Université Chouaib Doukkali — *A. Lesfari*
Faculté des Sciences — lesfariahmed@yahoo.fr
Département de Mathématiques — http://lesfari.com
El Jadida

Analyse complexe

Exercice 1. Montrer que la fonction cosinus complexe $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, n'est pas bornée.

Exercice 2. Montrer que $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$ n'existe pas.

Exercice 3. a) Montrer que La fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe dans Ω si et seulement si u et v sont différentiables dans Ω et satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

b) En déduire que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Exercice 4. Montrer que les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à l'équation: $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{C}^1$ dans Ω, à valeurs complexes. Montrer que la fonction f est holomorphe si et seulement si la forme différentielle $\omega = f dz$ est fermée dans Ω.

Exercice 6. Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, une fonction complexe d'une variable complexe $z = x + iy$.
a) Montrer que si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine Ω, on peut l'y exprimer au moyen de z seul.
b) Comment trouver formellement l'expression de $u(x,y)+iv(x,y)$ au moyen de z seul ?
c) On suppose que u et v soient différentiables. Montrer que si la fonction $f(z)$ s'exprime au moyen de z seul, alors elle est holomorphe.
d) Supposons que la fonction f soit holomorphe et que $f'(z) \neq 0$. Posons $g(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$. Montrer que g est holomorphe si et seulement si $df \wedge dg = 0$.

<u>Exercice</u> 7. Montrer que la règle de l'Hospital reste d'application dans le cas complexe, à savoir, si $f(z_0) = g(z_0) = 0$ alors:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

si $g'(z_0)$ est nul et si f et g sont dérivables en z_0.

<u>Exercice</u> 8. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, une fonction holomorphe. On pose $z = x+iy$ et $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Montrer que f est constante s'il existe des nombres réels a, b, c non tous nuls et tels que: $au + bv = c$.

<u>Exercice</u> 9. Montrer que la fonction $f(z) = Re(z)$, n'est pas holomorphe.

<u>Exercice</u> 10. Calculer $\int_\gamma z^2 dz$ où γ est le segment de droite reliant le point $z_0 = -i$ au point $z_1 = 2 + i$, orienté de z_0 à z_1.

<u>Exercice</u> 11. Appliquer la formule de majoration au cas de l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$ où γ est un arc de cercle de centre 0, de rayon R et d'angle au centre θ.

<u>Exercice</u> 12. Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin fermé et Δ le complémentaire de l'image de γ, c'est-à-dire $\Delta = I^c$ où $I = \{z : \exists t \in [a,b]\,,\ z = \gamma(t)\}$. Montrer que pour tout $z \in \Delta$, on a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = ind_\gamma(z),$$

est un entier dépendant du point z et s'appelle indice de γ par rapport à z. Montrer qu'il est égal au nombre de tours que fait γ autour de z. Montrer que la fonction $z \mapsto ind_\gamma(z)$ est constante sur toute partie connexe de Δ et s'annule sur la composante connexe non bornée de Δ.

<u>Exercice</u> 13. *a*) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ et soit γ un chemin fermé contenu dans Ω. Montrer que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

b) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, sauf en $z_1, z_2, ..., z_k$ et soit γ un chemin fermé contenu dans Ω entourant tous ces points. Si γ_j $(1 \le j \le k)$ est un chemin fermé contenu dans le domaine intérieur à γ entourant z_j et n'entourant pas les autres z_l $(l \neq j)$, montrer que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\, dz.$$

c) Que peut-on dire si le domaine Ω n'est pas simplement connexe et si γ est homotope à zéro. Même question si γ a des points doubles.

<u>**Exercice**</u> **14.** Montrer que si $f(z)$ est holomorphe dans Ω, alors $f'(z)$ est continue dans Ω.

<u>**Exercice**</u> **15.** *a*) Soit γ un chemin d'extrémités a et b, et contenu dans Ω. Montrer que l'intégrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ ne dépend que des extrémités a et b de γ. On pose

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z)dz.$$

b) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans Ω. D'après a), on peut définir dans Ω une fonction uniforme

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta, \qquad z_0 \in \Omega.$$

Cette fonction $F(z)$ est définie à une constante près, dépendant du choix du point z_0. Montrer que $F(z)$ est holomorphe dans Ω et on a $F'(z) = f(z)$, sur Ω.

<u>**Exercice**</u> **16.** Soit $f \in \mathcal{C}^1$ dans Ω, à valeurs complexes. Montrer que la fonction f admet une primitive dans Ω si et seulement si la forme différentielle $\omega = fdz$ est exacte dans Ω.

<u>**Exercice**</u> **17.** Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine Ω. Soit γ un chemin fermé contenu dans Ω et soit Δ le domaine simplement connexe ayant γ pour frontière. Montrer que
a) Pour tout $z \in \Delta$, on a la formule intégrale de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

(γ étant parcouru dans le sens positif, càd. anti-horlogique).
b) La fonction f est indéfiniment dérivable dans Δ et on a, pour tout $z \in \Delta$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta.$$

<u>**Exercice**</u> **18.** *a*) Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{1+z}{z}dz$, lorsque γ est le périmètre du carré de centre 0, dont un sommet est le point $(1,1)$ du plan complexe.
b) Même question lorsque γ est la circonférence du plan complexe d'équation: $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.
c) Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{\cos 2\pi z}{(z-1)^7}dz$, où γ est le cercle $|z| = 2$.

