Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino
Vol. 72, 1–2 (2014), 255 – 284

A. Lesfari

ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE

Résumé. The aim of this paper is to present an overview and to make a careful study of different integrable cases for the equations of a rigid body rotation around a fixed point. We study this interesting problem from a different angle using different methods : the Kowalewski-Painlevé analysis, isospectral deformation method and others techniques.

1. Introduction

L'un des problèmes les plus fondamentaux de la mécanique est l'étude du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. Les équations différentielles de ce problème s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{M} &= M \wedge \Omega + \mu g \, \Gamma \wedge L, \\ \dot{\Gamma} &= \Gamma \wedge \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

où $\wedge$ est le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, $M = (m_1, m_2, m_3)$ le moment angulaire du solide, $\Omega = (\frac{m_1}{I_1}, \frac{m_2}{I_2}, \frac{m_3}{I_3})$ la vitesse angulaire, I_1, I_2 et I_3, les moments d'inertie, $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ le vecteur vertical unitaire, μ la masse du solide, g l'accélération de la pesanteur, et enfin, $L = (l_1, l_2, l_3)$ le vecteur unitaire ayant pour origine le point fixe et dirigé vers le centre de gravité ; tous ces vecteurs sont considérés dans un système mobile dont les coordonnées sont fixées aux axes principaux d'inertie. L'espace de configuration d'un solide avec un point fixe est le groupe des rotations $SO(3)$. Celui-ci étant engendré par les sous groupes à un paramètre des rotations de l'espace à trois dimensions,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que c'est le groupe des matrices orthogonales A d'ordre trois et le mouvement de ce solide est décrit par une courbe sur ce groupe. L'espace des vitesses angulaires de toutes les rotations (l'ensemble des dérivées $\dot{A}(t)\big|_{t=0}$ des courbes différentiables dans $SO(3)$ passant par l'identité en $t = 0 : A(0) = I$) est l'algèbre de Lie du groupe $SO(3)$; c'est l'algèbre $so(3)$ des matrices antisymétriques d'ordre trois. Cette algèbre est engendrée comme espace vectoriel par les matrices

$$e_1 = \dot{A}_1(t)\big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \dot{A}_2(t)\big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \dot{A}_3(t)\big|_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui vérifient les relations de commutation : $[e_1,e_2]=e_3$, $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_3,e_1]=e_2$. On utilisera le fait que si l'on identifie $so(3)$ à $\mathbb{R}^3$ en envoyant (e_1,e_2,e_3) sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$, le crochet de $so(3)$ correspond au produit vectoriel. En d'autres termes, considérons l'application

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow so(3),\ a=(a_1,a_2,a_3) \longmapsto A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

laquelle définit un isomorphisme entre les algèbres de Lie $\left(\mathbb{R}^3,\wedge\right)$ et $(so(3),[,])$ où $a\wedge b \longmapsto [A,B]=AB-BA$. En utilisant cet isomorphisme, on peut réecrire le système (1) sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{M} &= [M,\Omega] + \mu g\,[\Gamma,L], \\ \dot{\Gamma} &= [\Gamma,\Omega], \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} M &= (M_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \equiv \sum_{i=1}^{3} m_i e_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3), \\ \Omega &= (\Omega_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \equiv \sum_{i=1}^{3} \omega_i e_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3), \\ \Gamma &= (\gamma_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \equiv \sum_{i=1}^{3} \gamma_i e_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3), \end{aligned}$$

et

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3).$$

En tenant compte du fait que $M = I\Omega$, alors les équations précédentes deviennent

(2)
$$\begin{aligned} \dot{M} &= [M,\Lambda M] + \mu g\,[\Gamma,L], \\ \dot{\Gamma} &= [\Gamma,\Lambda M], \end{aligned}$$

où

$$\Lambda M =\equiv \sum_{i=1}^{3} \lambda_i m_i e_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_3 m_3 & \lambda_2 m_2 \\ \lambda_3 m_3 & 0 & -\lambda_1 m_1 \\ -\lambda_2 m_2 & \lambda_1 m_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3), \quad \lambda_i \equiv \frac{1}{I_i}$$

La résolution de ce problème a été analysée en premier lieu par Euler [12] et en 1758, il a publié les équations (cas $\mu = 0$) qui portent son nom. Les équations d'Euler ont été intégrées par Jacobi [21] en termes de fonctions elliptiques et vers 1851, Poinsot [39] leurs donna une interprétation géométrique remarquable. Avant, vers 1815 Lagrange [25] avait trouvé un autre cas ($I_1 = I_2$, $l_1 = l_2 = 0$) d'intégrabilité, que Poisson a longuement examiné par la suite. Le problème continua d'attirer des mathématiciens mais durant une longue période, aucun résultat nouveau n'a pu être obtenu. C'est alors vers 1888-1989 que fit son apparition un mémoire [23], du plus haut intérêt, contenant un nouveau cas ($I_1 = I_2 = 2I_3$, $l_3 = 0$) d'intégrabilité découvert par Kowalewski. Pour ce remarquable travail, cette dame obtint le prix Bordin de l'académie des sciences de Paris. En fait, bien que le travail de Kowalewski est tout à fait important, on n'y voit pas du tout pourquoi il n'y aurait pas d'autres cas nouveaux d'intégrabilité. Cela, devait constituer le point de départ d'une série de recherches acharnées sur la question d'existence de cas nouveaux d'intégrabilité. D'ailleurs parmi les résultats remarquables obtenus par Poincaré [38] à l'aide des solutions périodiques des équations de la dynamique se trouve le suivant (vers 1891) : pour qu'il existe, dans le mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe, une intégrale première algébrique ne se réduisant pas à une combinaison des intégrales classiques, il est nécessaire que l'ellipsoïde d'inertie relatif au point de suspension soit de révolution. En 1896, R. Liouville (à ne pas confondre avec Joseph Liouville, bien connu en analyse complexe) concourant également pour le prix Bordin, présenta un mémoire [32] indiquant des conditions nécessaires et suffisantes ($I_3 = 0$, $2I_3/I_1 =$ nombre entier) d'existence d'une quatrième intégrale algébrique. Ces conditions ont été reproduites dans la plus part des traités classiques (exemple Whittaker [43]) et dans les journaux scientifiques. Et il fallait attendre l'an 1906, quand Husson [20], travaillant sous la direction d'Appell et de Painlevé, découvrit une démonstration érronée dans le travail de Liouville. En effet, les paragraphes I et III du mémoire de Liouville, consacrés à la recherche des conditions nécessaires, paraissent d'abord satisfaisants, mais une étude plus attentive permet de constater que les démonstrations sont au moins insuffisantes, et qu'il est impossible d'accepter les conclusions. En fait, quoique les conditions trouvées par Liouville soient nécessaires, on ne peut les déduire des calculs indiqués et de plus ces conditions ne sont pas suffisantes. Et c'est Husson qui a le premier réglé complètement cette question de recherche de nouveaux cas d'intégrabilité. S'inspirant des recherches de Poincaré sur le problème des trois corps et de Painlevé sur la généralisation du théorème de Bruns, Husson démontra que toute intégrale algébrique est une combinaison des intégrales classiques sauf dans les cas d'Euler, de Lagrange et de Kowalewski. Par ailleurs la question d'existence d'intégrales analytiques a été étudiée de façon rigoureuse par Ziglin [44, 45] et Holmes-Marsden [19]. On évoquera dans la dernière section quelques cas particuliers spéciaux : cas de Hesse-Appel'rot, cas de Goryachev-Chaplygin et cas de Bobylev-Steklov.

Considérons le système différentiel,

$$\frac{dx}{dt} = J(x)\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad m = 2n+k, \tag{3}$$

où $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (l'hamiltonien) et $J = J(x)$ est une matrice réelle antisymétrique à éléments polynomiaux satisfaisant à l'identité de Jacobi :

$$\{\{H,F\},G\} + \{\{F,G\},H\} + \{\{G,H\},F\} = 0,$$

où
$$\{H,F\}=\left\langle \frac{\partial H}{\partial x},J\frac{\partial F}{\partial x}\right\rangle=\sum_{i,j}J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j},$$
sont les crochets de Poisson. Rappelons que ce système est intégrable au sens de Liouville ou complètement intégrable s'il admet $n+k$ intégrales premiéres $H_1=H,H_2,...,H_{n+k}$ fonctionnellement indépendantes dont $H_1,H_2,...,H_n$ sont en involution et $H_{n+1},...,H_{n+k}$, sont triviales (ou fonctions de Casimir), c-à-d., telles que :
$$J\frac{\partial H_{n+i}}{\partial x}=0,\ 1\leq i\leq k.$$
D'après le théorème d'Arnold-Liouville [5], si pour presque tous les $c_i\in\mathbb{R}$ les variétés invariantes
$$\bigcap_{i=1}^{n+k}\{x:H_i(x)=c_i\}\subset\mathbb{R}^m,$$
sont compactes et connexes, alors elles sont difféomorphes au tore réel $\mathbb{R}^n/\textit{réseau}$ et les flots définis par les champs de vecteurs hamiltoniens engendrés par $H_1,...,H_n$ sont linéaires (mouvements rectilignes) sur ces tores. Nous étudions l'intégrabilité au sens de Liouville des systèmes hamiltoniens ci-dessus. On s'intéressera aussi à l'étude de complète intégrabilité algébrique de ces sytsèmes. Cela veut dire que l'on demande que les invariants du système différentiel soient polynomiaux et que de plus les variétés complexes obtenues en égalant ces invariants polynomiaux à des constantes génériques forment la partie affine d'une variété abélienne de telle façon que les flots complexes engendrés par les invariants du système soient des lignes droites sur ces tores complexes (voir les excellents ouvrages [3, 42] pour de plus amples informations sur les systèmes algébriquement complètement intégrables). Pour le concept de complète intégrabilité algébrique des systèmes hamiltoniens, on travaille avec des complexes (au lieu de réels). Les notions telles que : intégrabilité au sens de Liouville, involution, commutativité des champs de vecteurs, etc., peuvent être définies comme dans le cas réel. Par contre des difficultés surgissent : on sait qu'il n'y a pas de sous-variétés holomorphes compactes dans l'espace complexe $\mathbb{C}^m$ (principe du maximum) donc les tores complexes que l'on peut obtenir dans le théorème d'Arnold-Liouville ne sont pas compactes. Dès lors, le problème de la compactification des variétés invariantes se pose. En outre, les solutions du système en question ne sont pas uniformes. Nous verrons comment remédier à ces problèmes à l'aide des développements des solutions sous formes de séries de Laurent (voir [2, 28, 30] pour une vue d'ensemble). Les solutions méromorphes dépendant d'un nombre suffisant de paramètres libres jouent un rôle crucial dans l'étude des équations différentielles dites algébriquement intégrables. Indépendamment du fait que la plupart des exemples classiques et nouveaux de systèmes hamiltoniens complètement intégrables sont algébriquement complètement intégrables, une motivation plus profonde pour leur étude est la suivante : ces systèmes apparaissent systématiquement lorsque l'on étudie les déformations isospectrales d'opérateurs linéaires contenant une indéterminée rationnelle (en bref : paire ou forme de Lax), méthode connue aussi sous le nom de courbe spectrale (voir [8, 27, 29] pour de

