Université Chouaib Doukkali A. Lesfari
Faculté des Sciences lesfariahmed@yahoo.fr
Département de Mathématiques http://lesfari.com
El Jadida

Exercices d'Algèbre et Géométrie

Exercice 1. Soit E un espace préhilbertien et $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Montrer que

$$\forall x, y_1, y_2 \in E, \forall \alpha, \beta \in K, \langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle.$$

b) Montrer que la condition (iii) (voir cours) a bien un sens et q'elle est équivalente à

$$\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Exercice 2. Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ et soit $F = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des matrices à m lignes et n colonnes à éléments dans $\mathbb{K}$.

1) Montrer que les applications suivantes:

$$\begin{aligned} &a)\ \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx,\ \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ &b)\ \langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\, dx,\ \mathbb{K} = \mathbb{C}, \end{aligned}$$

déterminent un produit scalaire sur E.

2) Même question (sur F) pour

$$\begin{aligned} &a)\ \langle A, B \rangle = tr\left(B^t A\right),\ \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ &b)\ \langle A, B \rangle = tr\left(B^* A\right),\ \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $E = l^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites de nombres réels (a_k) telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, converge. On définit sur E, une application par

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

Exercice 4. Montrer que : $\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq ||x||.||y||.$

<u>Exercice</u> 5. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que les applications $\|x\|_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, définies ci-dessous sont des normes sur $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,, \\ \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} ,\ 1 \leq p \leq \infty, \\ \|x\|_\infty &= \max \{ |x_i| : 1 \leq i \leq n \} \,. \end{aligned}$$

<u>Exercice</u> 6. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, on définit

$$\|\bullet\|_p : \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

par

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \,.$$

Vérifier que les applications $\|\bullet\|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ainsi définies sont des normes.

<u>Exercice</u> 7. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $[0,1]$ et soit F le sous-ensemble de E constitué par les fonctions f telles que :

$$\int_0^1 \frac{f^2(x)}{x} dx,$$

converge.

a) Montrer que si $f \in F$, alors $f(0) = 0$.

b) Soit f une fonction telle que $f(0) = 0$ et dérivable à droite en 0. Montrer que $f \in F$.

c) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

d) Pour tous $f, g \in F$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \frac{f(x)\, g(x)}{x} dx.$$

Montrer que cette intégrale a un sens et que c'est un produit scalaire sur F.

<u>Exercice</u> 8. Dans tout espace euclidien, démontrer que :

$$||x|| = ||y|| \Longleftrightarrow (x - y) \perp (x + y) \,.$$

Faire une figure.

<u>**Exercice**</u> **9.** Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$ est définie par

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i.$$

Soit F le sous-espace de $\mathbb{C}^3$, muni du produit scalaire usuel, engendré par $(3,2,i)$ et $(i,0,-3)$. Trouver une base de l'orthogonal de F.

<u>**Exercice**</u> **10.** Soit $\mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire

$$\langle p, q\rangle = p(0)\, q(0) + \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx.$$

Soit $p_0(x) = 1$. Trouver un polynôme $p_1(x)$ de degré 1 et un polynôme $p_2(x)$ de degré 2 tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

i) $p_1(0) = p_2(0) = 1$.

ii) $\{p_0, p_1, p_2\}$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.

<u>**Exercice**</u> **11.** Trouver une base et la dimension du sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$(1,2,0,3), \quad (1,-1,1,0), \quad (2,1,1,3), \quad (3,0,2,3), \quad (1,5,-1,6).$$

Même question pour $F^{\perp}$, l'orthogonal de F.

<u>**Exercice**</u> **12.** Soit $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base d'un espace préhilbertien E de dimension finie et soit A la matrice du produit scalaire par rapport à cette base. On désigne par X et Y les matrices colonnes des coordonnées de deux vecteurs quelconques de E par rapport à B. On suppose que la base B est orthonormée. Montrer que

$$\langle X, Y\rangle = \begin{cases} X^*Y & \text{si} \quad K = \mathbb{C} \\ X^tY & \text{si} \quad K = \mathbb{R} \end{cases}$$

<u>**Exercice**</u> **13.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer la projection du vecteur $(-1,0,8)$ sur le sous-espace engendré par les vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$.

