ne sait pas si M contient de tels diviseurs. Pour contourner ces difficultés on va faire appel à la méthode des éclatements.

Etape 3 : Soient $\widetilde{M}_p$ l'éclaté de M au point p et $\pi : \widetilde{M}_p \longrightarrow M$ une projection holomorphe. Le préimage $E \equiv \pi^{-1}(p)$ (que l'on note aussi E_p s'il y a risque de confusion) est un diviseur dans M, biholomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. L'application $\pi : \widetilde{M}_p \backslash E \longrightarrow M \backslash \{p\}$ est un difféomorphisme. On construit la variété $\widetilde{M}_p$ de la façon suivante : soient $z_1, ..., z_n \in \Delta$, des coordonnées holomorphes en p où $n = \dim M$ et Δ un voisinage ouvert de p. Soit

$$\widetilde{\Delta}_p = \{(z, l) \in \Delta \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) : z_i l_j - z_j l_i = 0, \forall i, j\},$$

l'éclaté de Δ en p avec $z = (z_1, ..., z_n) \in \Delta$ et $l = [l_1 : ... : l_n]$ des coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. En considérant $l \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ comme une droite dans $\mathbb{C}^n$, alors la condition $z_i l_j = z_j l_i$ signifie que cette droite contient le point z. On vérifie aisément que la variété $\widetilde{\Delta}_p$ est lisse et qu'elle se projette holomorphiquement sur Δ par la projection vers le premier facteur; i.e.,

$$\pi : \widetilde{\Delta}_p \subset \Delta \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \Delta, \quad (z, l) \longmapsto z.$$

Evidemment π est un isomorphisme si $z \neq 0$ et $E = \pi^{-1}(0) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ est une hypersurface complexe lisse (en fait, $E = \mathbb{P}(T_p M)$). On appelle E le diviseur exceptionnel, dont le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_E$ est un faisceau inversible noté $\mathcal{O}(-E)$. Finalement, l'éclaté $\widetilde{M}_p$ de M en p s'obtient en recollant $\widetilde{\Delta}_p$ et $M\backslash\{p\}$ suivant l'ouvert $\widetilde{\Delta}_p\backslash E \simeq \Delta\backslash\{p\}$.

Etape 4 : Soit $\widetilde{M}$ l'éclaté de la variété M (de dimension n) aux points p, q et $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$, une projection holomorphe. Les préimages $E_p = \pi^{-1}(p)$ et $E_q = \pi^{-1}(q)$ sont des diviseurs exceptionnels. Posons $E = E_p + E_q$ et $\widetilde{\mathcal{L}} = \pi^*\mathcal{L}$. Pour $n = 1$, on prend $\widetilde{M} = M$, $\pi = Id$; en fait dans ce cas nous n'avons pas besoin de pratiquer l'éclatement et le résultat découle directement du théorème d'annulation de Kodaira-Nakano. On peut donc supposer que $n \geq 2$. L'application de pull-back des formes holomorphes de degré maximal

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}^k)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k)),$$

en vertu du théorème de Hartog [2][3]. Par définition $\widetilde{\mathcal{L}}^k$ étant trivial le long de E_p et E_q, on en déduit que

$$H^0(E, \mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k)) = \mathcal{L}_p^k \oplus \mathcal{L}_q^k.$$

Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}^k)) & \xrightarrow{r_{p,q}} & \mathcal{L}_p^k \oplus \mathcal{L}_q^k \\ \pi^*\downarrow & & \| \\ H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k)) & \xrightarrow{r_E} & H^0(E, \mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k)) \end{array}$$

est commutatif où r_E désigne la restriction à E. Pour prouver (3), il revient au même de montrer la surjectivité de r_ε. En considérant la suite exacte sur $\widetilde{M}$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]) \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k) \xrightarrow{r_E} \mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k_{|E}) \longrightarrow 0,$$

et la suite exacte longue associée, on voit qu'il suffit de montrer que

$$H^1(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E])) = 0,$$

pour k suffisamment grand.

