Avant-propos

Cet ouvrage est destiné aux étudiants de licence (L2, L3) de mathématiques ainsi qu'aux étudiants de master (M1, M2) et même au-delà. Il a pour but de présenter plusieurs aspects importants concernant les variétés complexes. Les méthodes sont analytiques, topologiques, algébriques et géométriques. Les sujets traités dans ce livre sont des objets d'une extraordinaire richesse qui apparaissent dans de nombreux champs des mathématiques : géométrie et topologie différentielle, théorie des nombres, topologie algébrique, géométrie algébrique, systèmes intégrables, etc., et sont la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine. Nous allons étudier ces variétés avec une approche de géométrie complexe.

Le but du chapitre 1 est de donner quelques définitions et propriétés de base de géométrie liées aux concepts de faisceaux utilisées ou évoquées dans les chapitres suivants.

Dans le chapitre 2, on étudie les courbes algébriques (projectives lisses) ou surfaces de Riemann compactes X. Ce sont des variétés analytiques de dimension 1 complexe (2 réelle) munies d'atlas dont les changements de cartes sont holomorphes. On montre que X est homéomorphe à un tore à g trous (ou sphère à g anses) pour un certain entier $g \geq 0$. Le nombre g est le genre de X. Celui-ci est la dimension de l'espace vectoriel complexe $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ (1^{er}groupe de cohomologie à coefficients dans le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes sur X). On montre aussi que c'est le nombre des intégrales abéliennes de $1^{ère}$espèce attachées à la courbe X, linéairement indépendants. Un cas particulier important est représenté par les courbes hyperelliptiques de genre g ainsi que les courbes elliptiques ($g = 1$). Nous construisons le plus intuitivement possible la surface de Riemann dans le cas elliptique et hyperelliptique. On étudie ensuite les différentielles abéliennes, les relations bilinéaires de Riemann et la matrice des périodes. Après avoir rappelé les définitions et propriétés des diviseurs et des fibrés en droites nécessaires à la compréhension des résultats principaux de ce chapitre, on aborde le théorème de Riemann-Roch. Ce dernier est un résultat central de la théorie des surfaces de Riemann compactes. Il permet, entre autres, de définir le genre d'une surface de Riemann qui est un invariant fondamental. Il s'agit d'un théorème d'existence efficace qui permet, entre autres, de déterminer le nombre de fonctions méromorphes linéairement indépendantes ayant certaines restrictions sur leurs pôles. A cause de l'importance de ce théorème, nous donnons une preuve détaillée constructive bien qu'un peu technique. Nous mentionnons quelques conséquences de ce théorème et nous donnons également une preuve analytique de l'importante formule de Riemann-Hurwitz. Elle exprime le genre d'une surface de Riemann à l'aide du nombre de ses points de ramifications et du nombre de ses feuillets. Nous montrons que cette formule fournit un moyen efficace pour déterminer le genre d'une surface de Riemann donnée. En outre plusieurs exemples intéressants seront étudiés. Deux autres théorèmes, celui d'Abel et celui de Jacobi, de nature transcendante et considérés comme importants de la théorie des surfaces de Riemann compactes sont étudiés en détail. Le théorème d'Abel classifie les diviseurs par leurs images dans la variété jacobienne (tore complexe algébrique) tandis que le problème d'inversion de Jacobi concerne l'existence d'un diviseur qui soit l'image inverse d'un point arbitraire sur la variété jacobienne.

L'objectif du chapitre 3 est d'étudier les fonctions thêta sur les surfaces de Riemann X de genre g. On commence par rappeler les définitions et propriétés des fonctions thêta nécessaires à la compréhension des résultats de cette partie. Ensuite, on montre comment exprimer les fonctions méromorphes en termes de fonctions thêta sur le tore complexe de dimension un, c.-à-d., sur les courbes elliptiques. En outre, on aborde l'étude des fonctions méromorphes et leurs relations avec les fonctions thêta dans le cas des surfaces de Riemann de genre $g > 1$. Parallélement à ce qui a été fait dans la section 2.9, on étudie le problème d'inversion de Jacobi à l'aide des fonctions thêta. Les zéros d'une fonction thêta sur $\mathbb{C}^g$ forment une sous-variété de $\mathrm{Jac}(X)$ de dimension $g-1$ appelée diviseur thêta. Elle est invariante par un nombre fini de translations et peut être singulière. Lorsqu'on plonge la surface de Riemann X dans sa variété jacobienne $\mathrm{Jac}(X)$ via l'application d'Abel, alors soit son image est entièrement inclue dans le diviseur thêta, soit elle la rencontre en exactement g points. Certaines fonctions singulières sur la surface de Riemann X de genre g possèdant g pôles et des singularités essentielles, jouent un rôle important dans l'étude des systèmes intégrables, notamment les équations de Korteweg-de Vries, Kadomtsev-Petviashvili, etc., dont les solutions exactes sont des solitons. On exprime ces fonctions connues sous le nom de fonctions de Baker-Akhiezer en termes de fonctions thêta et en même temps on prouve leur existence.