<u>**Exercice**</u> **14.** Dans l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}([0,2\pi], \mathbb{R})$ avec le produit scalaire

$$\int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx,$$

trouver la projection de $f(x) = x$ sur le sous-espace engendré par les fonctions $1, \cos x, \sin x$.

<u>Exercice</u> 15. Soit $\mathbb{R}_2[X]$, muni du produit scalaire

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1),$$

et soit F le sous-espace vectoriel des polynômes $p(x) \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que :

$$p(1) = 0.$$

a) Trouver une base orthonormée de $F^{\perp}$, l'orthogonal de F.

b) Trouver les projections du polynôme $q(x) = x$ sur $F^{\perp}$ et sur F.

<u>Exercice</u> 16. Soit l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^4$ muni du produit scalaire usuel et soit V le sous-espace défini par les équations :

1) Trouver une base orthonormée de $V^{\perp}$, l'orthogonal de V.

2) Trouver tous les vecteurs

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4,$$

dont la projection orthogonale sur V est $(1, -i, 1, -1)$ et satisfaisant de plus les conditions :

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ \|x\| = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

<u>Exercice</u> 17. Les vecteurs $(7i, 0, 0)\,, (5 - 7i, 3 + 4i, 0)\,, \left(8 - 9i, 3\sqrt{2} + 4i, 4 + 3i\right)$ forment une base de $\mathbb{C}^3$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Orthonormaliser cette base par le procédé de Gram-Schmidt (on considère que $\mathbb{C}^3$ est muni du produit scalaire usuel).

<u>Exercice</u> 18. Soient $\beta = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $\gamma = (f_i)_{1\leq i\leq n}$ des bases orthonogonales de deux espaces préhilbertiens E et F sur le même corps $\mathbb{K}(= \mathbb{R}\text{ou}\mathbb{C})$. Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire et désignons par $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de T par rapport aux bases β et γ. Montrer que

$$a_{ij} = \frac{\langle f_i, T(e_j)\rangle}{\langle f_i, f_i\rangle}.$$

Que peut-on dire lorsque la base est orthonormée?

<u>Exercice</u> 19. Soit E l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 symétriques, muni du produit scalaire

$$\langle A, B\rangle = tr\left(A^t B\right).$$

a) Prouver que

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\},$$

forme une base de E.
b) Orthonormaliser cette base par le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 20. Soit F un sous-espace d'un espace préhilbertien E de dimension finie. Montrer que

$$(F^{\perp})^{\perp}$$

.

Exercice 21. On considère la matrice complexe A d'ordre 4 et $b \in \mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i & 1 \\ -i & -1 & -1 & 1 \\ i & i+1 & i & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1-i \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} i & i & i & i \end{pmatrix}.$$

a) Trouver la projection orthogonale de b sur ImA (pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^4$).
b) Trouver tous les vecteurs de ImA qui sont orthogonaux à b.

Exercice 22. Sur l'espace $\mathbb{R}_2[X]$, on définit un produit scalaire par

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx.$$

a) Donner la matrice de ce produit scalaire par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
b) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée à partir de la base canonique.

Exercice 23. Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ défini par

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 + ix_2 + x_3 = 0\}.$$

a) Donner une base orthogonale de W (pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^3$).
b) Soit A l'opérateur linéaire sur $\mathbb{C}^3$ qui envoie tout vecteur sur sa projection orthogonale sur W. Trouver la matrice de A par rapport à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.

<u>Exercice</u> 24. Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On suppose que la matrice du produit scalaire par rapport à la base β est

$$\begin{pmatrix} 2 & u & v \\ u & 2 & 1 \\ v & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On suppose de plus que l'angle de e_1 et e_3 est $\frac{\pi}{3}$ et $\|e_1 + e_2\| = 2$.
a) Trouver u et v.
b) Trouver la projection orthogonale de e_3 sur le plan de e_1 et e_2.