plus amples informations sur cette méthode). En fait, un théorème de Adler-Kostant-Symes [3] appliqué aux algèbres de Kac-Moody (extensions formelles de dimension infinie d'une algèbre de Lie semi-simple) fournit de tels systèmes qui sont des déformations isospectrales et qui, par un théorème de van Moerbeke-Mumford [3], sont algébriquement complètement intégrables. Du point de vue de la mécanique, cela veut dire que les symétries cachées de beaucoup de systèmes algébriquement complètement intégrables s'expliquent par la théorie des groupes. Les méthodes utilisées sont avant tout analytiques, mais très inspirées par des méthodes de géométrie algébrique complexe. En fait depuis très longtemps et malgré plusieurs recherches, on ne connaissait pas de forme de Lax pour la toupie de Kowalewski en vue de sa résolution à l'aide de la méthode des déformations isospectrales. Par la suite, diffèrentes formes de Lax ont été proposées, dont la plus "naturelle" a été obtenue par Bobenko, Reiman and Semenov-Tian-Shanskii [9, 40]. Une autre paire de Lax a été obtenue par Buys [10]. Une étude géométrique détaillée du cas de Kowalewski a permis de découvrir des relations rationnelles entre divers systèmes. Par exemple depuis longtemps personne n'avait soupçonné l'existence d'une relation rationnelle entre la toupie de Kowalewski, le flot géodésique sur le groupe $SO(4)$ pour la métrique de Manakov et le système différentiel de Hénon-Heiles. Une telle relation a été obtenue par Adler-van Moerbeke [1] et l'utilisation de nos résultats obtenus dans [26] leur a permis ainsi que Haine-Horozov [16] de fournir une paire de Lax pour le cas de Kowalewski, problème qui était ouvert depuis plusieurs années. Signalons enfin que certains systèmes intégrables apparaissent comme des revêtements de systèmes algébriquement complètement intégrables. Les variétés invariantes M_c (définies par l'intersection des constantes du mouvement) satisfont à la condition : $M_c = T^n \backslash \mathcal{D}$ où T^n sont des revêtements de variétés abéliennes T^n ramifiés le long d'un diviseur $\mathcal{D}$ (sur T^n). Ces systèmes concernent des situations où les exposants de Kowalewski (c'est-à-dire valeurs propres de l'opérateur linéaire intervenant dans la recherche des solutions sous forme de séries de Laurent) sont des fractions. On dit que ces systèmes sont généralement algébriquement complètement intégrables. Nous verrons que les équations différentielles qui régissent le mouvement de la toupie de Lagrange forment un système généralement algébriquement complètement intégrable et il en est de même pour le cas particulier de la toupie de Goryachev-Chaplygin. En utilisant la méthode systématisée par Adler-van Moerbeke pour l'étude des systèmes algébriquement intégrables, Bechlivanidis et van Moerbeke ont montré [8] que la toupie de Goryachev-Chaplygin et le réseau de Toda sont intimement liés et font partie d'un système intégrable de sept variables. Pour d'autres informations, on pourra consulter avec profit les travaux [6, 22, 24, 33, 34, 36]. De même, pour les notions de géométrie algébrique complexe utilisées dans ce travail, on pourra consulter les ouvrages [15] et [31].

2. Le corps solide d'Euler

Dans ce cas, on a $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, c'est-à-dire le point fixe est son centre de gravité. Autrement dit, les équations d'Euler (on parle aussi de mouvement d'Euler-Poinsot du solide) du mouvement de rotation d'un solide autour d'un point fixe, pris comme origine du repère lié au solide, lorsqu'aucune force extérieure n'est appliquée au système, peuvent s'écrire sous la forme

$$\dot{M} = [M, \Lambda M], \tag{4}$$

ou sous forme explicite

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= (\lambda_3 - \lambda_2)\, m_2 m_3, \\ \dot{m}_2 &= (\lambda_1 - \lambda_3)\, m_1 m_3, \\ \dot{m}_3 &= (\lambda_2 - \lambda_1)\, m_1 m_2, \end{aligned} \tag{5}$$

ou encore sous forme d'un champ de vecteurs hamiltonien

$$\dot{x} = J\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x = (m_1, m_2, m_3)^\intercal,$$

avec

$$H = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2\right),$$

l'hamiltonien et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \in so(3).$$

On a det $J = 0$, donc (voir (3)) $m = 2n + k$ et $m - k = rg\ J$. Ici $m = 3$, $rg\ J = 2$ car J est antisymétrique, donc $n = k = 1$. Pour l'étude de la complète intégrabilité de ce système, il nous faut donc trouver deux intégrales premières. La première est connue puisque c'est $H_1 = H$. Pour déterminer la deuxième intégrale première H_2, on procède comme suit : on sait que H_2 est triviale et doit donc satisfaire à $J\frac{\partial H_2}{\partial x} = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_2}{\partial m_1} \\ \frac{\partial H_2}{\partial m_2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial m_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\frac{\partial H_2}{\partial m_1} = m_1, \qquad \frac{\partial H_2}{\partial m_2} = m_2, \qquad \frac{\partial H_2}{\partial m_3} = m_3,$$

et par conséquent

$$H_2 = \frac{1}{2}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right).$$

Nous avons réduit le problème à

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : H_2(x) = c_2\right\} \cap \mathbb{R}^3 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : H_2(x) = c_2\right\}.$$

Autrement dit, la variété réduite est une sphère de dimension 2. Les conditions du théorème d'Arnold-Liouville [5] étant satisfaites, on a le résultat suivant :

THEOREM 1. *Le système (5) est complètement intégrable et le vecteur* $J\frac{\partial H}{\partial x}$ *donne un flot sur une variété*

$$\bigcap_{i=1}^{2}\left\{x\in\mathbb{R}^3 : H_i(x)=c_i\right\},\ c_i\in\mathbb{R},$$

difféomorphe à un tore réel de dimension 1 *c'est-à-dire un cercle.*

Passons maintenant à la résolution explicite. On vient de voir que les équations admettent deux intégrales premières quadratiques :

$$H_1=\frac{1}{2}\left(\lambda_1m_1^2+\lambda_2m_2^2+\lambda_3m_3^2\right),\qquad H_2=\frac{1}{2}\left(m_1^2+m_2^2+m_3^2\right).$$

Nous supposerons que $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ sont tous différents de zéro (c'est-à-dire que le solide n'est pas réduit à un point et n'est pas non plus concentré sur une droite). Dans ces conditions, $H_1=0$ entraine $m_1=m_2=m_3=0$ et donc $H_2=0$; le solide est au repos. Nous écartons ce cas trivial et supposons dorénavant que $H_1\neq 0$ et $H_2\neq 0$. Lorsque $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, les équations (5) montrent évidemment que m_1, m_2 et m_3 sont des constantes. Supposons par exemple que $\lambda_1=\lambda_2$, les équations (5) s'écrivent alors

$$\dot m_1=(\lambda_3-\lambda_1)\,m_2m_3,\qquad \dot m_2=(\lambda_1-\lambda_3)\,m_1m_3,\qquad \dot m_3=0.$$

On déduit alors que $m_3=\text{constante}\equiv A$ et

$$\dot m_1=A\,(\lambda_3-\lambda_1)\,m_2,\qquad \dot m_2=A\,(\lambda_1-\lambda_3)\,m_1.$$

Notons que $(m_1+im_2)^{\cdot}=iA(\lambda_1-\lambda_3)(m_1+im_2)$, on obtient

$$m_1+im_2=Ce^{iA(\lambda_1-\lambda_3)t},$$

où C est une constante et donc

$$m_1=C\cos A(\lambda_1-\lambda_3)t,\qquad m_2=C\sin A(\lambda_1-\lambda_3)t.$$

L'intégration des équations d'Euler est délicate dans le cas général où λ_1, λ_2 et λ_3 sont tous différents ; les solutions s'expriment à l'aide de fonctions elliptiques. Dans la suite nous supposerons que λ_1, λ_2 et λ_3 sont tous différents et nous écartons les autres cas triviaux qui ne posent aucune difficulté pour la résolution des équations en question. Pour fixer les idées nous supposerons dans la suite que : $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$. Géométriquement, les équations

$$\lambda_1m_1^2+\lambda_2m_2^2+\lambda_3m_3^2 = 2H_1, \tag{6}$$
$$m_1^2+m_2^2+m_3^2 = 2H_2\equiv r^2, \tag{7}$$

représentent respectivement les équations de la surface d'un ellipsoïde de demi-axes : $\sqrt{\frac{2H_1}{\lambda_1}}$ (demi grand axe), $\sqrt{\frac{2H_1}{\lambda_2}}$ (demi axe moyen), $\sqrt{\frac{2H_1}{\lambda_3}}$ (demi petit axe), et d'une sphère de rayon r. Donc le mouvement du solide s'effectue sur l'intersection d'un ellipsoïde avec une sphère. Cette intersection a un sens car en comparant (6) à (7), on voit que $\frac{2H_1}{\lambda_1} < r^2 < \frac{2H_1}{\lambda_3}$, ce qui signifie géométriquement que le rayon de la sphère (7) est compris entre le plus petit et le plus grand des demi-axes de l'ellipsoïde (6). Pour étudier l'allure des courbes d'intersection de l'ellipsoïde (6) avec la sphère (7), fixons $H_1 > 0$ et faisons varier le rayon r. Comme $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, les demi-axes de l'ellipsoïde seront $\frac{2H_1}{\lambda_1} > \frac{2H_1}{\lambda_2} > \frac{2H_1}{\lambda_3}$. Si le rayon r de la sphère est inférieur au demi petit axe $\frac{2H_1}{\lambda_3}$ ou supérieur au demi grand axe $\frac{2H_1}{\lambda_1}$, alors l'intersection en question est vide (et aucun mouvement réel ne correspond à ces valeurs de H_1 et r). Lorsque le rayon r est égal à $\frac{2H_1}{\lambda_3}$, alors l'intersection est composée de deux points. Lorsque le rayon r augmente $\left(\frac{2H_1}{\lambda_3} < r < \frac{2H_1}{\lambda_2}\right)$, on obtient deux courbes autour des extrémités du demi petit axe. De même si $r = \frac{2H_1}{\lambda_1}$, on obtient les deux extrémités du demi grand axe et si r est légérement inférieur à $\frac{2H_1}{\lambda_1}$, on obtient deux courbes fermées au voisinage de ces extrémités. Enfin, si $r = \frac{2H_1}{\lambda_2}$ alors l'intersection en question est constituée de deux cercles.