Etape 5 : On choisit k_1 tel que : $\mathcal{L}^{k_1} \otimes K_M^*$ est positif sur M. Montrons que l'on peut choisir k_2 tel que : $\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]^n$ est positif pour $k \geq k_2$ (le choix de $k_1 + k_2$ va intervenir dans l'étape 8 ci-dessous). Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de

[2]Pour toute section globale $\widetilde{s}$ de $\widetilde{\mathcal{L}}^k$, la section s de $\mathcal{L}^k$ sur $M\backslash\{p, q\}$ s'étend à une section globale $s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))$.

$p \in M$ et soit $z : \mathcal{U} \longrightarrow \Delta$, une coordonnée locale autour de p. Soit $\Theta_{[E]}$ la courbure du fibré en droites $[E]$ et posons

$$\Omega_{[E]} = \frac{i}{2\pi}\Theta_{[E]}.$$

On peut trouver une métrique h sur $\widetilde{M}$ de façon à ce que : $\Omega_{[-E]} = -\Omega_{[E]}$ soit nulle sur $\widetilde{M}\backslash\widetilde{\mathcal{U}}_{2\delta}$, supérieure où égale à zéro sur $\widetilde{\mathcal{U}}_{\delta}$ et supérieur strictement à zéro sur $T_pE \subset T'_p\widetilde{M}$ pour tout $p \in E$. Ici $\mathcal{U}_\delta$ désigne la boule $\|z\| < \delta$ avec $\delta \in \mathbb{R}^*_+$. Pour déterminer une telle métrique, on procède comme suit : soit h_1 la métrique sur $[E]_{\widetilde{\mathcal{U}}}$ donnée par $|(l_1, ..., l_n)|^2 = \|l\|^2$. Soit $s \in H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(E))$ une section globale de $[E]$ sur $\widetilde{M}$ avec $(s) = E$. Soit h_2 sur $[E]_{\widetilde{M}\backslash E}$ définie par $|s(z)| = 1$. Pour $\delta > 0$, on considère la boule $\|z\| < \delta$ de centre 0 et de rayon $\delta \in \mathbb{R}^*_+$. On pose $\widetilde{\mathcal{U}}_\delta = \pi^{-1}(\mathcal{U}_\delta)$. Soit $\{\rho_1, \rho_2\}$ une partition de l'unité pour $\{\widetilde{\mathcal{U}}_{2\delta}, \widetilde{M}\backslash\widetilde{\mathcal{U}}_\delta\}$ et soit $h = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$. Sur $\widetilde{M}\backslash\widetilde{\mathcal{U}}_{2\delta}$, on a $\rho_2 = 1$, d'où $\|s\|^2 = 1$ et donc

$$\Omega_{[E]} = -\frac{i}{2\pi}\log\frac{1}{\|s\|^2} = 0.$$

De même, sur $\widetilde{M}\backslash E \simeq \mathcal{U}_\delta\backslash\{p\}$, on écrit $s(z, l) = z$ et dès lors

$$\Omega_{[E]} = -\frac{i}{2\pi}\log\frac{1}{\parallel z \parallel^2} = \frac{i}{2\pi}\log \parallel z \parallel^2 .$$

Autrement dit, $-\Omega_{[\varepsilon]} = \pi'^*\omega$ où ω est la $(1,1)$-forme associée à la métrique de Fubini-Study [3] sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, avec

$$\pi' : \widetilde{\mathcal{U}}_\delta \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}), \quad (z, l) \longmapsto l.$$