<u>**Exercice**</u> **19.** Montrer que si $f(z)$ est continue dans un domaine simplement connexe Ω et si $\int_\gamma f(z)dz = 0$, pour tout chemin fermé γ de Ω, alors $f(z)$ est holomorphe dans Ω.

Exercice 20. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable complexe z. Alors la fonction f est analytique dans Ω si et seulement si elle est holomorphe dans Ω.

Exercice 21. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$, le disque de centre a et de rayon r et soit f une fonction holomorphe sur$D$. Supposons qu'il existe une constante M telle que: $|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in C = \partial D$. Montrer que

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!M}{r^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 22. Montrer que si $f(z)$ est une fonction holomorphe et bornée sur tout $\mathbb{C}$, alors $f(z)$ est une constante. En déduire que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Autrement dit, toute équation algébrique

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0,$$

a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Exercice 23. Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:
i) $f^{(k)}(z_0) \equiv 0, \forall k \in \mathbb{N}$
ii) $f \equiv 0$ dans un voisinage $\mathcal{V}(z_0)$ de z_0.
iii) $f \equiv 0$ dans Ω.

Exercice 24. Soient f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supposons que $f = g$ dans un voisinage d'un point de Ω. Montrer que $f = g$ sur tout Ω.

Exercice 25. a) Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Montrer que les zéros de f sont isolés. Autrement dit, l'ensemble des zéros de f dans Ω est discret.
b)En déduire que l'anneau des fonctions holomorphes sur Ω est intègre.

Exercice 26. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On dit que f possède, dans Ω, la propriété de la moyenne si pour tout disque fermé $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\} \subset \Omega$, la valeur de f au point a est égale à la moyenne de f sur le cercle $C = \partial D$ c'est-à-dire

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

a) Montrer que toute fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, possède la propriété de la moyenne.
b) Montrer que sous les conditions du théorème précédent, on a

$$|f(a)| \leq \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left|f(a + re^{i\theta})\right|.$$

<u>Exercice</u> 27. Montrer que si le module d'une fonction holomorphe sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, atteint son maximum en un point de Ω, alors cette fonction est constante.

<u>Exercice</u> 28. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ telle que: $f(0) = 0, |f(z)| \leq 1, \forall z \in D(0,1)$.
a) Montrer que $|f(z)| \leq z, \forall z \in D(0,1)$.
b) Montrer que si en outre, il existe un $z_0 \neq 0$ pour lequel $|f(z_0)| = |z_0|$, alors on a identiquement $f(z) = e^{i\theta} z$, $\theta \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice</u> 29. a) Montrer que toute fonction holomorphe est harmonique.
b) En déduire que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques.
c) Montrer que la fonction $Log\,|z|$ est harmonique dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

<u>Exercice</u> 30. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique dans un ouvert simplement connexe Ω de $\mathbb{C}$. Montrer qu'on peut trouver une fonction harmonique $v : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que: $u + iv$ soit holomorphe sur Ω.

<u>Exercice</u> 31. Soit u une fonction harmonique dans le disque ouvert $D(0,R)$, et continue dans le disque fermé $\overline{D}(0,R)$. Montrer que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(R\, e^{i\theta}\right) \frac{R^2 - |z|^2}{|R\, e^{i\theta} - z|^2} d\theta,\ \forall z \in D(0,R),$$

ou, ce qui revient au même, en posant $z = \rho e^{i\alpha}$, $\rho < R$,

$$u\left(\rho e^{i\alpha}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u\left(R\, e^{i\theta}\right)(R^2 - \rho^2)}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha)} d\theta.$$

<u>Exercice</u> 32. Soit $D(0,1)$ un disque ouvert de centre 0 et de rayon R et soit $u(\theta)$ une fonction 2π-périodique sur le cercle $C = \partial D(0,R)$. Montrer qu'il existe une fonction $f(z)$ continue sur le disque fermé $\overline{D}(0,R)$, harmonique sur le disque ouvert $D(0,R)$ et satisfaisant à $f\left(R\, e^{i\theta}\right) = u(\theta)$. Cette fonction est unique et est donnée par

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \frac{R^2 - |z|^2}{|R\, e^{i\theta} - z|^2} d\theta,\ \ |z|\ < R.$$

<u>Exercice</u> 33. Montrer que si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine Ω et si $f'(z) \neq 0$ dans Ω, alors f est conforme dans Ω.

<u>Exercice</u> 34. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$.
a) Montrer que l'image de Ω par f est ouverte et connexe.

b) Montrer que si en outre f est injective, alors f^{-1} est holomorphe dans $f(\Omega)$ et $f'(z) \neq 0$ dans Ω.
c) En déduire que si f est une transformation conforme de Ω dans Δ, alors f^{-1} est une transformation conforme de Δ dans Ω.