Le chapitre 4 concerne l'étude des diviseurs et fibrés en droites sur les variétés complexes. On s'intéresse aux sections de fibrés en droites, aux formules d'adjonction, au résidu de Poincaré, à la dualité de Kodaira-Serre et la relation avec le théorème de Riemann-Roch. On démontre les théorèmes d'annulation de Kodaira-Nakano, de Lefschetz sur les sections hyperplanes et de

Lefschetz pour les classes de type (1,1). Une attention particulière est consacrée à l'étude du théorème de plongement de Kodaira ainsi qu'à d'autres versions de ce théorème. Celui-ci affirme qu'une variété analytique complexe compacte est projective algébrique si et seulement si c'est une variété de Hodge, autrement dit si et seulement si elle admet une 2-forme différentielle de type (1,1) fermée, entière et positive, ou encore si et seulement si elle admet un fibré en droites holomorphe dont la première classe de Chern est positive. On expliquera la liaison avec la théorie des variétés kählériennes. Une variété kählérienne est une variété complexe munie d'une métrique hermitienne dont la partie imaginaire, qui est une 2-forme de type (1,1) relativement à la structure complexe, est fermée. Une telle métrique s'appelle métrique kählérienne et la forme est dite forme de Kähler. Dans le langage des variétés kählériennes, le théorème de plongement de Kodaira signifie qu'une variété complexe compacte est projective si et seulement si elle admet une forme de Kähler dont la classe de cohomologie est entière. On discutera un autre résultat intéressant concernant les variétés kählériennes obtenu par Moishezon. Une variété de Moishezon est une variété analytique complexe compacte qui devient projective après un nombre fini d'éclatements de centres lisses et possède le maximum de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. Plus précisément, une variété kählérienne compacte de dimension n est projective si et seulement si elle possède n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. On évoquera aussi le théorème de Chow qui dit que toute sous-variété analytique fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est une variété projective. Il affirme qu'une telle variété est définie par des équations polynomiales homogènes et on peut donc l'étudier par des méthodes soit analytiques, soit algébriques.

On aborde dans le chapitre 5, l'étude des tores complexes et les variétés abéliennes complexes. Une variété abélienne est un tore complexe qui possède un plongement holomorphe dans un espace projectif ou de façon équivalente d'après le théorème de Chow, un tore complexe algébrique c'est-à-dire définie par l'annulation simultanée d'un nombre fini de polynômes homogènes. On commence par donner une caractérisation de ces variétés en termes de conditions de Riemann. Après une étude des fibrés en droites sur les variétés abéliennes, on donne une preuve directe et détaillée du critère de projectivité des tores complexes à l'aide des fonctions thêta. C'est l'objet du théorème de Lefschetz qui affirme que si un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur une variété abélienne T^n est positif, alors $H^0(T^n, \mathcal{O}_{T^n}(\mathcal{L}^k))$ n'a pas de points de base pour $k \geq 2$ et fournit un plongement projectif pour $k \geq 3$. On introduit le théorème de Ramanan concernant les critères d'amplitude d'un diviseur sur une surface abélienne irréductible et on donne des formules explicites qui permettent de déterminer le nombre de sections paires et impaires, très utiles pour caractériser les surfaces abéliennes. On donne aussi des formules explicites pour les cas correspondants aux courbes elliptiques et surfaces abéliennes ainsi que le genre arithmétique et géométrique. De même, plusieurs notions et propriétés concernant les variétés abéliennes duales, isogénie, polarisation et plongement projectivement normal avec des critères de Koizumi, Mumford et autres seront expliquées.