Donc $-\Omega_{[E]} \geq 0$ sur $\widetilde{\mathcal{U}}_\delta\backslash E$. Par continuité, $-\Omega_{[E]} = \pi'^*\omega$ sur $\widetilde{\mathcal{U}}_\delta$ et par conséquent $\Omega_{[E]}|_E = \omega > 0$. Maintenant, nous allons voir qu'il existe k_2 tel que : $\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]^n$ est positif pour $k \geq k_2$. En effet, on a $\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}} = \pi^*\Omega_{[\mathcal{L}]}$ et d'après ce qui précède $\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}}$ est positif excepté le long de E. En outre, on a $\langle\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}}; v, \overline{v}\rangle \geq 0$ si et seulement si $v \in T_p(\widetilde{M})$, $p \in E$ et $\langle\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}}; v, \overline{v}\rangle = 0$ si et seulement si $\pi_*(v) = 0$. Cela signifie que la forme $\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}}$ est partout supérieure ou égale à zéro et elle est strictement supérieure à zéro sur $\widetilde{M}\backslash E$ et sur $T'_p\widetilde{M}/T'_pE$, $p \in E$. La forme

$$\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}^k\otimes[-E]^n} = \Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}^k} + \Omega_{[-E]^n} = k\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}} + n\Omega_{[-E]},$$

[3]Pour de plus amples informations sur telle métrique voir exemple 3, plus loin.

est positive partout sur $\widetilde{U}_\delta$ et $\widetilde{M}\backslash\widetilde{U}_{2\delta}$. En tenant compte de la compacité, alors si $v \notin T_pE$ alors $\langle\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}}; v, \overline{v}\rangle$ est borné. Dès lors, $\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]^n$ est positif pour k assez grand ou ce qui revient au même il existe k_2 tel que : $\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]^n$ est positif pour $k \geq k_2$.

Etape 6 : Montrons que le fibré canonique $K_{\widetilde{M}}$ de $\widetilde{M}$ est donné par la formule

$$\widetilde{M} = \widetilde{K_M} \otimes [E]^{n-1},$$

où $\widetilde{K_M} = \pi^* K_M$. En effet, nous allons utiliser dans cette preuve les équations $z_i l_j - z_j l_i = 0$ qui interviennent dans la définition de l'éclaté (voir étape 3). Comme il s'agit de calcul local, alors on peut sans restreindre la généralité prendre $M = \mathbb{C}^n$. Choisissons un recouvrement ouvert $\widetilde{M} = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ où $\mathcal{U}_\alpha = \{(z,l) : z_\alpha \neq 0\}$, $\alpha = 1, ..., n$ et des coordonnées

$$\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \simeq \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}, \quad (z,l) \longmapsto \left(\frac{z_1}{z_\alpha}, ..., 1, ..., \frac{z_n}{z_\alpha}, z_\alpha\right).$$

Donc, $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est le sous-espace affine défini par $u_\alpha = 1$. Les fonctions de transitions sont données par

$$\varphi_{\alpha\beta}(u_1, ..., u_{n+1}) = \left(\frac{u_1}{u_\alpha}, ..., \frac{u_n}{u_\alpha}, ..., \frac{u_{n+1}}{u_\alpha}\right).$$

Dès lors, le déterminant de la matrice de changement de cartes est $\det J(\varphi_{\alpha\beta}) = \gamma_{\alpha\beta}.u_\alpha$, où $\{\gamma_{\alpha\beta}\}$ est le cocycle correspondant sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, i.e., $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{u_\alpha^n}$. Donc, $K_{\widetilde{M}}$ est donné par le cocycle $\frac{1}{u_\alpha^{n-1}} = \left(\frac{z_\beta}{z_\alpha}\right)^{n-1}$. Par ailleurs, le diviseur $E \subset \widetilde{M}$ est défini comme étant le lieu des zéros des fonctions $l_1, ..., l_n$. En utilisant $z_i l_j - z_j l_i = 0$, ceci peut-être décrit sur le sous-ensemble ouvert $\mathcal{U}_\alpha$ par la seule équation $l_\alpha = 0$. Donc le cocycle associé E et qui décrit le fibré en droites $\mathcal{O}(E)$ est $\{\mathcal{U}_{\alpha\beta}, \frac{1}{u_\alpha}\}$. On déduit donc de ce calcul que pour une forme canonique définie au voisinage de $p \in M$ et non nulle en p, alors son pull-back par π est une forme canonique sur l'éclaté $\widetilde{M}$ et qui s'annule le long du diviseur exceptionnel E à l'ordre $n-1$. Nous avons par conséquent, un isomorphisme de fibré en droites :