THEOREM 2. *Les équations différentielles (5) d'Euler, s'intégrent au moyen de fonctions elliptiques de Jacobi.*

Démonstration : A partir des intégrales premières (6) et (7), on exprime m_1 et m_3 en fonction de m_2. On introduit ensuite ces expressions dans la seconde équation du système (5) pour obtenir une équation différentielle en m_2 et $\frac{dm_2}{dt}$ seulement. De manière plus détaillée, on tire aisément de (6) et (7) les relations suivantes :

$$m_1^2 = \frac{2H_1 - r^2\lambda_3 - (\lambda_2 - \lambda_3)m_2^2}{\lambda_1 - \lambda_3}, \tag{8}$$

$$m_3^2 = \frac{r^2\lambda_1 - 2H_1 - (\lambda_1 - \lambda_2)m_2^2}{\lambda_1 - \lambda_3}. \tag{9}$$

En substituant ces expressions dans la seconde équation du système (5), on obtient

$$\dot{m}_2 = \sqrt{(2H_1 - r^2\lambda_3 - (\lambda_2 - \lambda_3)m_2^2)(r^2\lambda_1 - 2H_1 - (\lambda_1 - \lambda_2)m_2^2)}.$$

En intégrant cette équation, on obtient une fonction $t(m_2)$ sous forme d'une intégrale elliptique. Pour réduire celle-ci à la forme standard, on peut supposer que $r^2 > \frac{2H_1}{\lambda_2}$ (sinon, il suffit d'intervertir les indices 1 et 3 dans toutes les formules précédentes). On réecrit l'équation précédente, sous la forme

$$\frac{dm_2}{\sqrt{(2H_1 - r^2\lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}dt} = \sqrt{(1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2H_1 - r^2\lambda_3}m_2^2)(1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{r^2\lambda_1 - 2H_1}m_2^2)}.$$

En posant $\tau = t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}$, $s = m_2\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2H_1 - r^2\lambda_3}}$, on obtient

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)\left(1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(2H_1 - r^2\lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}s^2\right)},$$

ce qui suggère de choisir comme module des fonctions elliptiques

$$k^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(2H_1 - r^2\lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}.$$

Les inégalités $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\frac{2H_1}{\lambda_1} < r^2 < \frac{2H_1}{\lambda_3}$ et $r^2 > \frac{2H_1}{\lambda_2}$ montrent qu'effectivement $0 < k^2 < 1$. On obtient donc

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}.$$

Cette équation admet la solution (on convient de choisir l'origine des temps telle que $m_2 = 0$ pour $t = 0$) :

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

C'est l'intégrale d'une différentielle holomorphe sur une courbe elliptique

$$\mathcal{E} : w^2 = (1-s^2)(1-k^2s^2). \tag{10}$$

La fonction inverse $s(\tau)$ constitue l'une des fonctions elliptiques de Jacobi : $s = \mathbf{sn}\tau$, qui détermine également m_2 en fonction du temps, c-à-d.,

$$m_2 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}} \cdot \mathbf{sn}\tau.$$

D'après les égalités (8) et (9), on sait que les fonctions m_1 et m_3 s'expriment algébriquement à l'aide de m_2, donc

$$m_1 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}} \cdot \sqrt{1 - \mathbf{sn}^2\tau}, \qquad m_3 = \sqrt{\frac{r^2\lambda_1 - 2H_1}{\lambda_1 - \lambda_3}} \cdot \sqrt{1 - k^2\mathbf{sn}^2\tau}.$$

Compte tenu de la définition des deux autres fonctions elliptiques : $\mathbf{cn}\tau = \sqrt{1-\mathbf{sn}^2\tau}$, $\mathbf{dn}\tau = \sqrt{1-k^2\mathbf{sn}^2\tau}$, et du fait que $\tau = t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}$, on obtient finalement les formules explicites suivantes :

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}}\mathbf{cn}(t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}), \\ m_2 &= \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}}\mathbf{sn}(t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}), \\ m_3 &= \sqrt{\frac{r^2\lambda_1 - 2H_1}{\lambda_1 - \lambda_3}}\mathbf{dn}(t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}). \end{aligned} \tag{11}$$

Autrement dit, l'intégration des équations d'Euler s'effectue au moyen de fonctions elliptiques de Jacobi et la démonstration est complète.

REMARK 1. Notons que pour $\lambda_1 = \lambda_2$, on a $k^2 = 0$. Dans ce cas, les fonctions elliptiques $\mathbf{sn}\tau, \mathbf{cn}\tau, \mathbf{dn}\tau$ se réduisent respectivement aux fonctions $\sin\tau, \cos\tau, 1$. Dès lors du système (11), on tire aisément les expressions

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}} \cos\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}t, \\ m_2 &= \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}} \sin\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}t, \\ m_3 &= \sqrt{\frac{r^2\lambda_1 - 2H_1}{\lambda_1 - \lambda_3}}. \end{aligned}$$

On retrouve les solutions établies précédemment avec

$$A = \sqrt{\frac{r^2\lambda_1 - 2H_1}{\lambda_1 - \lambda_3}}, \qquad C = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}}.$$

Etudions, via la méthode de la courbe spectrale (voir par exemple [3, 29] pour de plus amples informations sur cette méthode), le problème de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe dans le cas d'Euler. La solution de l'équation (4) est $M(t) = O(t)M(t)M^{\top}(t)$, où $O(t)$ est un sous-groupe à un paramètre du groupe $SO(4)$. Manakov [35] a montré que l'équation (4) est équivalente à l'équation de Lax :

$$\dot{A} = [A, B], \tag{12}$$

avec $A = M + \alpha h$, $B = \Lambda M + \beta h$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix},$$

et

$$\lambda_1 = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\alpha_3 - \alpha_2}, \qquad \lambda_2 = \frac{\beta_1 - \beta_3}{\alpha_1 - \alpha_3}, \qquad \lambda_3 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned} P(h,z) &= \det(M + \alpha h - zI), \\ &= \prod_{j=1}^{3}(\alpha_j h - z) + \left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_j m_j^2\right)h - \left(\sum_{j=1}^{3} m_j^2\right)z. \end{aligned}$$

Le spectre de la matrice $A = M + \alpha h$ (comme fonction de $h \in \mathbb{C}$) ne dépend pas de t et est donné par les zéros du polynôme caractéristique $P(h,z) = 0$, c'est-à-dire en posant $w = \frac{h}{z}$,

$$z^2 \prod_{j=1}^{3}(\alpha_j w - 1) + 2H_1 w - 2H_2 = 0, \tag{13}$$

c'est l'équation d'une courbe elliptique. Le flot se linéarise sur la jacobienne de cette courbe elliptique c'est-à-dire sur la courbe elle-même. Par conséquent, comme dans le théorème précédent, les équations d'Euler, s'intégrent au moyen de fonctions elliptiques.

THEOREM 3. *Le système différentiel (5) admet une paire de Lax de la forme (12). La linéarisation du flot s'effectue sur une courbe elliptique d'équation affine (13). Autrement dit, les équations du problème en question s'intégrent au moyen de fonctions elliptiques.*

Examinons maintenant la complète intégrabilité algébrique du problème du corps solide d'Euler. Les deux cercles définies par l'intersection

$$M_c = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : H_1(x) = c_1\right\} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^3 : H_2(x) = c_2\right\},$$

(avec $\frac{c_1}{\lambda_3} < c_2 < \frac{c_1}{\lambda_1}$, sinon elle est vide) forme la partie réelle d'un tore complexe de dimension 1, définie par la courbe elliptique $\mathcal{E}$(10). L'intersection complexe $\left(\subset \mathbb{C}^3\right)$ est la partie affine d'une courbe elliptique

$$\overline{M}_c = \left\{X \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) : H_1(X) = c_1 X_0^2\right\} \cap \left\{X \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) : H_2(X) = c_2 X_0^2\right\}.$$

On montre que $\overline{M}_c$ est isomorphe à la courbe elliptique $\mathcal{E}$. En outre le cercle défini par $\bigcap_{i=1}^{2}\left\{w \in \mathbb{R}^3 : H_i(w) = c_i\right\}$, s'étend au tore complexe $\mathbb{C}/$*réseau* et le flot se linéarise sur ce tore. Si $p(t) = (m_1(t), m_2(t), m_3(t))$, est une solution du système (5), la loi reliant $p(t_1+t_2)$ à $p(t_1)$ et $p(t_2)$ est la loi d'addition sur la courbe elliptique. D'après les équations (5), l'unique différentielle holomorphe sur $\overline{M}_c$ est donnée par

$$\omega = \frac{dm_1}{(\lambda_3-\lambda_2)\,m_2m_3} = \frac{dm_2}{(\lambda_1-\lambda_3)\,m_1m_3} = \frac{dm_3}{(\lambda_2-\lambda_1)\,m_1m_2},$$

d'où $t = \int_{p(0)}^{p(t)} \omega$, $p(0) \in \overline{M}_c$. Le système (5) est invariant par les transformations $t \to \alpha^{-1}t$, $m_1 \to \alpha m_1$, $m_2 \to \alpha m_2$, $m_3 \to \alpha m_3$. On cherche des solutions du système (5) ou ce qui revient au même de l'équation (4) sous la forme de séries de Laurent

$$M(t) = t^{-1}\left(M^{(0)} + M^{(1)}t + M^{(2)}t^2 + \cdots\right) = \sum_{j=0}^{\infty} M^{(j)} t^{j-1}, \tag{14}$$

dépendant de dim(*phase space*) $- 1 = 2$ paramètres libres. En substituant (14) dans l'équation (4), on obtient

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j-1)\,M^{(j)} t^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{j}\left[M^{(i)}, \Lambda M^{(j-i)}\right]\right) t^{j-2}.$$

Dès lors,

$$(j-1)\,M^{(j)} = \sum_{i=0}^{j}\left[M^{(i)}, \Lambda M^{(j-i)}\right],$$

et l'on voit que les coefficients $M^{(0)}, M^{(1)}, \ldots$, satisfont aux équations

$$M^{(0)} + \left[M^{(0)}, \Lambda M^{(0)}\right] = 0, \tag{15}$$

$$(L - kI)\, M^{(k)} = -\sum_{i=1}^{k-1} \left[M^{(i)}, \Lambda C^{(k-i)}\right]\ ,\ k \geq 1,$$

où L est l'opérateur linéaire $L : so(3) \longrightarrow so(3)$ défini par

$$L\,(Y) = Y + \left[M^{(0)}, \Lambda Y\right] + \left[Y, \Lambda M^{0}\right] = \text{Jacobien de } (15).$$

La matrice $M^{(0)}$ apparaissant dans L est une solution de l'équation non-linéaire (15). Un calcul simple montre que la matrice $(L - kI)$ est toujours inversible sauf pour $k = 2$ et donc son rang est égal à 1. Ceci montre que le coefficient $M^{(2)}$ contient deux paramètres libres et peuvent être assimilés à c_1 et c_2. De manière détaillée et explicite, cherchons les solutions du système (5) sous la forme de séries de Laurent

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{1}{t}\left(m_1^{(0)} + m_1^{(1)}t + m_1^{(2)}t^2 + \cdots\right),\\
m_2 &= \frac{1}{t}\left(m_2^{(0)} + m_2^{(1)}t + m_2^{(2)}t^2 + \cdots\right),\\
m_3 &= \frac{1}{t}\left(m_3^{(0)} + m_3^{(1)}t + m_3^{(2)}t^2 + \cdots\right),
\end{aligned}$$

dépendant de $\dim(\text{espace de phase}) - 1 = 2$ paramètres libres. En substituant ces équations dans le système (5), on voit que :