Exercice 35. Montrer que l'image d'un ouvert simplement connexe par une transformation conforme est simplement connexe.

Exercice 36. Montrer que tout ouvert simplement connexe Ω de $\mathbb{C}$ tel que: $\Omega \neq \mathbb{C}$ est isomorphe au disque ouvert.

Exercice 37. Soit $f : \Delta \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans la couronne ouverte

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : R_1 \ < \ |z - z_0| \ < \ R_2\},$$

a) Montrer que f peut être représentée dans Δ de façon unique par une série de la forme

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

avec

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

où γ est un chemin fermé entourant z_0 et contenu dans la couronne.
b) Montrer que cette série converge absolument vers f dans Δ et converge uniformément dans toute couronne fermée contenue dans Δ.

Exercice 38. Montrer que si z_0 est un pôle d'ordre n de la fonction f(z), alors celle-ci s'écrit sous la forme $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^n}$, avec g(z) holomorphe au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$.

Exercice 39. Déterminons les premiers termes du développement de Laurent de $\dfrac{1}{\sin z}$, au voisinage de $z = 0$ dans le disque D^* de centre 0, privé de son centre, et de rayon π.

Exercice 40. Même question pour $\dfrac{1}{(z-1)^2 (z-4)^3}$, au voisinage de $z = 1$, dans le disque ouvert D^* de centre 1, privé de son centre, et de rayon 3.

Exercice 41. Trouver et qualifier les points singuliers de la fonction $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z+i)}$.

Exercice 42. Montrer que $z = 0$ est un point singulier essentiel de la fonction $e^{\frac{1}{z}}$.

<u>Exercice</u> 43. Dévelpper en série de Laurent la fonction $e^z + e^{\frac{1}{z}}$, autour de l'origine du plan complexe.

<u>Exercice</u> 44. Dévelpper en série de Laurent la fonction $f(z) = -\dfrac{2}{(z-1)(z+1)}$, autour de $z = 1$, dans les couronnes $0 < |z-1| < 2$ et $2 < |z-1|$.

<u>Exercice</u> 45. *a*) Montrer que lorsque z_0 est un pôle d'ordre m de $f(z)$, alors

$$\underset{z_0}{R\acute{e}s}\ f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right].$$

b) Montrer que lorsque z_0 est un pôle simple de $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, avec $P(z_0) \neq 0$ et $Q(z_0) = 0$, alors

$$\underset{z_0}{R\acute{e}s}\ f(z) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \text{ si } Q'(z_0) \neq 0.$$

<u>Exercice</u> 46. Calculer les résidus de la fonction $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$, en tous les pôles à distance finie.

<u>Exercice</u> 47. Calculer le résidu de la fonction $f(z) = \dfrac{\cos z.\ chz}{z^3 \sin z.\ shz}$, au point $z = 0$.

<u>Exercice</u> 48. Calculer le résidu de la fonction $e^{\frac{1}{z}}$ au point $z = 0$.

<u>Exercice</u> 49. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : \Omega \backslash \{z_1, z_2, ..., z_k\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \underset{z_j}{R\acute{e}s}\ f(z),$$

où γ est un chemin fermé contenu dans Ω à l'intérieur duquel sont contenus tous les z_j.

<u>Exercice</u> 50. Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz,$$

où γ est le cercle de centre 0 et de rayon respectivement : $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ et 3.

<u>Exercice</u> 51. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans un domaine simplement connexe Ω. Soit γ un chemin fermé contenu dans Ω entourant tous les pôles et zéros de $f(z)$ dans Ω. Montrer que

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{f'(z)}dz = ind_{fo\gamma}(0),$$

où N est le nombre de zéros et P le nombre de pôles dans Ω. (Tous ces points sont comptés avec leur ordre de multiplicité).

<u>Exercice</u> 52. a) Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions méromorphes dans un domaine simplement connexe Ω et sur sa frontière γ. Supposons qu'en tout point de γ, on ait $|f(z)| > |g(z)|$. Montrer que $f(z)$ et $f(z) + g(z)$ ont le même nombre de zéros dans Ω.
b) En déduire que tout polynôme de degré n possède n zéros.
c) Déterminer le nombre de zéros de la fonction $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ dans le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

<u>Exercice</u> 53. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ satisfaisant à $f(0) = 0$, $|f'(z)| \leq M$, en tout point de ce disque.
a) Etablir successivement les inégalités:

$$|f'(z) - f'(0)| \leq 2M|z|, \qquad |f(z) - zf'(0)| \leq M|z|^2.$$

b) On suppose désormais que : $f'(0) = 1$, $M > \frac{1}{2}$. Déterminer un nombre réel $\varrho > 0$ tel que les relations: $|z| = \frac{1}{2M}$, et $|Z| < \varrho$, entraînent

$$|f(z) - z| < |z - Z|.$$

c) En déduire que pour Z fixé et $|Z| < \varrho$ l'équation $f(z) - Z = 0$, a le même nombre de racines que l'équation $z - Z = 0$, dans le disque $|z| < \frac{1}{2M}$.
d) Déterminer un nombre $r > 0$ tel que la restriction de la fonction f au disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ soit univalente.