$$\pi^* K_M \longrightarrow K_{\widetilde{M}} \otimes [E]^{1-n}, \quad \lambda \longmapsto s^{1-n}\pi^*(\lambda),$$

où $s \in H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_M(E))$ est une section.

Etape 7 : Posons $k_0 \equiv k_1 + k_2$ et notons qu'on peut choisir k_0 indépendamment du choix de p car la variété M est compacte. Dès lors, pour $k \geq k_0$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\widetilde{M}}\left(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]\right) &= \Omega^n_{\widetilde{M}}\left(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E] \otimes K^*_{\widetilde{M}}\right), \\ &= \Omega^n_{\widetilde{M}}\left((\widetilde{\mathcal{L}}^k_1 \otimes \widetilde{K}^*_M) \otimes (\widetilde{\mathcal{L}}^{k'} \otimes [-E]^n)\right), \quad k' \geq k_2\end{aligned}$$

en vertu de l'étape précédente. Nous avons choisi ci-dessus k_1 de façon que $\mathcal{L}^{k_1} \otimes K_M^*$ soit positif sur M, et $\widetilde{\mathcal{L}}^{k_1} \otimes \widetilde{K}_M^*$ n'est que semi-positif sur M mais ceci est corrigé par le fait que par notre choix $\widetilde{\mathcal{L}}^{k_1} \otimes [-E]^n$ est positif sur $\widetilde{M}$. Donc $(\widetilde{\mathcal{L}}_1^k \otimes \widetilde{K}_M^*) \otimes (\widetilde{\mathcal{L}}^{k'} \otimes [-E]^n)$ est positif sur $\widetilde{M}$ et d'après le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano, on a pour $k \geq k_0$,

$$H^1\left(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E])\right) = H^1\left(\widetilde{M}, \Omega^n_{\widetilde{M}}((\widetilde{\mathcal{L}}^{k_1} \otimes \widetilde{K}_M^*) \otimes (\widetilde{\mathcal{L}}^{k'} \otimes [-E]^n)\right) = 0.$$

Par conséquent (4) est satisfaite ou ce qui revient au même l'application (2) est surjective.

<u>Etape 8</u> : Passons maintenant à la preuve de (5), i.e., que l'application (3) est surjective. Soit $\widetilde{M}$ l'éclaté de M au point p et $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$, une projection holomorphe. Le préimage $E = \pi^{-1}(p)$ est un diviseur exceptionnel. Comme précédemment, l'application de pull-back

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}^k)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k)),$$

est un isomorphisme en vertu du théorème de Hartog. En outre, si $s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}^k))$ alors $s(p) = 0$, $p \in M$ si et seulement si $\pi^* s$ s'annule sur E. Donc π^* se limite à fournir un isomorphisme

$$H^0(M, \mathcal{J}_p(\mathcal{L}^k)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E])).$$

Comme précédemment, on a

$$H^0\left(E, \mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E])\right) = \mathcal{L}_p^k \otimes H^0\left(E, \mathcal{O}_E([-E])\right) \simeq \mathcal{L}_p^k \otimes T_p'^*.$$

Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^0(M, \mathcal{J}_p(\mathcal{L}^k)) & \xrightarrow{d_p} & T_p'^* \oplus \mathcal{L}_p^k \\ \pi^* \downarrow \simeq & & \| \\ H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E])) & \xrightarrow{r_E} & H^0(E, \mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E])) \end{array}$$

est commutatif et il suffit donc de montrer que l'application r_E est surjective pour k assez grand. Par analogie avec ce qui a été fait dans l'étape précédente, on utilise la suite exacte sur $\widetilde{M}$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]^2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]) \xrightarrow{r_E} \mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]) \longrightarrow 0.$$