1) les coefficients $m_1^{(0)}$, $m_2^{(0)}$, $m_3^{(0)}$, satisfont aux équations

$$\begin{aligned}
m_1^{(0)} + (\lambda_3 - \lambda_2)\, m_2^{(0)} m_3^{(0)} &= 0,\\
m_2^{(0)} + (\lambda_1 - \lambda_3)\, m_1^{(0)} m_3^{(0)} &= 0,\\
m_3^{(0)} + (\lambda_2 - \lambda_1)\, m_1^{(0)} m_2^{(0)} &= 0,
\end{aligned}$$

dont les solutions sont

<u>1^{er} cas</u> :

$$m_1^{(0)} = \frac{-1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_3)}},\quad m_2^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}},\quad m_3^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}}.$$

<u>2^{me} cas</u> :

$$m_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_3)}},\quad m_2^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}},\quad m_3^{(0)} = \frac{-1}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}}.$$

<u>3^{me} cas</u> :

$$m_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_3)}},\quad m_2^{(0)} = \frac{-1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}},\quad m_3^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}}.$$

<u>4^{me} cas</u> :

$$m_1^{(0)} = \frac{-1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_3)}},\quad m_2^{(0)} = \frac{-1}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}},\quad m_3^{(0)} = \frac{-1}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}}.$$

2) les coefficients $m_1^{(1)}$, $m_2^{(1)}$, $m_3^{(1)}$, satisfont aux équations

$$\begin{aligned}
(\lambda_3-\lambda_2)\,m_2^{(0)}m_3^{(1)}+(\lambda_3-\lambda_2)\,m_2^{(1)}m_3^{(0)} &= 0,\\
(\lambda_1-\lambda_3)\,m_1^{(0)}m_3^{(1)}+(\lambda_1-\lambda_3)\,m_1^{(1)}m_3^{(0)} &= 0,\\
(\lambda_2-\lambda_1)\,m_1^{(0)}m_2^{(1)}+(\lambda_2-\lambda_1)\,m_1^{(1)}m_2^{(0)} &= 0,
\end{aligned}$$

dont les solutions sont dant tous les cas : $m_1^{(1)}=m_2^{(1)}=m_3^{(1)}=0$.

3) les coefficients $m_1^{(2)}$, $m_2^{(2)}$, $m_3^{(2)}$, satisfont aux équations

$$\begin{aligned}
&m_1^{(2)}-\lambda_3 m_2^{(0)}m_3^{(2)}-\lambda_3 m_2^{(1)}m_3^{(1)}-\lambda_3 m_2^{(2)}m_3^{(0)}\\
&\qquad +\lambda_2 m_2^{(0)}m_3^{(2)}+\lambda_2 m_2^{(1)}m_3^{(1)}+\lambda_2 m_2^{(2)}m_3^{(0)}=0,\\
&m_2^{(2)}-\lambda_1 m_1^{(0)}m_3^{(2)}-\lambda_1 m_1^{(1)}m_3^{(1)}-\lambda_1 a_2 m_3^{(0)}\\
&\qquad +\lambda_3 m_1^{(0)}m_3^{(2)}+\lambda_3 m_1^{(1)}m_3^{(1)}+\lambda_3 m_1^{(2)}m_3^{(0)}=0,\\
&m_3^{(2)}-\lambda_2 m_1^{(0)}b_2-\lambda_2 m_1^{(1)}m_2^{(1)}-\lambda_2 m_1^{(2)}m_2^{(0)}\\
&\qquad +\lambda_1 m_1^{(0)}m_2^{(2)}+\lambda_1 m_1^{(1)}m_2^{(1)}+\lambda_1 m_1^{(2)}m_2^{(0)}=0,
\end{aligned}$$

dont les solutions qui correspondent aux différents cas sont respectivement :

<u>1^{er} cas</u> : $m_1^{(2)}=\frac{\sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)}}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)}}m_2^{(2)}+\frac{\sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)}}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)}}m_3^{(2)}$.

<u>2^{me} cas</u> : $m_1^{(2)}=-\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}}m_2^{(2)}+\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}}m_3^{(2)}$.

<u>3^{me} cas</u> : $m_1^{(2)}=\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}}m_2^{(2)}-\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}}m_3^{(2)}$.

<u>4^{me} cas</u> : $m_1^{(2)}=-\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}}m_2^{(2)}-\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}}m_3^{(2)}$.

où $m_2^{(2)}$ et $m_3^{(2)}$ sont deux paramètres libres.
Par conséquent, pour le premier cas on a

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{-1}{t\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_3)}}+\left(\frac{\sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)}}{\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)}}m_2^{(2)}+\frac{\sqrt{(\lambda_3-\lambda_2)}}{\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)}}m_3^{(2)}\right)t+\cdots,\\
m_2 &= \frac{1}{t\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}}+m_2^{(2)}t+\cdots,\\
m_3 &= \frac{1}{t\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}}+m_3^{(2)}t+\cdots.
\end{aligned}$$

En substituant ces développements dans les intégrales premières H_1 (6) et H_2(7), on obtient

$$H_1=2\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}}\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1-\lambda_3}\right)m_2^{(2)}+2\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}}\left(\frac{1}{\lambda_3-\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)m_3^{(2)},$$

$$H_2=2\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_1}}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2}-\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_3}\right)m_2^{(2)}+2\frac{\sqrt{\lambda_3-\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1-\lambda_3}}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3-\lambda_2}-\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)m_3^{(2)},$$

et on en déduit les relations

$$m_3^{(2)} = \frac{1}{6\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_2)}}\left((\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1 H_1 - H_2) - (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2 H_1 - H_2)\right),$$
$$m_2^{(2)} = \frac{1}{6\sqrt{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}}\left((\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3 H_1 - H_2) - (\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1 H_1 - H_2)\right).$$

On obtient évidemment des expressions similaires pour les autres cas. Il serait intéressant de comparer les solutions obtenues sous forme de séries de Laurent avec les solutions obtenues précédemment à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi.

3. La toupie de Lagrange

Dans ce cas, on a $I_1 = I_2$, $l_1 = l_2 = 0$, c-à-d., la droite qui joigne le centre de gravité au point fixe est un axe de révolution du solide. Comme pour le cas d'Euler, on montre que dans ce cas aussi le problème se résout grâce à des intégrales elliptiques. Autrement dit, l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions elliptiques.

Nous allons montrer que les équations différentielles qui régissent le mouvement de la toupie de Lagrange forment un système généralement algébriquement complètement intégrable. Les équations de ce problème s'écrivent explicitement sous la forme

$$\begin{gathered}
\lambda_1\dot{m}_1 = \lambda_1(\lambda_3-\lambda_1)m_2m_3 - \gamma_2, \qquad \dot{\gamma}_1 = \lambda_3 m_3\gamma_2 - \lambda_1 m_2\gamma_3,\\
\lambda_1\dot{m}_2 = \lambda_1(\lambda_1-\lambda_3)m_1m_3 + \gamma_1, \qquad \dot{\gamma}_2 = \lambda_1 m_1\gamma_3 - \lambda_3 m_3\gamma_1,\\
\dot{m}_3 = 0, \qquad \dot{\gamma}_3 = \lambda_1(m_2\gamma_1 - m_1\gamma_2).
\end{gathered}$$

Ce système admet les quatre intégrales premières suivantes :

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{\lambda_1^2}{2}(m_1^2+m_2^2) + \frac{\lambda_1\lambda_3}{2}m_3^2 - \gamma_3, \qquad H_2 = \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2,\\
H_3 &= \lambda_1(m_1\gamma_1+m_2\gamma_2+m_3\gamma_3), \qquad H_4 = \lambda_3 m_3.
\end{aligned}$$

et forme un champ de vecteurs hamiltonien intégrable au sens de Liouville. La strucure de Poisson est donnée par $\{m_i,m_j\} = -\varepsilon_{ijk}m_k$, $\{m_i,\gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk}\gamma_k$, $\{\gamma_i,\gamma_j\} = 0$, où $1 \leq i,j,k \leq 3$ et ε_{ijk} est le tenseur antisymétrique total pour lequel on a $\varepsilon_{ijk} = 1$. Soit

$$M_c = \{(m_1,m_2,m_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) \in \mathbb{C}^6 : H_1 = c_1, H_2 = 1, H_3 = c_3, H_4 = c_4\},$$

la variété affine définie par l'intersection des constantes du mouvement et soit $\mathbb{C}^* \sim \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ le groupe des rotations défini par le flot du champ de vecteurs engendré par H_4, c-à-d.,

$$\begin{gathered}
\dot{m}_1 = m_2, \qquad \dot{m}_2 = -m_1, \qquad \dot{m}_3 = 0,\\
\dot{\gamma}_1 = \gamma_2, \qquad \dot{\gamma}_2 = -\gamma_1, \qquad \dot{\gamma}_3 = 0.
\end{gathered}$$

On sait que le quotient $M_c/\mathbb{C}^*$ est une courbe elliptique. On montre que génériquement, la variété algébrique M_c n'est pas isomorphe au produit direct de la courbe $M_c/\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C}^*$. Pour des constantes génériques c_j, la variété invariante complexe M_c est biholomorphe à une partie affine de $\mathbb{C}^2/\Lambda$ où $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ est un réseau de rang 3,

$$\Lambda = \mathbb{Z}\begin{pmatrix} 2\pi i \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Z}\begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi i \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Z}\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Re}(\tau_1) < 0.$$

Dès lors, $\mathbb{C}^2/\Lambda$ est un groupe algébrique non compact et peut être considéré comme une extension non triviale de la courbe elliptique $\mathbb{C}/\{2\pi i\mathbb{Z}\oplus\tau_1\mathbb{Z}\}$ par $\mathbb{C}^* \sim \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$,

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^2/\Lambda \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}/\{2\pi i\mathbb{Z}\oplus\tau_1\mathbb{Z}\} \longrightarrow 0, \quad \varphi(z_1,z_2) = z_1.$$

Le groupe algébrique $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ est la jacobienne généralisée d'une courbe elliptique avec deux points identifiés à l'infini. Par conséquent, on a le résultat suivant :

THEOREM 4. *Le système différentiel régissant la toupie de Lagrange forme un système généralement algébriquement complètement intégrable.*

4. La toupie de Kowalewski

Dans ce cas, on a $I_1 = I_2 = 2I_3$, $l_3 = 0$. Ici l'axe de révolution du solide est orthogonal à la droite joignant le centre de gravité au point fixe. L'étude de ce cas est compliquée. Le système différentiel (2), s'écrit explicitement sous la forme

$$\begin{aligned} \dot m_1 &= m_2m_3, & \dot\gamma_1 &= 2m_3\gamma_2 - m_2\gamma_3,\\ \dot m_2 &= -m_1m_3 + 2\gamma_3, & \dot\gamma_2 &= m_1\gamma_3 - 2m_3\gamma_1,\\ \dot m_3 &= -2\gamma_2, & \dot\gamma_3 &= m_2\gamma_1 - m_1\gamma_2, \end{aligned} \tag{16}$$

où, sans restreindre la généralité, nous avons choisi $l_2 = 0$, $\mu g l_1 = 1$, $I_3 = 1$ et nous avons utilisé la substitution $t \longrightarrow 2t$. Ces équations s'écrivent sous la forme d'un champ de vecteurs hamiltonien

$$\dot x = J\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x = (m_1,m_2,m_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)^\intercal,$$

avec

$$H = \frac{1}{2}\left(m_1^2+m_2^2\right) + m_3^2 + 2\gamma_1,$$

l'hamiltonien et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 & 0 & -\gamma_3 & \gamma_2\\ m_3 & 0 & -m_1 & \gamma_3 & 0 & -\gamma_1\\ -m_2 & m_1 & 0 & -\gamma_2 & \gamma_1 & 0\\ 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0\\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0\\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système ci-dessus admet quatre intégrales premières

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv H,\\ H_2 &= m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3,\\ H_3 &= \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2,\\ H_4 &= \left(\left(\frac{m_1+im_2}{2}\right)^2 - (\gamma_1+i\gamma_2)\right)\left(\left(\frac{m_1-im_2}{2}\right)^2 - (\gamma_1-i\gamma_2)\right). \end{aligned} \tag{17}$$

La quatrième intégrale première a été obtenue par Kowalewski [23]. Les intégrales premières H_1 et H_4 sont en involution,

$$\{H_1, H_4\} = \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial x}, J\frac{\partial H_4}{\partial x} \right\rangle = 0,$$

tandis que H_2 et H_3 sont triviaux, $J\frac{\partial H_2}{\partial x} = J\frac{\partial H_3}{\partial x} = 0$. Soit

$$M_c = \bigcap_{k=1}^{4} \{x : H_k(x) = c_k\}, \tag{18}$$

la variété affine définie par l'intersection des quatre constantes du mouvement où $c = (c_1, c_2, c_3 = 1, c_4)$ n'est pas une valeur critique. Dans le théorème ci-dessous, on utilisera avec Kowalewski les notations suivantes : $c_1 = 6h_1$, $c_2 = 2h_2$ et $c_4 = k^2$.