<u>Exercice</u> 54. Dans les exercices qui suivent γ_1 (resp.γ_2) désignera le demicercle de centre 0 et de rayon r (resp.ε).
a) Montrer que si$|f(z)| \leq \frac{M}{r^k}$, pour $z = re^{i\theta}$, où $k > 1$ et M sont des constantes, alors

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)dz = 0.$$

b) Montrer que si$|f(z)| \leq \dfrac{M}{r^k}$, pour $z = re^{i\theta}$, où $k > 0$ et M sont des constantes, alors

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)e^{imz}dz = 0.$$

c) Montrer que si $z = 0$ est un pôle simple de $f(z)$, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2} f(z)dz = -\pi i \underset{0}{R\acute{e}s} f(z).$$

<u>Exercice</u> 55. Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus:
a)$\int_0^{2\pi} \dfrac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta.$
b)$\int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{(a+b\cos^2 x)^2}, \quad a > 0, b > 0.$
c) $\int_0^{2\pi} \dfrac{(1+2\cos x)^n \cos nx}{1-2a\cos x - a}dx, \ -1 < a < \frac{1}{3}.$
d) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^4}.$
e) $\int_0^{\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2+1}dx,$
f) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx,$
g) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx.$
h) $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin x}{x}dx.$
i) $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin^4 mx}{x^2}dx, \quad m > 0.$

<u>Exercice</u> 56. On considère la fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Soit

$$\Delta(\varepsilon, r) = \{z = x+iy \in \mathbb{C} : \varepsilon <\mid z \mid< r, y > 0\},$$

ε et r étant des constantes strictement positives.
1°) Déterminer les pôles et résidus correspondants de la fonction $f(z)$.
2°) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{\partial\triangle^+} f(z)dz$, $\partial\triangle^+$ désignant la frontière de $\triangle$ orientée dans le sens positif.
3°) Calculer l'intégrale réelle

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}.$$

Exercice 57. Calculer les intégrales suivantes :
a) $\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x)x}dx, \quad 0<\alpha<1.$
b) $\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx.$
c) $\int_0^1 \sqrt[4]{x^3(1-x)}dx.$

Exercice 58. En utilisant la méthode des résidus, déterminer la somme des séries suivantes:
a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2}, \quad a \neq 0.$
b) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^2}, \quad a \neq \mathbb{Z}.$

Exercice 59. Déterminer la fonction réelle causale f(t) dont la transformée de Laplace est

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-zt}dt = \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad (Rez > 0).$$

Indication: utiliser la formule de Bromwich-Wagner:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(z)e^{zt}dz, \quad (t, \sigma > 0).$$

Exercice 60. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.
1) Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f. Montrer que :
a) f est holomorphe dans Ω.
b) la suite des dérivées $\left(f_n^{(k)}\right)$ convege uniformément sur tout compact de Ω vers $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.
2) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que cette série converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω. Montrer que :
a) la somme de cette série est holomorphe sur Ω.
b) la série est dérivable terme à terme sur Ω. En outre, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω.

Exercice 61. Soit f_n et f des fonctions holomorphes sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer qu'il est équivalent de dire
i) la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de Ω.
ii) $\lim_{n\to\infty} d_n(f_n, f) = 0.$

Exercice 62. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. Montrer qu'il n'existe aucune norme dont la topologie est celle de $\mathcal{O}(\Omega)$.

Exercice 63. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que cette série converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω. Montrer que :
1) la somme f de cette série est méromorphe sur Ω.
2) la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω et sa somme est $f^{(k)}$.

Exercice 64. On considère la série

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

1) Montrer que cette série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.
2) On pose

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

a) Montrer que $f(z)$ est périodique de période 1.
b) Montrer que les pôles de $f(z)$ sont les entiers $n \in \mathbb{Z}$, sont doubles et de résidu nul.
c) Soit $z = x + iy$. Montrer que

$$\lim_{|y|\to\infty} f(z) = 0,$$

uniformément par rapport à x.
3) Montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2.$$

Exercice 65. Soit f une fonction méromorphe de pôles: $z_1, z_2, z_3, \ldots$ et soit

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{a_{-k}^{(n)}}{(z-z_n)^k}, \qquad (1)$$

la partie principale du développement en série de Laurent de f au voisinaage de z_n. Montrer que pour toute suite de points $z_n \in \mathbb{C}$ tels que: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ et toute suite de fonctions g_n de la forme (1), il existe une fonction méromorphe f ayant pour seuls pôles les points z_n et pour tout n, la partie principale g_n.

2) Montrer que toute fonction méromorphe f peut-être développée en une série

$$f = h + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - P_n), \tag{2}$$

uniformément convergente sur tout compact, où h est une fonction entière, g_n les parties principales de f et P_n des polynômes.
Soit

$$C_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_n\}, \; r_1 < r_2 < \ldots, \; \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

une famille de cercles et soit f une fonction méromorphe. On suppose que sur C_n, la fonction f croît moins vite que z^n (c-à-d. il existe une constante A telle que: $\forall z \in C_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $|f(z)| \leq A|z|^m$). Montrer qu'on peut prendre dans le développement (2), P_n et h des polynômes de degré $\leq m$.