<u>Exercice</u> 25. (*Extrait de l'examen, P_{III}, 2003-2004*): Soit E un espace euclidien de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). Soit F un sous espace vectoriel de E de dimension $m \leq n$.
1°) Démontrer que pour tout x de E, il existe un élément unique p de F tel que: $x - p$ soit dans $F^\perp$. On pose $pr_F(x) = p$ où pr_F est la projection orthogonale de E sur F.
2°) a) Démontrer que:

$$\forall x \in E, \quad \forall y \in F, \quad \|x - y\| \geq \|x - pr_F(x)\|.$$

$\|x - pr_F(x)\|$ est la distance de x à F.

b) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, déterminer la distance de $a = (a_1, a_2, a_3)$ au plan $\prod$ d'équation $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$, où $b = (b_1, b_2, b_3)$ est donné dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
3°) Soit$(e_1, e_2, ..., e_p)$ une base orthogonale de F. Démontrer que:

$$\forall x \in E, \quad pr_F(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i.$$

Que devient cette expression si la base est orthonormée ?

<u>Exercice</u> 26. (Devoir facultatif).
I) Théorie :
I.1. *Polynômes de Legendre* : Soit $\langle , \rangle$, l' application de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx.$$

a) Montrer que $(\mathbb{R}[X], \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien réel. *b*) En appliquant à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le procédé de Gram-Schmidt, montrer qu'il existe une seule famille de polynômes $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ formant une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$. Calculer explicitement les polynômes multiples de $p_n(x)$, qui prennent la valeur 1 en $x = 1$. Les polynômes seront notés $P_n(x)$ (polynômes de Legendre). *c*) Vérifier la formule d'Olinde-Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n.$$

d) On pose

$$G(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

Montrer que

$$G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n.$$

La fonction $G(t,x)$ est appelée fonction génératrice des polynômes $P_n(x)$.
e) Etablir la propriété d'orthogonalité

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)\,P_n(x)\,dx=0,\ m\neq n,$$

et montrer que

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{1+2n}.$$

f) Montrer que les polynômes de Legendre satisfont aux relations de récurrence

$$(n+1)\,P_{n+1}(x)=(2n+1)\,xP_n(x)-nP_{n-1}(x),$$

$$P_n(x)=P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)-2xP'_n(x),$$

$$xP'_n(x)-nP_n(x)=P'_{n-1}(x),$$

$$P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)\,P_n(x).$$

g) Montrer que

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x),\ P_n(1)=1,\ P_{2n+1}(0)=0,\ P_{2n}(0)=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

I.2. *Polynômes de Laguerre* : Les polynômes de Laguerre sont définies par la formule d'Olinde-Rodrigues

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right),\ n\in\mathbb{N}.$$

a) Montrer que

$$\frac{e^{\frac{xt}{1-t}}}{1-t}=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{L_n(x)}{n!}t^n.$$

Cette fonction s'appelle fonction génératrice des polynômes $L_n(x)$. *b*) Vérifier que

$$L_0(x)=1,$$

$$L_1(x)=1-x,$$

$$L_2(x) = 2 - 4x + x^2,$$

$$L_3(x) = 6 - 18x - x^3.$$

$c)$ Etablir les relations de récurrence suivantes :

$$L_{n+1}(x) - (2n + 1 - x) L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0,$$

$$L'_n(x) - nL'_{n-1}(x) + nL_{n-1}(x) = 0,$$

$$xL'_n(x) - nL_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0.$$

$d)$ Montrer que les polynômes de Laguerre sont orthogonaux dans $[0, +\infty[$ avec la fonction de poids e^{-x} c'est-à-dire que l'on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ (n!)^2 & \text{si } m = n. \end{cases}$$

$e)$ Montrer que $L_n(x)$ satisfait à l'équation différentielle de Laguerre :

$$xL''_n(x) + (1 - x) L'_n(x) + nL_n(x) = 0.$$

I.3. *Polynômes d'Hermite* : On considère le développement en série

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n(x),$$

où $H_n(x)$ est un polynôme de degré n appelé polynôme d'Hermite, la fonction e^{-t^2+2tx} s'appelle fonction génératrice des polynômes $H_n(x)$. $a)$ En déduire que

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

$b)$ Vérifier la formule d'Olinde-Rdrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right).$$

Cette formule est souvent utilisée comme définition des polynômes d'Hermite. $c)$ Etablir les formules de récurrence suivantes :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),$$

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

d) Montrer que les polynômes d'Hermite sont orthogonaux dans $\mathbb{R}$ avec la fonction de poids e^{-x^2} c'est-à-dire que l'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{si } m = n. \end{cases}$$

e) Montrer que $H_n(x)$ satisfait à l'équation différentielle d'Hermite

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0.$$

II) Applications :