THEOREM 5. *a) Soit*

$$(m_1, m_2, m_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \longmapsto (x_1, x_2, m_3, y_1, y_2, \gamma_3),$$

une transformation biunivoque de la variété affine M_c où

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(m_1 + im_2), \qquad y_1 = x_1^2 - (\gamma_1 + i\gamma_2), \\ x_2 &= \frac{1}{2}(m_1 - im_2), \qquad y_2 = x_2^2 - (\gamma_1 - i\gamma_2). \end{aligned} \tag{19}$$

Alors, le quotient M_c/σ par l'involution

$$\sigma : M_c \longrightarrow M_c \ (x_1, x_2, m_3, y_1, y_2, \gamma_3) \longmapsto (x_1, x_2, -m_3, y_1, y_2, -\gamma_3), \tag{20}$$

est une surface K (de Kummer)

$$K : \begin{cases} y_1 y_2 = k^2, \\ y_1 R(x_2) + y_2 R(x_1) + R_1(x_1, x_2) + k^2(x_1 - x_2)^2 = 0, \end{cases} \tag{21}$$

où

$$R(x) = -x^4 + 6h_1 x^2 - 4h_2 x + 1 - k^2, \tag{22}$$

est un polynôme de degré 4 en x et

$$\begin{aligned} R_1(x_1, x_2) &= -6h_1 x_1^2 x_2^2 + 4h_2 x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\ &\quad - \left(1 - k^2\right)(x_1 + x_2)^2 + 6h_1\left(1 - k^2\right) - 4h_2^2, \end{aligned} \tag{23}$$

un autre polynôme de degré 2 en x_1, x_2. Les points de ramification de M_c(18) sur K sont donnés par les points fixes de l'involution σ(20) et sont en nombre de 8.

b) La surface K est un revêtement double du plan (x_1, x_2)*, ramifié le long de deux courbes elliptiques se coupant exactement aux* 8 *points fixes de l'involution* σ*. Ces courbes donnent lieu à l'équation différentielle d'Euler*

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} \pm \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = 0,$$

à laquelle se trouvent liés les variables de Kowalewski

$$s_1 = \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + 3h_1,$$

$$s_2 = \frac{R(x_1, x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2} + 3h_1,$$

où

$$R(x_1, x_2) \equiv -x_1^2 x_2^2 + 6h_1 x_1 x_2 - 2h_2(x_1 + x_2) + 1 - k^2, \tag{24}$$

et peuvent être vues comme étant des formules d'addition pour la fonction elliptique de Weierstrass.

c) En termes des variables s_1 *et* s_2*, le système (16) devient*

$$\frac{ds_1}{\sqrt{P_5(s_1)}} \pm \frac{ds_2}{\sqrt{P_5(s_2)}} = 0, \qquad \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{P_5(s_1)}} \pm \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{P_5(s_2)}} = dt,$$

où $P_5(s)$ *est un polynôme de cinquième degré et l'intégration s'effectue au moyen des fonctions hyperelliptiques de genre* 2*.*

Démonstration : a) En utilisant le changement de variables (19), les équations (16) et (17) deviennent

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= m_3 x_1 - \gamma_3, & \dot{y}_1 &= 2m_3 y_1, \\ \dot{x}_2 &= -m_3 x_2 + \gamma_3, & \dot{y}_2 &= -2m_3 y_1, \\ \dot{m}_3 &= -x_1^2 + y_1 + x_2^2 - y_2, & \dot{\gamma}_3 &= x_1(x_2^2 - y_2) - x_2(x_1^2 - y_1), \end{aligned} \tag{25}$$

et

$$\begin{aligned} y_1 y_2 &= k^2, \\ m_3^2 &= 6h_1 + y_1 + y_2 - (x_1 + x_2)^2, \\ m_3 \gamma_3 &= 2h_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_1 x_2 (x_1 + x_2), \\ \gamma_3^2 &= 1 - k^2 + x_1^2 y_2 + x_2^2 y_1 - x_1^2 x_2^2. \end{aligned} \tag{26}$$

Notons que

$$\sigma : M_c \longrightarrow M_c \ (x_1, x_2, m_3, y_1, y_2, \gamma_3) \longmapsto (x_1, x_2, -m_3, y_1, y_2, -\gamma_3),$$

est une involution sur M_c et que le quotient M_c/σ est une surface K (de Kummer) (21). Les points de ramification de M_c sur K sont donnés par les points fixes de l'involution σ. Pour déterminer ces points, on substitue $m_3 = \gamma_3 = 0$ dans le système (26) et on obtient

$$y_1y_2 = k^2, \tag{27}$$
$$y_1 + y_2 = (x_1+x_2)^2 - 6h_1, \tag{28}$$
$$x_2y_1 + x_1y_2 = x_1x_2(x_1+x_2) - 2h_2, \tag{29}$$
$$x_2^2y_1 + x_1^2y_2 = x_1^2x_2^2 + k^2 - 1. \tag{30}$$

A partir des équations (28) et (30), on exprime y_1 et y_2 en fonction de x_1 et x_2. Ensuite, on remplace les expressions trouvées dans les équations (27) et (29). On obtient

$$\begin{aligned} R(x_1,x_2) &\equiv -x_1^2x_2^2 + 6h_1x_1x_2 - 2h_2(x_1+x_2) + 1 - k^2 = 0,\\ S(x_1,x_2) &\equiv \left(x_1^4 + 2x_1^3x_2 - 6h_1x_1^2 + 1 - k^2\right)\left(x_2^4 + 2x_1x_2^3 - 6h_1x_2^2 + 1 - k^2\right)\\ &\quad + k^2(x_1^2 - x_2^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Ces polynômes ont un facteur commun non nul si et seulement si le résultant $\text{Rés}(R,S)$ des polynômes R et S est nul. On a

$$\text{Rés}(R,S) = -x_1^{10}\left[x_1^4 + 6h_1\left(k^2-1\right)x_1^2 + \left(k^2-1\right)^2\right]^2.$$

Comme $x_1 = 0$ est à exclure, alors la seule possibilité qui reste pour que $\text{Rés}(R,S) = 0$, ce sont les 8 racines de l'équation :

$$(x_1^4 + 6h_1\left(k^2-1\right)x_1^2 + \left(k^2-1\right)^2)^2 = 0.$$

Autrement dit, R et S s'intersectent aux 4 points doubles suivants :

$$\sqrt{\frac{1-k^2}{2}}\left(\sqrt{(3h_1-1)} \pm \sqrt{(3h_1+1)}\right), \quad -\sqrt{\frac{1-k^2}{2}}\left(\sqrt{3h_1-1} \mp \sqrt{3h_1+1}\right).$$

b) Des équations (21), on déduit

$$y_1 = \frac{-1}{2R(x_2)}\left(R_1(x_1,x_2) + k^2(x_1-x_2)^2 + \Delta\right),$$

$$y_2 = \frac{-1}{2R(x_1)}\left(R_1(x_1,x_2) + k^2(x_1-x_2)^2 - \Delta\right),$$

où

$$\Delta^2 = \left(R_1(x_1,x_2) + k^2(x_1-x_2)^2\right)^2 - 4k^2R(x_1)R(x_2) \equiv P(x_1,x_2).$$

Par conséquent, la surface K est un revêtement double de $\mathbb{C}^2$, ramifié le long de la courbe

$$\mathcal{C} : P(x_1,x_2) = 0.$$

Le polynôme $P(x_1,x_2)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux polynômes en x_1,x_2 que l'on note $P(x_1,x_2,k)$ et $P(x_1,x_2,-k)$. Ces polynômes sont symétriques, de degré 2 en chacune des variables x_1,x_2 et sont explicitement donnés par

$$P(x_1,x_2,k)=a(x_1)x_2^2+2b(x_1)x_2-c(x_1)=a(x_2)x_1^2+2b(x_2)x_1-c(x_2),$$

où

$$\begin{aligned}
a(x) &= -2(k+3h_1)x^2+4h_2x-1,\\
b(x) &= 2h_2x^2+(2k(k+3h_1)-1)x-2h_2k,\\
c(x) &= x^2+4h_2kx+2(k^2-1)(k+3h_1)+4h_2^2,
\end{aligned}$$

tandis que le polynôme $P(x_1,x_2,-k)$ s'obtient de $P(x_1,x_2,k)$ après avoir remplacé k par $-k$. Notons que la courbe

$$\mathcal{C}_1 : P(x_1,x_2,k)=0,$$

est elliptique :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b(x_2)\pm\sqrt{2(k+3h_1)-4h_2^2}\sqrt{R(x_2)}}{a(x_2)},\\
x_2 &= \frac{-b(x_1)\pm\sqrt{2(k+3h_1)-4h_2^2}\sqrt{R(x_1)}}{a(x_1)},
\end{aligned}$$

où le polynôme $R(x)$ est donné par (22). De même, la courbe

$$\mathcal{C}_2 : P(x_1,x_2,-k)=0,$$

est elliptique et on remarque que les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent exactement aux 8 points fixes de l'involution σ. En différentiant l'une des équations symétriques définissant les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, par exemple $P(x_1,x_2,k)=0$, on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}\dot{x}_1+\frac{\partial P}{\partial x_2}\dot{x}_2=0,$$

où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x_1} &= \pm 2\sqrt{2(k+3h_1)-4h_2^2}\sqrt{R(x_2)},\\
\frac{\partial P}{\partial x_2} &= \pm 2\sqrt{2(k+3h_1)-4h_2^2}\sqrt{R(x_1)},
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R(x_1)}}\pm\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R(x_2)}}=0. \tag{31}$$

Puisque $R(x_1)$ et $R(x_2)$ sont deux polynômes du quatrième degré et ont même coefficients, alors l'équation (31) n'est autre que l'équation d'Euler. D'après la théorie générale (voir par exemple [17]), l'intégrale de l'équation (31) peut s'écrire sous différentes formes dont celles-ci :

(i)

$$R_1(x_1,x_2)+2sR(x_1,x_2)-s^2(x_1-x_2)^2=0,$$

où $R_1(x_1,x_2)$ est donné par (23) et peut encore s'écrire sous la forme

$$R_1(x_1,x_2)=\frac{R(x_1)R(x_2)-R^2(x_1,x_2)}{(x_1-x_2)^2},$$

où $R(x)$ est donné par (22) et $R(x_1,x_2)$ par (24).