<u>**Exercice**</u> **66.** Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. Soit A une partie de Ω et posons $f_n = 1 + u_n$. Montrer que le produit infini $\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge normalement sur A si et seulement si la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge normalement sur A.

<u>**Exercice**</u> **67.** Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que le produit infini $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur tout compact de Ω. Montrer que :
1) $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$ est holomorphe sur Ω.
2)

$$Z(f) = \bigcup_n Z(f_n), \qquad m_Z(f) = \sum_n m_Z(f_n),$$

où $Z(f)$ (*resp.* $Z(f_n)$) désigne l'ensemble des zéros de f (*resp.* f_n) et $m_Z(f)$ (*resp.*$m_Z(fn)$) est l'ordre de multiplicité du zéro de f (*resp.* f_n).
3) la série de fonctions méromorphes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n},$$

converge normalement sur tout compact de Ω et sa somme est la dérivée logarithmique $\frac{f'}{f}$.

<u>Exercice</u> 68. Démontrer les formules :

$$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}=\pi\ \cot g\ \pi z,$$

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

<u>Exercice</u> 69. Soit k un nombre complexe non nul de module $|k|>1$. On se propose de déterminer les fonctions f méromorphes dans $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, non identiquement nulles, qui possèdent la propriété suivante : il existe $\lambda_f\in\mathbb{C}^*$ tel que pour tout $z\in\mathbb{C}^*$ on ait

$$f(kz)=\lambda_f\ f(z).$$

1) Montrer que l'ensemble E de ces fonctions est un groupe multiplicatif.
2) Si f est holomorphe et appartient à E, montrer que f est de la forme $f(z)=\alpha z^n$ avec $\alpha\in\mathbb{C}^*$, $n\in\mathbb{Z}$.
3) Montrer qu'il existe des réels $r\rangle\ 0$ tels que f n'ait ni pôle ni zéro sur le bord de la couronne $0\ \langle\ r\leq|z|\leq|k|\ r$. Montrer que f a le même nombre de zéros que de pôles dans une telle couronne Ω_r.
4) Montrer que les produits infinis

$$p(z)=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k^n}\right),\ q(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{zk^n}\right)$$

convergent normalement sur tout compact de $\mathbb{C}^*$. Montrer que $\varphi(z)=p(z)\,q(z)$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}^*$ ayant pour zéros l'ensemble $\sum=\{k^n\}$ $(n\in\mathbb{Z})$.
5) Soit $f\in E$ et soit $r\in\mathbb{R}$ défini comme au 3). Dans Ω_r, soient $a_1,...,a_p$ les zéros de f, $b_1,...,b_p$ ses pôles (distincts ou non). On pose

$$\psi(z)=\frac{\varphi(z/a_1)\ldots\varphi(z/a_p)}{\varphi(z/b_1)\ldots\varphi(z/b_p)}.$$

Montrer que l'on a $\psi\in E$ et qu'il existe $\alpha\in\mathbb{C}^*$, $n\in\mathbb{Z}$ tels que $f(z)=\alpha z^n\psi(z)$.
6) Conclusion.- Quelle est l'expression des fonctions de E ?

<u>Exercice</u> 70. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points $a_1,a_2,...,a_n$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{a_k}f+\operatorname*{Res}_{\infty}f=0.$$

<u>Exercice</u> 71. 1) Soit τ un nombre complexe tel que : $\mathrm{Im}\,(\tau) > 0$ et soit $q = e^{\pi i \tau}$. Montrer que la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \, q^{n^2} e^{2\pi n i z},$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.
2) On désigne par ϑ la somme de cette série. Montrer que

$$\begin{aligned} \vartheta\,(z+1) &= \vartheta\,(z)\,, \\ \vartheta\,(z+\tau) &= -q^{-1} e^{-2\pi i z} \vartheta\,(z)\,. \end{aligned}$$

3) Montrer que ϑ n'est pas identiquement nulle. On pourra montrer par exemple que

$$\int_0^1 |\vartheta\,(x)|^2 \, dx = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |q|^{n^2}\,.$$

4) Montrer que les nombres $m + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau$ sont des zéros de ϑ.
5) En évaluant l'intégrale de la fonction ϑ'/ϑ sur le contour d'un parallélogramme de périodes bien choisi, montrer que ϑ n'a pas d'autre zéro.
6) Montrer que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - q^{2n-1} e^{2\pi i u}\right)\left(1 - q^{2n-1} e^{-2\pi i u}\right)\right),$$

définit une fonction $f\,(u)$ holomorphe dans le plan de la variable complexe u.
7) Quels sont les zéros de f ?
8) Montrer que f/ϑ est doublement périodique et entière.
9) En déduire que

$$f\,(u) = c.\vartheta\,(u)\,,$$

où c est une constante.