Ensuite, on choisit k_1 tel que : $\mathcal{L}^{k_1} \otimes K_M^*$ soit positif sur M et d'après (2) et (3), il existe k_2 tel que : $\widetilde{\mathcal{L}}^{k'} \otimes [-E]^{n+1}$ est positif sur $\widetilde{M}$ pour $k' \geq k_2$. Pour $k \geq k_0 \equiv k_1 + k_2$, on a

$$\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]^2) = \Omega^n_{\widetilde{M}}\left((\mathcal{L}^{k_1} \otimes \widetilde{K}_M^*) \oplus (\widetilde{\mathcal{L}}^{k'} \otimes [-E]^{n+1})\right),$$

avec $k' \geq k_2$. Notons qu'ici aussi puisque M est compacte, le choix de k_0 ne dépend pas de p. D'après le théorème de Kodaira-Nakano, on a donc

$$H^1\left(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]^2)\right) = 0,$$

pour $k \geq k_0$. Par conséquent, (5) est satisfaite et donc l'application (3) est surjective. □

D'après le théorème de plongement de Kodaira, il existe un diviseur positif si et seulement si M admet une 2-forme ω de type $(1,1)$, positive et fermée telle que sa classe de cohomologie soit entière, i.e., $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$. La forme ω s'appelle forme de Hodge.

Pour k entier, $[k\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ et d'après le théorème de Lefschetz [4][9] pour les classes de type $(1,1)$, il existe un fibré en droites $\mathcal{L}$ tel que : $c_1(\mathcal{L}) = k\omega$. Donc $\mathcal{L}$ est positif et on peut donc reformuler le théorème de plongement de Kodaira comme suit :

Théorème 3. *Une variété complexe compacte est projective si et seulement si elle admet une forme de Hodge.*

Rappelons qu'une métrique hermitienne $\langle , \rangle$ sur M est une forme hermitienne définie positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur TM. En coordonnées locales $z_1, ..., z_n$, cette forme s'écrit

$$h(z) = \sum_{j,l}^{n} h_{jl}(z) dz_j \otimes d\overline{z}_l,$$

où (h_{jl}) désigne une métrique hermitienne positive à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. A cette forme h, on associe une forme ω de type $(1,1)$ en prenant la partie imaginaire de h; plus précisément,

$$\omega = -\mathrm{Im}\ h = \frac{i}{2} \sum_{j,l}^{n} h_{jl} dz_j \wedge d\overline{z}_l.$$

Notons que : $\omega^n = \omega \wedge ... \wedge \omega$ (n-facteurs) est un élément de volume (noté $Vol._\omega(M)$) hermitien de M. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^n}{n!} &= \frac{1}{n!}\omega \wedge ... \wedge \omega, \\
&= Ci^n n! \det(h_{jl}) dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge ... \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n, \\
&= Cn! \det(h_{jl}) dx_1 \wedge dy_1 \wedge ... \wedge dx_n \wedge dy_n,
\end{aligned}$$

[4]Pour une sous-variété $M \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, toute classe d'homologie γ dans $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$ est analytique. Autrement dit, γ est le dual de Poincaré de la classe fondamentale d'un diviseur $\mathcal{D}$ sur M.

où $z_n = x_n + iy_n$ et C est une constante positive. Par conséquent, la (n, n)-forme $dV = \frac{1}{n!}\omega^n$ est positive et coincide avec l'élément de volume hermitien de M. Si M est compacte, alors $\int_M \omega^n = n!Vol._\omega(M) > 0$.
Une variété kählérienne est une variété complexe munie d'une métrique hermitienne dont la partie imaginaire, qui est une 2-forme ω de type $(1, 1)$ relativement à la structure complexe, est fermée. Une telle métrique s'appelle métrique kählérienne et la forme ω est dite forme de Kähler.
Soit M une variété kählérienne compacte de dimension n, munie de sa métrique kählérienne ω. On vient de voir que $\int_M \omega^n > 0$, donc si la classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$, alors $[\omega]^n \neq 0$ et en outre, $H^{2k}(M, \mathbb{R}) \neq 0$, $0 \leq k \leq n$.