Le chapitre 6 sera consacré à l'étude explicite d'un aspect important de la géométrie complexe à travers la théorie des variétés de Prym. Celles-ci apparaissent comme sous-variétés de certaines variétés jacobiennes et rentrent dans une classe générale de variétés abéliennes. La théorie des variétés abéliennes complexes joue un rôle crucial dans plusieurs recherches actuelles, leur géométrie se révéle très riche et un des intérêts d'avoir une description explicite des variétés de Prym est la possibilité de les appliquer à la théorie moderne des systèmes dynamiques algébriquement intégrables. On considère deux surfaces de Riemann compactes non singulières $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ et une involution σ sur $\mathcal{C}$ échangeant les feuillets d'un revêtement double étale $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_0$ tel que celui-ci identifie $\mathcal{C}_0$ au quotient $\mathcal{C}/\sigma$. L'involution σ induit une involution sur la variété jacobienne $Jac\,(\mathcal{C})$ et on montre que modulo un sous-groupe discret, la variété $Jac(\mathcal{C})$ se décompose en deux parties : une partie paire qui est $Jac\,(\mathcal{C}_0)$ et une partie impaire qui n'est autre que la variété de Prym $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$. Nous déterminons explicitement les matrices des périodes associées à $Jac\,(\mathcal{C}_0)$, $Jac\,(\mathcal{C})$, $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ ainsi qu'au dual $Prym^{\vee}(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$. Nous verrons que les variétés abéliennes complexes et en particulier les variétés de Prym jouent un rôle crucial dans l'études des équations différentielles non-linéaires algébriquement intégrables. Comme application, on étudiera le système différentiel de Hénon-Heiles, la toupie de Kowalewski et le flot géodésique sur le groupe $SO(4)$.

On étudie dans le chapitre 7 quelques notions sur l'espace des modules des surfaces de Riemann et le problème de Schottky. Soit $\mathcal{M}_g$ l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre g ou ce qui revient au même l'ensemble des classes d'isomorphismes de surfaces de Riemann compactes de genre g. On montre que la sphère est la seule surface de Riemann de genre 0. Par contre pour $g \geq 1$, l'espace $\mathcal{M}_g$ est indénombrable et sa dimension est égale à $3g-3$ pour $g \geq 2$. Autrement dit, ces surfaces dépendent de $3g-3$ paramètres complexes pour $g \geq 2$ et d'un seul paramètre pour $g = 1$. Pour $g \geq 4$, il existe des relations non triviales satisfaites par les matrices des périodes de surfaces de Riemann. Le problème de Schottky consiste à expliciter ces relations. Grosso modo, il s'agit de trouver des critères pour qu'une matrice des périodes appartenant au demi-espace de Siegel soit la matrice des périodes d'une surface de Riemann. Géométriquement, le problème de Schottky consiste à caractériser les jacobiennes parmi toutes les variétés abéliennes principalement polarisées.

Le chapitre 8, présente sous formes d'appendices les propriétés des formes différentielles ainsi que des fonctions et intégrales elliptiques. On étudie la fonction $\wp$ de Weierstrass ; c'est une fonction elliptique d'ordre deux qui a un pôle double à l'origine en tout point du parallélogramme fondamental. Ensuite on introduit les deux autres fonctions de Weierstrass : la fonction ζ et la fonction σ. Contrairement à la fonction $\wp$, la fonction ζ est une fonction méromorphe avec un pôle simple dans le parallélogramme fondamental tandis que la fonction ζ est une fonction holomorphe partout. Les fonctions de Weierstrass interviennent souvent lors de la résolution de problèmes théoriques. On donne aussi un aperçu sur les fonctions de Jacobi. Ce sont des fonctions elliptiques du second ordre qui ont deux pôles simples dans le parallélogramme des périodes. Ces fonctions interviennent souvent lors de la résolution de problèmes pratiques et on les appliquera à titre d'exemple à l'étude du pendule simple. Le dernier appendice se termine par une étude sur la méthode des déformations isospectrales ou courbe spectrale. On donnerra une preuve du théorème d'Adler-Kostant-Symes et on discutera son interaction avec le théorème de van Moerbeke-Mumford et la linéarisation des problèmes non-linéaires.

Nous remercions les éditions Hermann pour la qualité de leur travail, leur sérieux et leur professionnalisme. Je dédie ce livre à ma femme et à mes enfants.

A. Lesfari
E-mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Sommaire