(ii) ou sous forme irrationnelle

$$\frac{R(x_1,x_2)\mp\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}+3h_1=s, \tag{32}$$

où $s=s_1$ pour le signe - et $s=s_2$ pour le signe +. Le polynôme $R(x)$ étant de degré 4, on peut toujours le ramener à la forme $4x^3-g_2x-g_3$ où g_2 et g_3 sont des constantes. Dès lors, la formule (32) peut être vue comme étant la formule d'addition pour la fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass :

$$2\wp(u+v)=\frac{(\wp(u)+\wp(v))\left(2\wp(u)\wp(v)-\frac{1}{2}g_2\right)-g_3-\wp'(u)\wp'(v)}{(\wp(u)+\wp(v))^2},$$

avec

$$\wp'^2(u)=\left(\frac{d\wp}{du}\right)^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3,$$

et $\wp(u)=x$, $\wp(v)=y$, $\wp'^2(u)=R(x)$, $\wp'^2(v)=R(y)$, $R(x)=4x^3-g_2x-g_3$, $2\wp(u+v)=s$, $g_2=k^2-1+3h_1^2$ et $g_3=h_1(k^2-1-h_1^2)+h_2^2$.

c) En dehors du lieu de branchement de la surface K sur $\mathbb{C}^2$, l'équation d'Euler (31) n'est pas identiquement nulle et peut s'écrire sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R(x_2)}}=\frac{\dot{s}_1}{\sqrt{4s_1^3-g_2s_1-g_3}}\neq 0,\\ \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R(x_1)}}-\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R(x_2)}}=\frac{\dot{s}_2}{\sqrt{4s_2^3-g_2s_2-g_3}}\neq 0.\end{array}\right. \tag{33}$$

Des équations (4.11), on déduit que

$$(m_3x_1-\gamma_3)^2=R(x_1)+(x_1-x_2)^2y_1,$$

$$(m_3x_2-\gamma_3)^2=R(x_2)+(x_1-x_2)^2y_2,$$

$$(m_3x_1-\gamma_3)(m_3x_2-\gamma_3)=R(x_1,x_2),$$

et d'après (25), on trouve

$$\dot{x}_1^2=R(x_1)+(x_1-x_2)^2y_1,\qquad \dot{x}_2^2=R(x_2)+(x_1-x_2)^2y_2.$$

Et compte tenu de (21) et (33), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{s}_1^2}{4s_1^3-g_2s_1-g_3} &= \left(\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R(x_2)}}\right)^2, \\
&= \frac{(x_1-x_2)^4}{R(x_1)R(x_2)}\left[\left(\frac{R(x_1,x_2)-\sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}\right)-k^2\right], \\
&= 4\frac{(s_1-3h_1)^2-k^2}{(s_1-s_2)}.
\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\frac{\dot{s}_2^2}{4s_2^3-g_2s_2-g_3}=\left(\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R(x_1)}}-\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R(x_2)}}\right)^2=4\frac{(s_2-3h_1)^2-k^2}{(s_2-s_1)}.$$

En termes des variables s_1 et s_2, le système (16) devient

$$\frac{\dot{s}_1}{\sqrt{P(s_1)}}+\frac{\dot{s}_2}{\sqrt{P(s_2)}}=0, \qquad \frac{s_1\dot{s}_1}{\sqrt{P(s_1)}}+\frac{s_2\dot{s}_2}{\sqrt{P(s_2)}}=i,$$

où

$$P_5(s)=\left((s-3h_1)^2-k^2\right)\left(4s^3-g_2s-g_3\right),$$

est un polynôme de degré 5. Ces équations sont intégrables par la transformation d'Abel

$$\mathcal{H}\longrightarrow Jac(\mathcal{H})=\mathbb{C}^2/\Lambda,\ p\longmapsto\left(\int_{p_0}^{p}\theta_1,\int_{p_0}^{p}\theta_2\right),$$

où $\mathcal{H}$ est la courbe hyperelliptique de genre 2 associée à l'équation :

$$w^2=\ P_5(s),$$

Λ est le réseau engendré par les vecteurs $n_1+\Omega n_2,(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2$, Ω est la matrice des périodes de $\mathcal{H}$, (θ_1,θ_2) est une base de différentielles holomorphes sur $\mathcal{H}$, c-à-d.,

$$\theta_1=\frac{ds}{\sqrt{P_5(s)}}, \qquad \theta_2=\frac{sds}{\sqrt{P_5(s)}},$$

et p_0 est un point fixé sur $\mathcal{H}$. Le théorème est donc démontré.

Etudions à présent le système de Kowalewski, via la méthode de la courbe spectrale. Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, depuis très longtemps et malgré plusieurs recherches, on ne connaissait pas de forme de Lax pour la toupie de Kowalewski. Par la suite, diffèrentes formes de Lax ont été proposées, dont la plus "naturelle" a été obtenue par Bobenko, Reiman and Semenov-Tian-Shanskii [9, 40].

THEOREM 6. *Le système différentiel de Kowalewski admet une paire de Lax de la forme :*

$$\dot{A}=i[A,B],$$

avec

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -\Gamma_2 & -\frac{1}{2}x_2h & -\gamma_3 \\ \Gamma_1 & 0 & \gamma_3 & \frac{1}{2}x_1h \\ -\frac{1}{2}x_1h & -\gamma_3 & -m_3h & \Gamma_1-h^2 \\ \gamma_3 & \frac{1}{2}x_2h & -\Gamma_2+h^2 & m_3h \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} -m_3 & 0 & \frac{1}{2}x_2 & 0 \\ 0 & m_3 & 0 & -\frac{1}{2}x_1 \\ \frac{1}{2}x_1 & 0 & m_3 & h \\ 0 & -\frac{1}{2}x_2 & -h & m_3 \end{pmatrix}$$

où $x_1 - m_1 + im_2$, $x_2 = m_1 - im_2$, $\Gamma_1 = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\Gamma_2 = \gamma_1 - i\gamma_2$.

La courbe algébrique complexe projective (ou courbe spectrale), d'équation affine

$$\mathcal{C} : P(h,z) = \det(A - zI) = 0,$$

s'écrit explicitement

$$z^4 + (h^4 - c_1h^2 + 2c_3)z^2 + c_4h^4 + (c_2^2 - c - 1c - 3)h^2 + c_3^2 = 0,$$

où les constantes (supposées génériques) c_1, c_2, c_3, c_4 désignent respectivement les constantes H_1, H_2, H_3, H_4 (17) et cette équation décrit une déformation isospectrale. La courbe $\mathcal{C}$ est un revêtement double

$$\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad (z,h) \longmapsto (w,h), \quad w = \frac{2z^2 + h^4 - c_1h^2 + 2c_3}{h},$$

d'une coube hyperelliptique $\mathcal{H}$ définie par

$$\mathcal{H} : w^2 = \left((h^2 - c_1)^2 + 4(c_3 - c_4)\right)h^2 - 4c_2^2.$$

La projection $\pi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(w,h) \longmapsto h$, réalise $\mathcal{H}$ comme étant un revêtement double de $\mathbb{C}$ ramifié en six points. Dès lors, le compactifié $\overline{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ est une courbe hyperelliptique de genre 2. Le revêtement φ admet quatre points de branchement (w,h) sur $\mathcal{H}$ pour lequel $z = 0$, c-à-d., $wh = h^4 - c_1h^2 + 2c_3$. On montre que le genre de $\overline{\mathcal{C}}$ est 5. Par ailleurs, la courbe $\mathcal{H}$ est un revêtement double non ramifié $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{E}$, $(w,h) \longmapsto (\zeta,\xi) = (wh,h^2)$, d'une courbe elliptique $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{E} : \zeta^2 = \left((\xi - c_1)^2 + 4(c_3 - c_4)\right)\xi^2 - 4c_2\xi.$$

En outre, la courbe $\mathcal{C}$ peut-être vue comme un revêtement double non ramifié $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$, $(z,h) \longmapsto (z,\xi) = (z,h^2)$, d'une nouvelle courbe $\mathcal{S}$, définie par l'équation

$$\mathcal{S} : z^4 + (h^4 - c_1h^2 + 2c_3)z^2 + c_4h^4 + (c_2^2 - c - 1c - 3)h^2 + c_3^2 = 0.$$

La courbe $\mathcal{S}$ elle-même est un revêtement double de la courbe elliptique $\mathcal{E}$,

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (z,\xi) \longmapsto (\zeta,\xi) = (2z^2 + \xi^2 - c_1\xi + 2c_3, \xi),$$

et le genre de $\overline{\mathcal{S}}$ est égal à 3. Enfin, on vérifie aisément que la linéarisation du flot s'effectue sur la variété jacobienne de la courbe $\mathcal{C}$.

Nous avons vu au début de cette section que les équations décrivant ce problème s'écrivent sous la forme d'un champ de vecteurs hamiltonien :

$$\dot{x} = J\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x = (m_1, m_2, m_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^{\intercal}. \tag{34}$$

Ce système admet quatre intégrales premières H_1, H_2, H_3, H_4 (17). Le second champ de vecteurs

$$\dot{x} = J\frac{\partial H_4}{\partial x}, \quad x = (m_1, m_2, m_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^{\intercal}, \tag{35}$$

est quartique. En étudiant l'intégrabilité algébrique du système hamiltonien de Kowalewski, on obtient les résultats [26] suivants :

THEOREM 7. *a) Le système (2) dans le cas de Kowalewski, admet deux familles de solutions en séries de Laurent méromorphes*

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} M^{(k)} t^{k-1}, \quad \Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^{(k)} t^{k-2},$$

dépendant de cinq paramètres libres tels que : les coefficients $M^{(0)}$ et $\Gamma^{(0)}$ satisfont au système non-linéaire

$$\begin{aligned} &M^{(0)} + \left[M^{(0)}, \Lambda M^{(0)}\right] + \left[\Gamma^{(0)}, L\right] = 0, \\ &2\Gamma^{(0)} + \left[\Gamma^{(0)}, \Lambda M^{(0)}\right] = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

et dépendent d'une variable libre α. Tandis que $M^{(k)}$ et $\Gamma^{(k)}$ satisfont aux systèmes linéaires

$$(\mathcal{M} - kI)\begin{pmatrix} M^{(k)} \\ \Gamma^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & si \quad k = 1 \\ \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{k-1}\left(M^{(i)}, \Lambda M^{(k-i)}\right) \\ -\sum_{i=1}^{k-1}\left(\Gamma^{(i)}, \Lambda M^{(k-i)}\right) \end{bmatrix} & si \quad k \geq 2 \end{cases}$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice jacobienne de (36). Ces systèmes fournissent une variable libre à chacun des niveaux $k = 1, 2, 3$ et 4. Explicitement, on a