Exemple 1. *Toute surface de Riemann est kählérienne puisque toute 2-forme est fermée.*

Exemple 2. *Toute sous-variété analytique d'une variété kählérienne est kählérienne pour la métrique induite. En particulier, toute variété projective est kählérienne.*

Exemple 3. *Sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de dimension n, on dispose d'une métrique hermitienne canonique, la métrique de Fubini-Study qui fait de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ une variété kählérienne. Soit $[Z_0 : ... : Z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ des coordonnées homogènes et soit $\mathcal{U}_j = \{[Z_0 : ... : Z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : Z_j \neq 0\}$ l'ensemble des droites pour lesquelles $Z_j \neq 0$. On considère aussi l'application*

$$\varphi_j : \mathcal{U}_j \longrightarrow \mathbb{C}^n, [Z_0 : ... : Z_n] \longmapsto \left(\frac{Z_0}{Z_j}, ..., \frac{Z_{j-1}}{Z_j}, \frac{Z_{j+1}}{Z_j}, ..., \frac{Z_n}{Z_j}\right) \equiv (z_1, ..., z_n),$$

avec $z_k = \frac{Z_{k-1}}{Z_j}$ si $k \leq j$ et $z_k = \frac{Z_k}{Z_j}$ si $k > j$ où $1 \leq k \leq n$. On considère dans $\mathcal{U}_j$ la $(1, 1)$-forme différentielle

$$\omega_j = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{Z_k}{Z_j}\right|^2.$$

En tenant compte de l'application φ_j, on écrit

$$\omega_j = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\left(1 + \sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right),$$

en fonction des coordonnées non homogènes $z_1, ..., z_n$.
a) Notons que $\omega_j|_{\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k} = \omega_k|_{\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k}$; autrement dit, ces formes définissent une forme globale ω sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. En effet, on a

$$\log\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{Z_k}{Z_j}\right|^2 = \log\left|\frac{Z_l}{Z_j}\right|^2 + \log\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{Z_k}{Z_l}\right|^2,$$

et il suffit de montrer que : $\partial\overline{\partial}\log\left|\frac{Z_l}{Z_j}\right|^2 = 0$ *sur* $\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_l$*. Or* $\frac{Z_l}{Z_j} = z_l$ *est la* l*-ème coordonnée sur* $\mathfrak{U}_j$*, donc*

$$\partial\overline{\partial}\log|z_l|^2 = \partial\left(\frac{1}{z_l\overline{z}_l}\overline{\partial}(z_l\overline{z}_l)\right) = \partial\left(\frac{z_l d\overline{z}_l}{z_l\overline{z}_l}\right) = \partial\left(\frac{d\overline{z}_l}{\overline{z}_l}\right) = 0.$$

b) Montrons que ω *est une* $(1,1)$*-forme réelle fermée. En effet, de la relation*

$$\overline{\partial\overline{\partial}} = \overline{\partial}\partial = -\partial\overline{\partial},$$

on déduit que $\omega_j = \overline{\omega}_j$*. En outre,* ω *est fermée car en général toute forme qui s'écrit sous la forme* $\partial\overline{\partial}\lambda$ *est fermée;*

$$d(\partial\overline{\partial}\lambda) = \partial^2\overline{\partial}\lambda - \overline{\partial}^2\partial\lambda = 0.$$

c) Montrons que ω *est définie positive. En effet, on vérifie cela sur chaque* $\mathfrak{U}_j$*. On a*