II.1. *Résolution de l'èquation de Laplace en coordonnées sphériques* : Les fonctions sphériques constituent une classe importante de fonctions spéciales. On les rencontre par exemple en résolvant l'équation de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Puisque les solutions continues de l'équation de Laplace portent le nom de fonctions harmoniques, les fonctions sphériques sont aussi appelées harmoniques sphériques. En coordonnées sphériques r, θ, φ, cette équation s'écrit

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Question : Déterminer les solutions particulières (bornées et continues) de cette équation par la méthode de séparation des variables; à cet effet on posera

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r) .\Theta(\theta) .\Phi(\varphi),$$

où $\Phi(\varphi)$ est uniforme et $2\pi-$périodique, tandis que $R(r) .\Theta(\theta)$ un polynôme trigonométrique. (indication : utiliser les polynômes de Legendre). Interpréter les résultats obtenus.

II.2. *Résolution de l'équation de Schrödinger pour le champ central, Atome hydrogénoide* : Le problème fondamental de la mécanique quantique de l'atome est celui du mouvement de l'électron dans un champ d'attraction central. L'importance de ce problème tient à ce que l'hypothèse du champ central utilisée à la description du mouvement des éléctrons de l'atome s'avère très fructueuse pour le calcul des différentes propriétés des structures atomiques. Une telle description permet de se faire une idée plus nette des particularités du comportement des atomes et de déterminer leurs états énergiques sans avoir à résoudre le problème de mécanique quantique des N corps qui présente des difficultés quasi insurmontables. Considérons l'équation de Schrödinger :

$$\Delta\Psi + \frac{2\mu}{(} E - U)\Psi = 0,$$

où
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$
$\hbar$ est la constante de Planck, μ la masse de la particule, U l'énergie potentielle et Ψ la fonction d'onde de la particule. Il n'existe qu'un seul atome pour lequel l'équation de Schrödinger admette une solution exacte : c'est l'atome d'hydrogène. Or, celà ne diminue nullement l'intêret de cette solution exacte, car les solutionss analytiques obtenues sous forme explicite s'avèrent souvent utiles comme point de départ pour les calculs approchés relatifs à des systèmes de mécanique quantique plus compliqués. Pour la description de l'atome d'hydrogène en termes de mécanique, il convient de considérer le mouvement relatif de l'électron (masse m, charge $-e$) et du noyau (masse M, charge e). L'objet ici est de résoudre un problème plus général, en supposant que la charge du noyau soit Ze. Ce problème présente un intérêt physique immédiat, car les valeurs propres de l'énergie calculéses dans ce cas correspondent à des valeurs relativement près, aux niveaux d'énergie obsevés de l'atome d'hydrogène ($Z = 1$), de l'atome d'hélium simplement ionisé ($Z = 2$), etc... Un modèle d'atome hydrogénoide s'avère en outre utile par exemple pour l'étude des spectres des éléments alcalins ainsi que des spectres des rayons X des atomes à Z élevé. Le problème du mouvement de l'électron se réduit facilement à celui du mouvement d'un corps unique : une particule de masse réduite
$$\mu = \frac{mM}{m+M} \sim m,$$
mobile dans un champ coulombien $U(r) = -\frac{Ze^2}{r}$, c'est-à-dire à l'équation de Schrödinger :
$$\Delta\Psi + \frac{2\mu}{\hbar}\left(E + \frac{Ze^2}{r}\right)\Psi = 0.$$
où r est la distance de l'électron en mouvement au noyau, que l'on prend pour origine des coordonnées.
Question : Déterminer des solutions $\Psi(x, y, z)$ de l'équation ci-dessus qui soient uniformes, bornées dans tout l'espace et nulles à l'infini (indication: utiliser les polynômes de Legendre et les polynômes de Laguerre). Interpréter les résultats obtenus.

II.3. *Oscillateur harmonique* : Le problème de l'oscillateur harmonique joue un rôle fondamental dans le développement de l'éléctrodynamique quantique; il est fréquement employé lors de l'étude d'oscillations diverses dans les cristaux et les molécules. L'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde $\Psi(x)$ de l'oscillateur harmonique s'écrit
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\psi = E\psi, \ \ -\infty \ \langle \ x \ \langle \ \infty,$$

où m est la masse de la particule, x son écart de la position d'équilibre, ω la pulsation, $\hbar$ la constante de Plank et E l'énergie.
Question : Déterminer les valeurs propres de l'energie E et les fonctions propres telles que la fonction $\Psi(x)$ soit continue et vérifie la condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2(x)\,dx = 1.$$

(indication: utiliser les polynômes d'Hermite).