<u>Exercice</u> 72. La fonction gamma d'Euler $\Gamma\,(z)$, se définit par l'intégrale

$$\Gamma\,(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Montrer que :
1) La fonction $\Gamma\,(z)$ est définie et holomorphe dans le demi-plan $\mathrm{Re}s > 0$.
2) La fonction $\Gamma\,(z)$ vérifie la relation fonctionnelle suivante :

$$\Gamma\,(z+1) = z\Gamma\,(z)\,,\ \mathrm{Re}s > 0 \tag{3}$$

ce qui imlique la relation de récurrence :

$$\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

On peut prolonger la fonction $\Gamma(z)$ au moyen de la formule (3), en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-\mathbb{N}\}$.
4) Graphe de $\Gamma(z)$ pour $z = x \in \mathbb{R}$.
5) Etablir la formule de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}.$$

6) Posons

$$g_n(z) = \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!}n^{-z}.$$

Montrer que lorsque $n \to \infty$, alors g_n tend vers $g(z) = \dfrac{1}{\Gamma(z)}$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$.
7) Etablir la formule des compléments :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},\ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

Exercice 73. Montrer que l'espace projectif complexe

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \frac{\{[Z] \neq 0 \in \mathbb{C}^{n+1}\}}{[Z] \sim [\lambda Z]},$$

est une variété analytique.

Exercice 74. Soit T^n un tore complexe de dimension n c'est-à-dire le produit direct de n cercles. Autrement dit, T^n est le quotient $\mathbb{C}^n/L$ de $\mathbb{C}^n$ par un sous-groupe engendré par une base de $\mathbb{C}^n$. Montrer que T^n est muni d'une structure de variété analytique.

Exercice 75. Soit $G_{n,k}$, $0 \leq k \leq n$, une Grassmannienne complexe c'est-à-dire l'ensemble des plans de dimension k de l'espace $\mathbb{C}^n$ passant par 0. $G_{n,k}$ peut être considéré comme espace des sphères de centre 0 et de dimension $k-1$ contenues dans la sphère S^{n-1}, ces sphères correspondant biunivoquement aux sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{C}^n$. Montrer que $G_{n,k}$ est une variété complexe analytique compacte et connexe de dimension $(n-k)k$.

Exercice 76. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et soit $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.
1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}(\Omega)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre pour l'addition, la multiplication des fonctions et la multiplication par les constantes complexes.

2) Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Montrer que si $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$, alors $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$.
3) Montrer que si Ω est connexe et si f est à valeurs réelles ou si $|f|$ est constante, alors f est constante.

<u>Exercice</u> 77. Soit

$$\mathcal{D}(a,r) = \{(z_1,...,z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| \ < \ r_j, \ j = 1,...,n\},$$

un polydisque (de $\mathbb{C}^n$) de centre $a = (a_1,...,a_n) \in \mathbb{C}^n$ et de rayon $r = (r_1,...,r_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$ et soit

$$\partial_0\mathcal{D}(a,r) = \{(z_1,...,z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| \ = r_j, \ j = 1,...,n\},$$

le bord distingué de $\mathcal{D}(a,r)$. On désigne par $\mathcal{O}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\mathcal{D}}\right)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathcal{D}$ et continues sur $\overline{\mathcal{D}}$.
1) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\mathcal{D}}\right)$. Montrer que

$$\forall z \in \mathcal{D}, \qquad f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \tag{4}$$

où $k = (k_1,...,k_n) \in \mathbb{N}^n$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$ et

$$c_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0\mathcal{D}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta.$$

2) En déduire que toute fonction $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$ est analytique.
3) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D})$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D})$, que ses dérivées sont holomorphes sur $\mathcal{D}$ et qu'en outre, les coefficients c_k de la série (4) sont donnés par

$$c_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}\bigg|_{z=a}.$$

4) Soit $f \in \mathcal{O}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{C}\left(\overline{\mathcal{D}}\right)$ et supposons que: $|f| \leq M$ sur $\partial_0\mathcal{D}$, M étant une constante. Montrer que

$$|c_k| \leq \frac{M}{r^k},$$

où $r^k = r_1^{k_1} \dots r_n^{k_n}$.

<u>Exercice</u> 78. Soit $\mathbf{X}$ la surface de Riemann associée à l'équation :

$$w^2 = z^4 - 1,$$

1) Quelles sont les points de branchements de $\mathbf{X}$? Justifier la réponse et analyser le cas $z = \infty$.
2) Montrer que $\mathbf{X}$ est un tore à 3 trous.