$$\begin{aligned}
\omega_j &= \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\left(1+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right), \\
&= \frac{i}{2\pi}\partial\left(\frac{\overline{\partial}\left(1+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)}{1+\sum|z_k|^2}\right), \\
&= \frac{i}{2\pi}\partial\left(\frac{\sum z_k d\overline{z}_k}{1+\sum|z_k|^2}\right), \\
&= \frac{i}{2\pi}\partial\left(\frac{(1+\sum|z_k|^2)\sum dz_k\wedge d\overline{z}_k - (\sum\overline{z}_k dz_k)\wedge(\sum z_k d\overline{z}_k)}{(1+\sum|z_k|^2)^2}\right).
\end{aligned}$$

Au point $[1:0:...:0]$ *par exemple, on a*

$$\omega_j = \frac{i}{2\pi}\sum dz_k\wedge d\overline{z}_k,$$

qui est positive. Or ω *est invariante sous l'action du groupe* $\mathfrak{U}(n+1)$ *sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$*, donc* ω *est positive partout. On peut aussi le montrer de manière directe en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :* $|\langle\zeta,\eta\rangle| \le \|\zeta\|.\|\eta\|$ *où* $\langle,\rangle$ *est le produit hermitien canonique sur* $\mathbb{C}^n$ *et* $\|\zeta\| = \sqrt{\langle\zeta,\zeta\rangle}$*. En effet, notons tout d'abord que la relation ci-dessus peut s'écrire sous la forme*

$$\omega_j = \frac{i}{2\pi}\frac{1}{(1+\sum|z_k|^2)^2}.\sum f_{kl}dz_k\wedge dz_l,$$

où $f_{kl} = (1+\sum|z_k|^2)\delta_{kl} - \overline{z}_k z_l$*. Montrons que la matrice* (f_{kl}) *est définie positive. Pour* $\zeta \neq 0$*, on a*

$$\zeta^\top(f_{kl})\overline{\zeta} = \|\zeta\|^2 + \|z\|^2\|\zeta\|^2 - \zeta^\top\overline{z}z^\top\overline{\zeta}.$$

Or

$$\zeta^\top \overline{z} z^\top \overline{\zeta} = \langle \zeta, z\rangle\langle z, \zeta\rangle = \overline{\langle z, \zeta\rangle}\langle z, \zeta\rangle = \|\langle z, \zeta\rangle\|^2,$$

donc

$$\zeta^\top (f_{kl})\overline{\zeta} = \|\zeta\|^2 + \|z\|^2\|\zeta\|^2 - \zeta^\top (f_{kl})\overline{\zeta} = \|\zeta\|^2 + \|z\|^2\|\zeta\|^2 - \zeta^\top \overline{z} z^\top \overline{\zeta} \geq \|\zeta\|^2,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Comme $\zeta \neq 0$*, alors*

$$\zeta^\top (f_{kl})\overline{\zeta} > 0.$$

Soit $\sigma : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$*, la projection standard. Sur*

$$\sigma^{-1}(\mathcal{U}_j) = \{(Z_0 : ... : Z_n) : Z_j \neq 0\},$$

on a

$$\sigma^*\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{Z_k}{Z_j}\right|^2\right) = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\left(\log(\|Z\|^2) - \log(|Z_j|^2)\right).$$

Or on a vu ci-dessus que $\partial\overline{\partial}\log(|Z_j|^2) = 0$*, donc*

$$\sigma^*\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(\|Z\|^2).$$

La métrique kählérienne ainsi définie sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *s'appelle la métrique de Fubini-Study. Les seules groupes de cohomologie entière non nul de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *étant* $H^{2k}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H^{2k}(S^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$*,* $0 \leq k \leq n$*, alors* $[\omega] \in H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ *est un générateur de l'anneau de cohomologie* $H^\bullet(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$*.*