$(*)$ $1^{ère}$ *famille de solutions en séries de Laurent méromorphes :*

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \frac{\alpha}{t} + i\left(\alpha^2 - 2\right)\beta + \circ(t), \qquad \gamma_1(t) = \frac{1}{2t^2} + \circ(t), \\ m_2(t) &= \frac{i\alpha}{t} - \alpha^2\beta + \circ(t), \qquad \gamma_2(t) = \frac{i}{2t^2} + \circ(t), \\ m_3(t) &= \frac{i}{t} + \alpha\beta + \circ(t), \qquad \gamma_3(t) = \frac{\beta}{t} + \circ(t). \end{aligned}$$

$(**)$ $2^{ème}$ *famille de solutions en séries de Laurent méromorphes :*

$$\begin{aligned}
m_1(t) &= \frac{\alpha}{t} - i\left(\alpha^2-2\right)\beta + \circ(t), \qquad \gamma_1(t) = \frac{1}{2t^2} + \circ(t),\\
m_2(t) &= -\frac{i\alpha}{t} - \alpha^2\beta + \circ(t), \qquad \gamma_2(t) = -\frac{i}{2t^2} + \circ(t),\\
m_3(t) &= -\frac{i}{t} + \alpha\beta + \circ(t), \qquad \gamma_3(t) = \frac{\beta}{t} + \circ(t).
\end{aligned}$$

Les diviseurs des pôles des fonctions M et Γ sont deux surfaces de Riemann

$$\mathcal{D}_\varepsilon : \beta^4\left(\alpha^2-1\right)^2 - \left(c_1\beta^2 - 2\varepsilon c_2\beta - 1\right)\left(\alpha^2-1\right) + c_4 = 0,\ \varepsilon^2 = -1,$$

irréductibles isomorphes et chacune de genre 3*. Ce sont deux revêtements*

$$\mathcal{D}_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{D}^0_\varepsilon, \quad (\alpha,u,\beta) \longmapsto (u,\beta), \tag{37}$$

doubles ramifiés en quatre points de courbes elliptiques :

$$\mathcal{D}^0_\varepsilon : u^2 = \left(c_1\beta^2 - 2\varepsilon c_2\beta - 1\right)^2 - 4c_4\beta^4. \tag{38}$$

b) Posons $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\varepsilon=i} + \mathcal{D}_{\varepsilon=-i}$. Alors l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ des fonctions ayant au plus un pôle simple est engendré par les huit fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
&f_0 = 1,\ f_1 = m_1,\ f_2 = m_2,\ f_3 = m_3,\ f_4 = \gamma_3,\ f_5 = f_1^2 + f_2^2,\\
&f_6 = 4f_1f_4 - f_3f_5,\ f_7 = (f_2\gamma_1 - f_1\gamma_2)f_3 + 2f_4\gamma_2.
\end{aligned} \tag{39}$$

En outre, l'application $\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{P}^7(\mathbb{C})$, définie par

$$p = (\alpha,u,\beta) \longmapsto \lim_{t\to 0} t(1, f_1(p), \dots, f_7(p)) = \left(0, f_1^{(0)}(p), \dots, f_7^{(0)}(p)\right),$$

plonge $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ de telle façon que $\mathcal{D}_{\varepsilon=i}$ intersecte $\mathcal{D}_{\varepsilon=-i}$ transversalement en quatre points à l'infini $\left(\alpha = \pm 1,\ u = \pm\beta^2\sqrt{c_1^2 - 4c_4},\ \beta = \infty\right)$ et que le genre géométrique de $\mathcal{D}$ est 9*.*

c) Les orbites du champ de vecteurs (34) passant à travers $\mathcal{D}$ forment une surface lisse Σ tout le long de $\mathcal{D}$ tel que : $\Sigma\backslash\mathcal{D} \subset M_c$. En outre, la variété $\widetilde{M_c} = M_c \cup \Sigma$ est lisse, compacte et connexe.

d) Le diviseur $2\mathcal{D}$ est projectivement normal et possède un plongement lisse dans $\mathbb{P}^{17}(\mathbb{C})$. En particulier, les séries solutions convergent partout.

e) Les champs de vecteurs (34) et (35) se prolongent de façon holomorphe et demeurent indépendants sur la variété $\widetilde{M_c}$. La variété $\widetilde{M_c}$ est une surface abélienne sur laquelle les flots hamiltoniens (34) et (35) se linéarisent.

f) Il existe sur la surface abélienne $\widetilde{M_c}$ deux différentielles holomorphes dt_1 et dt_2 telles que :

$$dt_{1|_{\mathcal{D}_\varepsilon}} = \omega_1 = \frac{k_1\left(\alpha^2-1\right)\beta^2 d\beta}{\alpha u}, \qquad dt_{2|_{\mathcal{D}_\varepsilon}} = \omega_2 = \frac{k_2 d\beta}{\alpha u},$$

où $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ et ω_1, ω_2 sont des différentielles holomorphes sur $\mathcal{D}_\varepsilon$. Le champ de vecteurs (34)(resp. (35)) est régulier le long du diviseur $\mathcal{D}$, transversal en tout point $\beta \neq 0$ *(resp.* $\beta \neq \infty$*) et doublement tangent en* $\beta = 0$ *(resp.* $\beta = \infty$*). L'espace des différentielles holomorphes sur le diviseur $\mathcal{D}$ est*

$$\left\{ f_1^{(0)}\omega_2 \ f_2^{(0)}\omega_2, ..., f_7^{(0)}\omega_2 \right\} \oplus \{\omega_1, \omega_2\},$$

où $f_1^{(0)}, \ f_2^{(0)}, ... \ f_7^{(0)}$ sont les premiers coefficients des fonctions $f_1, f_2, ..., f_7 \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ (39) et le plongement de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ est à deux différentielles holomorphes près le plongement canonique

$$p = (\alpha, u, \beta) \in \mathcal{D} \longmapsto \left\{ \omega_2, f_1^{(0)}\omega_2, f_2^{(0)}\omega_2, ..., f_7^{(0)}\omega_2 \right\} \in \mathbb{P}^7(\mathbb{C}).$$

g) La surface abélienne $\widetilde{M_c}$ est caractérisée comme étant la duale de la variété Prym $\left(\mathcal{D}_\varepsilon / \mathcal{D}_\varepsilon^0\right)$ du revêtement double (37).

5. Cas particuliers spéciaux

Nous avons évoqué dans l'introduction de ce travail que toute intégrale algébrique des équations (1) est une combinaison des intégrales classiques sauf dans les cas d'Euler, de Lagrange et de Kowalewski et qu'il ne pouvait donc pas exister d'intégrale première algébrique autre que celles mises en évidence dans ces trois cas cités.

Par ailleurs, on connait quelques cas particuliers spéciaux :

- Le cas de Hesse-Appel'rot [4, 18] :

$$l_2 = 0, \quad l_1\sqrt{I_1(I_2 - I_3)} + l_3\sqrt{I_3(I_1 - I_2)} = 0.$$

Dans ce cas, l'équation $l_1 m_1 + l_3 m_3 = 0$ représente une intégrale première particulière obtenue par Hess et l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions elliptiques.

- Le cas de Goryachev-Chaplygin [14, 11] : $I_1 = I_2 = 4I_3$, $l_2 = l_3 = 0$. Dans ce cas le système (1.1) admet l'intégrale première

$$\lambda_3 m_3(\lambda_1^2 + m_1^2 + \lambda_2^2 m_2^2) + \mu g l_1 \lambda_1 \lambda_3 m_1 \gamma_3 = g, \quad \lambda_i = \frac{1}{I_i}, i = 1, 2, 3$$

et l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions hyperelliptiques de genre 2.

- Le cas de Bobylev-Steklov [41] : $I_2 = 2I_1$, $l_1 = l_3 = 0$. L'intégration des équations dans ce cas est facile et s'effectue à l'aide de fonctions elliptiques.

Nous allons ci-dessous étudier la toupie de Goryachev-Chaplygin tout en sachant que pour les autres cas, l'intégration ne pose pas de problèmes. Une telle toupie est un corps solide qui tourne autour d'un point fixe. Elle correspond au cas mentionnée ci-dessus, $I_1 = I_2 = 4I_3$, $l_2 = l_3 = 0$. Les équations différentielles (1) ou (2) s'écrivent explicitement dans ce cas sous la forme (sans restreindre la généralité, on a donné des valeurs aux constantes pour ne pas alourdir les notations),

$$
\begin{array}{lrcllr}
(40) & \dot{m}_1 & = & 3m_2m_3, & & \dot{\gamma}_1 = 4m_3\gamma_2 - m_2\gamma_3, \\
& \dot{m}_2 & = & -3m_1m_3 - 4\gamma_3, & & \dot{\gamma}_2 = m_1\gamma_3 - 4m_3\gamma_1, \\
& \dot{m}_3 & = & 4\gamma_2, & & \dot{\gamma}_3 = m_2\gamma_1 - m_1\gamma_2.
\end{array}
$$

Nous allons étudier l'intégrabilité de ce système hamiltonien à l'aide de la méthode de la courbe spectrale. Ce système admet les quatre invariants suivants :

$$
\begin{aligned}
H_1 &= m_1^2 + m_2^2 + 4m_3^2 - 8\gamma_1 = 6b_1, \\
H_2 &= (m_1^2 + m_2^2)m_3 + 4m_1\gamma_3 = 2b_2, \\
H_3 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = b_3, \\
H_4 &= m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3 = 0,
\end{aligned}
$$

où b_1, b_2, b_3 sont des constantes génériques. Le système (40) est intégrable au sens de Liouville, H_1 (l'hamiltonien) et H_4 sont en involution tandis que H_2, H_3 sont des invariants de Casimir. Le système différentiel (40) admet une paire de Lax de la forme

$$
\dot{A} = [A, B], \tag{41}
$$

avec

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & \frac{1}{2}x_1h \\ -\gamma_3 & -m_3h & \Gamma_1 - h^2 \\ \frac{1}{2}x_2h & -\Gamma_2 + h^2 & m_3h \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3im_3 & 0 & -ix_1 \\ 0 & 2im_3 & 2ih \\ -ix_2 & -2ih & -2im_3 \end{pmatrix}
$$

où $x_1 = m_1 + im_2$, $x_2 = m_1 - im_2$, $\Gamma_1 = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\Gamma_1 = \gamma_1 - i\gamma_2$. La transformation $(t, m_1, m_2, m_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \longmapsto (-t, -m_1, -m_2, -m_3, -\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3)$, montre que les systèmes (40) et (41) sont équivalents. La courbe spectrale, d'équation affine $\mathcal{C} : P(h,z) = \det(A - zI) = 0$, s'écrit explicitement

$$
\mathcal{C} : w^3 + (h^4 - \frac{3}{2}b_1h^2 + b_3)w + \frac{b_2}{2}h^3 = 0,
$$

et on vérifie aisément que le flot se linéarise sur la jacobienne de cette courbe.