<u>Exercice</u> 79. Soit ω_1 et ω_2 deux nombres complexes différents de 0. On suppose que $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$ et on désigne par Ω le réseau ou sous-groupe discret de $\mathbb{C}$ engendré par ω_1 et ω_2 :

$$\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \left\{\omega = m\omega_1 + n\omega_2, \ \ (m,n) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

1) Montrer que toute fonction elliptique $f(z) \neq$constante, possède des pôles.
2) Montrer que toute fonction elliptique a un nombre fini de pôles et de zéros dans Ω.
3) On désigne par

$$a_1, ..., a_l : \text{ zéros de } f \text{ de multiplicité respectivement } n_1, ..., n_l.$$

$$b_1, ..., b_m : \text{ pôles de } f \text{ de multiplicité respectivement } p_1, ..., p_m,$$

et soit f une fonction elliptique ($\neq$constante) n'ayant ni zéro, ni pôle sur $\partial\Omega$. Montrer que, dans Ω, on a

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \underset{b_k}{Res} f = 0,$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{l} n_k = \sum_{k=1}^{m} p_k,$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{l} n_k a_k - \sum_{k=1}^{m} p_k b_k =$ période, et interpréter ces résultats.

4) Montrer qu'il existe deux fonctions elliptiques $f(z)$ et $g(z)$ quelconques de mêmes périodes ω_1 et ω_2 une relation algébrique de la forme :

$$P(f(z), g(z)) = 0,$$

où $P(Z,W)$ est un polynôme en Z et W à coefficients constants.
5) En déduire que toute fonction elliptique $f(z)$ satisfait à une équation différentielle de la forme

$$P(f(z), f'(z)) = 0,$$

où $P(Z,W)$ est un polynôme en Z et W.

<u>Exercice</u> 80. La fonction elliptique $\wp$ de Weierstrass est définie par

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \backslash \{0\}} \left\{\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right\},$$

où Ω est le réseau défini dans l'exercice précédent.
1) Montrer que cette série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

2) Montrer que :
- $\wp(z)$ est paire.
- $\wp'(z)$ est doublement périodique.
- $\wp(z)$ est elliptique de périodes ω_1 et ω_2.
- Les points $\omega \in \Omega$ sont des pôles doubles de $\wp(z)$ dont le résidu est nul.

3) Montrer que la fonction $\wp(z)$ est solution dans Ω de l'équation différentielle:

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3,$$

où

$$g_2 \equiv 60 \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \qquad g_3 \equiv 140 \sum_{\omega\in\Omega\setminus\{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

4) Montrer que $\wp'(z)$ a trois zéros en: $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ et que

$$\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \neq \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \neq \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right).$$

5) Montrer que

$$\wp(u) + \wp(v) + \wp(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2.$$

En déduire que

$$\wp(2z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 - 2\wp(z) \text{ (formule de duplication).}$$

6) Montrer que toute fonction elliptique f peut s'écrire sous la forme

$$f = F(\wp(z)) + \wp'(z)\,G(\wp(z)).$$

7) On suppose que: $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ où g_2 et g_3 sont définies dans c). Déterminer l'intégrale elliptique dont l'inverse est la fonction $\wp(z)$.

8) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}/\Omega & \longrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}), \\ z & \longmapsto & [1 : \wp(z) : \wp'(z)],\ z \neq 0, \\ 0 & \longmapsto & [0:0:1]. \end{array}$$

est un isomorphisme entre le tore complexe $\mathbb{C}/\Omega$ et la courbe elliptique $\mathcal{E}$ d'équation

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

où g_2 et g_3 sont définies dans 3).

<u>Exercice</u> 81. Considérons

$$f:\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C},\ z\mapsto w:\ w^2=z\left(z-1\right)\left(z-\lambda\right),$$

avec $\lambda\neq0$, $\lambda\neq1$. Il est clair que f n'est pas une fonction. Construire (en justifiant) un domaine pour lequel f soit une fonction uniforme.

<u>Exercice</u> 82. Quelle est la surface de Riemann $\mathcal{C}$ associée à l'équation

$$P\left(w,z\right)=w^2+Q\left(z\right)w+1=0,$$

où $Q\left(z\right)$ est un polynôme en z de degré n. Déterminer une base $\left(\omega_1,...,\omega_g\right)$ de différentielles holomorphes sur la surface de Riemann $\mathcal{C}$, g étant le genre de $\mathcal{C}$.

<u>Exercice</u> 83. Soient D et D' deux domaines de $\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right)=\mathbb{C}\cup\left\{\infty\right\}$.
1) Montrer que $\mathbb{C}$ et le disque ouvert $\left\{z\in\mathbb{C}:|z|\ <\ 1\right\}$ ne sont pas isomorphes mais sont homéomorphes.
2) Montrer que les automorphismes de D forme un groupe.
3) Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$ est

$$\Gamma\left(\mathbb{C}\right)=\left\{z\mapsto az+b,\ a\neq0\right\},$$

et prouver que ce groupe est transitif; le sous-groupe d'isotropie de 0 est $\left\{z\mapsto az,\ a\neq0\right\}$.
4) Considérons les transformations homographiques

$$z\longmapsto w=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{5}$$

où $\left(a,b,c,d\in\mathbb{C}\right)$ et $ad-bc\neq0$.

a) Montrer que (5) peut-être considérée comme le produit de transformations telles que: translation, rotation, homothétie et inversion.

b) Montrer que les transformations (5) forment un groupe G d'automorphismes de $\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right)$ qui est transitif et qu'en outre

$$\Gamma\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{C}\right)\right)=G.$$