Exemple 4. *Soit* Λ *un réseau de* $\mathbb{C}^n$ *et* $T^n = \mathbb{C}^n/\Lambda$ *un tore complexe. Celui-ci est une variété complexe compacte. Toute forme hermitienne*

$$\omega = i\sum f_{jk}dz_j \wedge d\overline{z}_k,$$

à coefficients constants sur $\mathbb{C}^n$ *et définie positive détermine une métrique kählérienne sur* T^n*.*

Exemple 5. *On va donner ici un exemple d'une variété non kählérienne. Considérons la surface de Hopf définie par le quotient* $M = \mathbb{C}^2\backslash\{0\}/\mathbb{Z}$*; i.e., l'espace des orbites dans* $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ *du groupe* $\mathbb{Z}$ *opérant par* $(k, z) \longmapsto \lambda^k z$*,* $\lambda \neq 0$*. Comme* $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ *est homéomorphe à* $S^3 \times \mathbb{R}_+^*$*, alors* $M \simeq S^3 \times S^1$*. Dès lors,* $H^2(M, \mathbb{R}) = 0$ *et par conséquent la surface de Hopf n'est pas kählérienne.*

On vient de voir que les variétés kählériennes compactes forment une classe remarquable de variétés analytiques complexes. En général, on s'intéresse à la classe des variétés kählériennes, en prévilégeant les variétés projectives. Une des raisons est que ces dernières contiennent beaucoup de sous-variétés complexes alors que les variétés kählériennes n'en possèdent pas en général. On sait qu'on peut trouver des variétés complexes compactes non kählériennes mais il est très difficile de construire ou de décider si une variété complexe est ou non kählérienne. Les variétés projectives complexes analytiques sont des exemples particuliers de variétés kählériennes compactes. Une forme de Kähler de classe de cohomologie entière n'est autre qu'une forme de Hodge. En fait, une autre façon équivalente de formuler le théorème de plongement de Kodaira est donc la suivante :

Théorème 4. *Soit M une variété complexe compacte. Alors M est projective si et seulement si elle admet une forme de Kähler dont la classe de cohomologie est entière.*

References

[1] **Ch. Birkenhake and H. Lange**, *Complex abelian varieties*, Springer-Verlag, 1992.

[2] **O. Debarre**, *Tores et variétés abéliennes complexes*, Cours spécialisés 6, Société Mathématique de France, EDP Sciences, 1999.

[3] **P. A. Griffiths and J. Harris**, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience, 1978.

[4] **R. Hartshorne**, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[5] **D. Huybrechts**, *Complex geometry*, Springer, 2005.

[6] **A. Lesfari**, Abelian Surfaces and Kowalewski's top, *Ann. Scient. École Norm. Sup.*, (1988), 193-223.

[7] **A. Lesfari**, Abelian varieties, surfaces of general type and integrable systems, *Beiträge Algebra Geom.*, **48, 1 (2007)**, 95-114.

[8] **A. Lesfari**, Algebraic integrability: the Adler-van Moerbeke approach, *Regul. Chaotic Dyn.*, **16, Nos. 3-4 (2011)**, 187-209.

[9] **A. Lesfari**, Etude des théorèmes d'annulation de Kodaira-Nakano, de Lefschetz sur les sections hyperplanes et de Lefschetz pour les classes de type (1,1), *Analele Universitatii de Vest din Timisoara, Seria Matematica-Informatica*, **XLIX, 2 (2011)**, 37- 60.

[10] **B. G. Moishezon**, On n-dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **63 (1967)**, 51-177.

[11] **D. Mumford**, *Algebraic geometry I: complex projective varieties*, Springer-Verlag, 1975.

[12] **A. Robert**, Introduction aux variétés abéliennes complexes, *Enseign. Math. (2), Sér. 28 (1982)*, 281-293.

[13] **A. Weil**, *Variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1971.

A. Lesfari
Department of Mathematics, Faculty of Sciences
University of Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Morocco
E-mail: Lesfariahmed@yahoo.fr

Received: 4.09.2012
Accepted: 5.10.2012