Le système de Goryachev-Chaplygin admet deux familles de solutions de Laurent dépendant de quatre paramètres libres :

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \frac{u}{t^{3/2}} - \frac{3uv}{t^{1/2}} + \frac{3\varepsilon v + 3b_1u^2 - 15u^2v^2}{2u}t^{1/2} + o(t^{3/2}),\\
m_2 &= -\frac{\varepsilon u}{t^{3/2}} - \frac{3uv}{t^{1/2}} - \frac{\varepsilon(3b_1u^2 - 15u^2v^2) + u}{2u}t^{1/2} + o(t^{3/2}),\\
m_3 &= -\frac{\varepsilon}{2t} + v + \varepsilon(b_1 - 2v^2)t - \frac{16b_3u^4 + 5v^2}{4\varepsilon u^2}t^2 + \cdots,\\
\gamma_1 &= -\frac{1}{8t^2} - \frac{b_1 - 2v^2}{4} - \frac{16b_3u^4 - 3v^2}{8u^2}t + \cdots,\\
\gamma_2 &= \frac{\varepsilon}{8t^2} + \frac{\varepsilon(b_1 - 2v^2)}{4} - \frac{16b_3u^4 + 5v^2}{8\varepsilon u^2}t + \cdots,\\
\gamma_3 &= -\frac{v}{2ut^{1/2}} + \frac{3v^2}{2\varepsilon u}t^{1/2} - \frac{\varepsilon(b_1v - 11v^3) + 16b_3u^2}{4\varepsilon u}t^{3/2} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

où $\varepsilon = \pm i$. Soit A la variété invariante

$$A = \{x : H_1(x) = 6b_1, H_2(x) = 2b_2, H_3(x) = b_3, H_4(x) = 0\}, \tag{43}$$

définie par l'intersection des constantes du mouvement où b_1, b_2, b_3 sont des constantes génériques. En substituant ces développements dans les équations définissant la varété A, on obtient une courbe $\mathcal{C}$ de genre 4 :

$$\mathcal{C} : 16b_3u^4 + \varepsilon u^2(b_2 + 6b_1v - 16v^3) - v^2 = 0.$$

Les solutions de Laurent (42) sont donc paramétrées par deux copies $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_{-i}$ d'une même courbe $\mathcal{C}$ de genre 4.

Le résultat suivant a été obtenu par Piovan [37] : la surface invariante A(43) se complète en un revêtement double cyclique, noté $\overline{A}$, de la variété jacobienne d'une courbe de genre 2 ramifié le long d'un diviseur $\mathcal{H}_i + \mathcal{H}_{-i}$ où $\mathcal{H}_{\pm i}$ est birationellement équivalent à la courbe hyperelliptique $\mathcal{H}$ de genre 2 définie par

$$\zeta^2 = (2\alpha^3 - 3c_1\alpha + c_2)^2 - 4(4c_3\alpha^2 + 4c_4\alpha + c_5),$$

où c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 désignent des constantes génériques liées aux intègrales premières d'un système intégrable de sept variables obtenu par C. Bechlivanidis and P. van Moerbeke [7]. En outre, $\overline{A}$ est une surface lisse sauf au point double (un tacnode) d'intersection des courbes $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}_{-i}$. L'équation analytique locale autour de cette singularité du type A_3 est $x^2 + y^2 + z^4 = 0$ où x, y, z sont des coordonnées locales appropriées. La résolution $\widetilde{A}$ de $\overline{A}$ est une surface de type général ayant les invariants suivants : charactéristique d'Euler de $\widetilde{A} = 1$ et genre géométrique de $\widetilde{A} = 2$.

Remerciements : Je remercie le referee pour ses remarques et suggestions constructives.

Références

[1] ADLER M. AND VAN MOERBEKE P., *The Kowalewski and Hénon-Heiles motions as Manakov geodesic flows on $SO(4)$ - a two-dimensional family of Lax pairs*, Commun. Math. Phys. **113** (1988) 659-700.

[2] ADLER M. AND VAN MOERBEKE P., *The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis*, Invent. Math. **97** (1989) 3-51.

[3] ADLER M., VAN MOERBEKE P. AND VANHAECKE P., *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, A series of modern surveys in mathematics, Volume 47, Springer-Verlag, 2004.

[4] APPEL'ROT G., *In connection with the memoir by S. Kovalevskaya : Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, In Mat. Sb, Kruzhka Lyub. Mat Nauk, **16**(3) (1892) 483-507.

[5] ARNOLD V.I., *Ordinary differential equations*, Springer-Textbook, 3nd edition, 1992.

[6] AUDIN M., *Spinning tops. A course on integrable systems*, Cambridge studies in Advanced Mathematics, 51. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[7] BUYS M., *The Kowalewski top*, Courant Institute, PhD thesis 1982.

[8] BECHLIVANIDIS C. AND VAN MOERBEKE P., *The Goryachev-Chaplygin top and the Toda lattice*, Comm. Math. Phys. **110**(2) (1987) 317-324.

[9] BELOKOLOS A.I., BOBENKO V.Z., ENOL'SKII V.Z., ITS A.R. AND MATVEEV V.B., *Algebro-Geometric approach to nonlinear integrable equations*, Springer-Verlag, 1994.

[10] BOBENKO A. I., REYMAN A. G. AND SEMENOV-TIAN-SHANSKY M. A., *The Kowalewski top 99 years later : a Lax pair, generalizations and explicit solutions*, Comm. Math. Phys. **122**(2) (1989) 321-354.

[11] CHAPLYGIN S. A., *Collected Works* Vol. 1. Gostekhizdat. Moscow, 1948.

[12] EULER L., *Mémoires Acad. Sc*, Berlin, 1758. *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, Rostock, 1765.

[13] GOLUBEV V.V., *Lektsii po integrirovaniyu uravnenii dvizheniya tyazhelogo tverdogo tela okolo nepodvizhnoi tochki (Lectures on the integration of equations of motion of a heavy solid about a fixed point)*, Gostekhizdat, Moscow, 1953.

[14] GORYACHEV D., *On the motion of a rigid material body about a fixed point in the case A=B=4C*, Mat. Sb., **21**(3) (1900).

[15] GRIFFITHS P.A. AND HARRIS, J., *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience, New York, 1978.

[16] HAINE L. AND HOROZOV E., *A Lax pair for the Kowalevski's top*, Physica, **29** D (1987) 173-180.

[17] HALPHEN G-H., *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Gauthier-Villars 1888.

[18] HESS W., *Uber die Euler hen Bewegungsgleichungen und tlber eine neue par dare L(isung des Problems der Bewegung eines starren Korpers un einen festen punkt*, Math. Ann., **37**(2) (1890).

[19] HOLMES P. J. AND MARSDEN J. E., *Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie Groups*, Indiana Univ. Math. J., **32** (1983) 273-310.

[20] HUSSON E., *Recherche des intégrales algébriques dans le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe*, Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse, **8**, Ser. 2, t. VIII, (1906) 73-152.

[21] JACOBI C.G.J., *Sur la rotation d'un corps*, J. reine angew. Math., **39** (1850) 293-350.

[22] KÖTTER F., *Sur le cas traité par Mme Kowalevski de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math., Vol. XVIII, No 1-2 (1893).

[23] KOWALEWSKI S., *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math., **12** (1889) 177-232.

[24] KOWALEWSKI S., *Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math., **14** (1889) 81-93.

[25] LAGRANGE J.L., *Mécanique analytique*, Première édition chez la veuve Desaint, Paris 1808. Réimprimé par Jacques Gabay, Paris, 1989. Deuxième édition par Mme veuve Courcier, Paris, 1811. Réimprimé par Albert Blanchard, Paris. Quatrième édition (la plus complète) en deux volumes, dans OEuvres de Lagrange, volumes XI et XII, Gauthier-Villars, Paris, 1888.

[26] LESFARI A., *Abelian surfaces and Kowalewski's top*, Ann. Scient. École Norm. Sup., Paris, sér. 4 **21** (1988) 193-223.

[27] LESFARI A., *Integrables hamiltonian systems and the isospectral deformation method*, Int. J. of Appl. Math. and Mech., **3**(4) (2007) 35-55.

[28] LESFARI A., *Integrable systems and complex geometry*, Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol.**30**, No.4, (2009) 292-326.

[29] LESFARI A., *Théorie spectrale et problèmes non-linéaires*, Surv. Math. Appl., **5** (2010) 151-190.

[30] LESFARI A., *Algebraic integrability : the Adler-van Moerbeke approach*, Regul. Chaotic Dyn., Vol. **16**, Nos.3-4 (2011) 187-209.

[31] LESFARI A., *Introduction à la géométrie algébrique complexe*, Hermann, Paris 2015.

[32] LIOUVILLE R., *Sur le monvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points*, Acta Math., tome XX, (1896) 239-284.

[33] LYAPUNOV A., *On a property of the differential equations of the problem of motion of a rigid body having a fixed point*, Soobshceniya Kharkovskogo matematicheskog obshchestva (Transactions of the Kharkov Mathematical Society), Vol. IV (1894).

[34] MAGRI F., *The Kowalevski's top and the method of Syzygies*, Ann. Inst. Fourier, **55**, no.6, ((2005) 2147-2159.

[35] MANAKOV S.V., *Remarks on the integrals of the Euler equations of the n-dimensional heavy top*, Func. Anal. Appl., **10**, (1976) 93-94.

[36] PAINLEVÉ P., *Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme*, Acta Math., **25**, No.1, (1902) 1-85.

[37] PIOVAN L., *Cyclic coverings of abelian varieties and the Goryachev-Chaplygin top*, Math. Ann., **294**, (1992) 755-764.

[38] POINCARÉ H., *Leçons de mécanique céleste*, 3 tomes, Gauthier-Villars, (1905-1910), réédité par Jacques Gabay, Paris 2003.

[39] POINSOT L., *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, Journal de Liouville, Volume 16, 1851.

[40] REYMAN A. G. AND SEMENOV-TIAN-SHANSKY M.A., *Lax representation with a spectral parameter for the Kowalewski top and its generalizations*, Lett. Math. Phys., **14** (1987) 55-61.

[41] STEKLOV V. A. : *Über die Bewegung eines festen Körper in einer Flüssigkeit*, Math. Ann., **42** (1893) 273-374.

[42] VANHAECKE P., *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, Lecture Notes in Math., 1638, Springer-Verlag, 2001.

[43] WHITTAKER E. T., *Analytical Dynamics* Cambridge Univ. Press, London and New York, 1904. Reprinted by Dover, New York, 1944

[44] ZIGLIN S. L., *Splitting of separatrices, branching of solutions and nonexistence of an integral in the dynamics of a solid body*, Trans. Moscow Math. Soc., **41** (1980), Transl. **1** (1982) 283-298.

[45] ZIGLIN S. L., *Branching of solutions and the nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics I*, Functional Anal. Appl., **16** (1982) 181-189. *II*, **17** (1983) 6-17.

AMS Subject Classification : 70H06, 14H70, 14Q05, 14H40, 70E17.

A. LESFARI,
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Chouaïb Doukkali, B.P. 20, 24000 El Jadida, Maroc
e-mail : Lesfariahmed@yahoo.fr

Lavoro pervenuto in redazione il MM.GG.AAAA.