5) On considère le demi-plan

$$P^+=\left\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z=y\ >\ 0\right\},$$

et le disque unité

$$D\left(0,1\right)=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|\ <\ 1\right\}.$$

Démontrer les assertions suivantes :

a) On obtient un isomorphisme de P^+ sur $D(0,1)$ en posant

$$w = \frac{z-i}{z+i}.$$

b) On obtient un automorphisme de $D(0,1)$ en posant

$$w = e^{i\theta}\left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right), \ \theta \in \mathbb{R}, \ |z_0| \ < \ 1.$$

Que peut-on dire du groupe $\Gamma(D(0,1))$?

c) On obtient un automorphisme de P^+ en posant

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \ \ (a,b,c,d \in \mathbb{R}), \ ad-bc=1.$$

Que peut-on dire du groupe $\Gamma(P^+)$?

6) Montrer que tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, distinct de $\mathbb{C}$, est isomorphe au disque $D(0,1)$.

Exercice 84. Soit le système d'équations différentielles dans le domaine complexe

$$w_1' = f_1(z, w_1, ..., w_n),$$
$$\vdots$$
$$w_n' = f_n(z, w_1, ..., w_n).$$

Chercher des conditions pour que le système ci-dessus possède une solution unique. Justifier votre analyse du problème.

Exercice 85. Soit l'équation différentielle d'ordre n

$$\frac{d^n w}{dz^n} = f\left(z, w, w', ..., w^{(n-1)}\right),$$

où f est une fonction holomorphe (de $n+1$ variables) dans un voisinage d'un point $(z_0, a_0, ..., a_{n-1})$. On cherche une solution $w(z)$ de cette équation satisfaisant aux conditions initiales

$$w(z_0) = a_0, \quad w'(z_0) = a_1, \quad ... \quad w^{(n-1)}(z_0) = a_{n-1}.$$

Montrer que sous ces conditions , l'équation précédente possède une solution unique.

Exercice 86. Soit l'équation différentielle

$$w^{(n)} + p_1(z)\, w^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(z)\, w' + p_n(z)\, w = 0,$$

où $p_1(z), \ldots, p_n(z)$ sont des fonctions holomorphes dans un domaine D. Montrer que cette équation possède une solution unique holomorphe dans D.

Exercice 87. Soit l'équation différentielle de second ordre

$$w'' + p(z)\, w' + q(z)\, w = 0.$$

Supposons que $z = \xi$ est un point singulier fuchien et soit α_1, α_2 les racines de l'équation aux indices :

$$\alpha(\alpha - 1) + a_0\alpha + b_0 = 0,$$

avec

$$a_0 = \lim_{z\to\xi}(z-\xi)\, p(z),$$

$$b_0 = \lim_{z\to\xi}(z-\xi)^2\, q(z).$$

a) Montrer que si $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$, l'équation différentielle précédente possède deux solutions linéairement indépendantes :

$$w_1 = (z-\xi)^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\xi)^n,\ c_0 \neq 0,$$

$$w_2 = (z-\xi)^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z-\xi)^n,\ c'_0 \neq 0.$$

b) Montrer que si $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}$, l'équation différentielle précédente possède deux solutions linéairement indépendantes :

$$\begin{aligned} w_1 &= (z-\xi)^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-\xi)^n,\ c_0 \neq 0, \\ w_2 &= \left[A \ln(z-\xi) + \varphi(z)\right] w_1, \end{aligned}$$

avec $\mathrm{Re}\alpha_1 \geq \mathrm{Re}\alpha_2$, A désignant une constante et $\varphi(z)$ une fonction pouvant admettre $z = \xi$ pour pôle.

Exercice 88. On considère l'équation différentielle suivante

$$2z^2 w'' + zw' - \left(1 + z^2\right) w = 0.$$

1) Quels sont les points singuliers de cette équation ? Déterminer, parmi ceux-ci, ceux qui sont fuchsiens.
2) En vertu de l'exercice précédent, l'équation possède au voisinage de l'origine deux solutions linéairement indépendantes de la forme

$$w_1 = z^{\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad w_2 = z^{\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} c'_n z^n.$$

Déterminer les valeurs de α_1, α_2.
3) Déterminer les suites $\{c_n\}$, $\{c'_n\}$ (en prenant $c_0 = 1$, $c'_0 = 1$).

Exercice 89. Quels sont les points singuliers des équations différentielles

$$w'' + \frac{1}{z(z+2)} w' + \frac{1}{z^2} w = 0,$$

$$w'' + \frac{1}{z^4 - 1} w' + \frac{1}{z^2} w = 0.$$

Déterminer, parmi ceux-ci, ceux qui sont fuchsiens.

Exercice 90. Etudier en détail l'équation hypergéométrique de Gauss

$$z(1-z) w'' + [c - (1 + a + b) z] w' - abw = 0,$$

où a, b, c sont des constantes.

Exercice 91. Même question pour l'équation de Bessel

$$z^2 w'' + z w' + \left(z^2 - \nu^2\right) w = 0,$$

où ν est une constante.