Exercice 27. Soit l'espace $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx.$$

On pose

$$\begin{cases} \varphi_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ \varphi_{2k-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, k\geq 1, \\ \varphi_{2k}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, k\geq 1. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace de $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{2n}$.
a) Montrer que les fonctions φ_k sont orthonormées.
b) Soit $f\in\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. Déterminer la projection orthogonale p de f sur S. Montrer que

$$p = \sum_{k=0}^{2n} c_k\varphi_k,$$

où $c_k = \langle f,\varphi_k\rangle$, $0\leq k\leq 2n$.

Exercice 28. Soit E un espace préhilbertien. Pour toute suite finie $(x_1,\ldots,x_n)$ de points de E, on appelle déterminant de Gram des x_i le scalaire $G(x_1,\ldots,x_n)$ égal au déterminant des produits scalaires $\langle x_i,x_j\rangle$.
a) Montrer que $G(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$ et que la relation $G(x_1,\ldots,x_n)\rangle\ 0$ équivaut à dire que les x_i sont liéairement indépendants (utiliser une base orthonormale dans l'espace vectoriel engendré par les x_i).
b) Montrer que si les x_i sont linéairement indépendants, la distance d'un point x quelconque de E à l'espace vectoriel L engendré par les x_i a son carré égal à

$$\frac{G(x,x_1,\ldots,x_n)}{G(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Exercice 29. Décomposer les matrices suivantes en un produit $Q.R.$ où Q est une matrice dont les colonnes sont orthogonales et R une matrice carré triangulaire supérieure:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 32 \\ 2 & -5 & -9 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 30. Soit T un opérateur linéaire sur un espace préhilbértien E de dimension finie.
a) Montrer que l'adjoint T^* de T existe et est unique.
b) Soit A la matrice de T par rapport à une base orthonormée B de E. Montrer que A^* (adjointe de A) est la matrice de T^* par rapport à la même base B.

Exercice 31. Soit $T : \mathbb{C}_3[x] \longrightarrow \mathbb{C}_3[x]$, l'application linéaire définie par

$$T(1) = x + ix^3,$$

$$T(x) = 2 - x^2,$$

$$T\left(x^2\right) = i - x + (1+i)\,x^2,$$

$$T\left(x^3\right) = x^3 - i.$$

On suppose que $\mathbb{C}_3[x]$ muni du produit scalaire suivant:

$$\langle p, q\rangle = \overline{a}_0 b_0 + \overline{a}_1 b_1 + \overline{a}_2 b_2 + \overline{a}_3 b_3,$$

si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ et $p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$. Décrire T^*, l'opérateur adjoint de T et donner sa matrice dans la base canonique.

Exercice 32. On définit une transformation linéaire de Lorentz comme une transformation linéaire $t : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, qui laisse invariante la forme quadratique : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Montrer qu'une matrice réelle A d'ordre 4 définit une transformation de Lorentz t_A si et seulement si : $\det A \neq 0$ et $A^{-1} = DA^t D^{-1}$ où D est la matrice diagonale qui a pour termes diagonaux $1, 1, 1$ et -1.

Exercice 33. Soit $E = \mathcal{C}^\infty([a,b], \mathbb{R})$ avec le produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,$$

et soit $h \in E$ une fonction telle que : $h(a) = h(b) = 0$. On définit un opérateur T sur E par $T(f) = (hf')'$. Montrer que T est auto-adjoint.

Exercice 34. Soit T un opérateur linéaire sur un espace préhilbertien complexe E. Etablir qu'il existe un unique couple (R, S) d'opérateurs auto-adjoints de E tels que : $T = R + iS$. Montrer que T et T^* commutent si et seulement si R et S commutent.

Exercice 35. Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace de E de dimension finie et $P : E \longrightarrow E$, l'opérateur linéaire qui envoie tout vecteur de E sur sa projection orthogonale dans F. Montrer que l'opérateur P est auto-adjoint.