Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida

A. Lesfari
lesfariahmed@yahoo.fr
http://lesfari.com

Calcul différentiel et Equations différentielles

Exercice 1. (Rappel) Etudier la continuité et la différentiabilité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, y\neq 0 \\ 0, y=0 \end{cases} \quad , \quad f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^4y}{x^6+y^4}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad , \quad f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}, (x,y)\neq(0,0) \\ 0, (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad , \quad f(x,y)=\begin{cases} \sin x\sin y\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, xy\neq 0 \\ 0, xy=0 \end{cases}$$

Exercice 2. Même question pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z)=\begin{cases} \frac{xy^3z^3}{x^4+y^6+z^8}, & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$$

Exercice 3. Pour quelles valeurs de (x,y) l'intégrale

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^t dt}{(xe^t+1)(ye^t+1)},$$

est-elle convergente ? Etudier la continuité de f.

Exercice 4. Montrer que si f est différentiable au point a, alors f est continue en a. Réciproque?

Exercice 5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x \neq y \\ f'(x), & x = y \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}^2$.
b) Si $f''(a)$ existe, g est-elle différentiable en (a,a)?

Exercice 6. Montrer que si E et F sont deux espaces vectoriels normés quelconques et si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, alors on a équivalence entre les trois propositions suivantes:
$(i) f$ continue en 0.
$(ii) \exists C > 0 : \| f(x) \|_F \leq C \| x \|_E$.
$(iii) f$ uniformément continue.

Exercice 7. Montrer que si f est différentiable en a, alors f est dérivable suivant tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$ et

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df(a)u,$$

pour chaque u de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8. Montrer que si f est différentiable au point a, alors les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existent et on a

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Réciproque ?

Exercice 9. Quelle est la valeur approchée de $(1,02)^{3,01}$?

Exercice 10. Montrer que si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ de f existent dans un voisinage de a et sont continues en a, alors f est différentiable en a. Réciproque ?

Exercice 11. Montrer que si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent au point (a,b) et que l'une est continue au point (a,b), alors f est différentiable en (a,b).

<u>Exercice</u> 12. On considère une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. On pose,

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad F(x,y)=f(\cos x^2, xy, f(y,y,y)).$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F par rapport à x et à y en un point $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On exprimera les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

<u>Exercice</u> 13. Soient $a\in E$ (evn de dim n), Ω un voisinage de a et $f:\Omega\longrightarrow F$ (evn de dim p). Posons $b=f(a)$ et soit Δ un voisinage de b et $g:\triangle\longrightarrow G$ (evn de dim q). On suppoe que f est différentiable en a et g est différentiable en b. Montrer que $g\circ f$ est différentiable en a et

$$d(g\circ f)(a)=dg(b)\circ df(a).$$

<u>Exercice</u> 14. Montrer qu'exprimé en terme de matrice jacobienne, l'exercice précédent fournit le résultat suivant:

$$J_{g\circ f}(a)=J_g(f(a)).J_f(a)$$

<u>Exercice</u> 15. Soit E un $\mathbb{R}$-evn et Φ l'application $x\mapsto\parallel x\parallel$. L'objet de cet exercice est d'étudier la différentiabilité de l'application Φ.
a) Montrer que Φ n'est pas différentiable en 0.
b) On munit $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne usuelle et on note $\parallel x\parallel=\sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}$. Montrer que Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p\setminus\{0_{\mathbb{R}^p}\}$ et préciser sa différentielle.
c) On munit $\mathbb{R}^2$ de $\parallel . \parallel_\infty$. L'application Φ est-elle différentiable?
d) On considère l'espace $\{a=(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\sum_{n=0}^\infty a_n \text{est abs. conv.}\}$ muni de la norme $\parallel x\parallel=\sum_{n=0}^\infty\mid x_n\mid$. L'application Φ est-elle différentiable?

<u>Exercice</u> 16. Calculer la dérivée de

$$g(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt,$$

en supposant a,b,f de classe convenable là où il faut.

<u>Exercice</u> 17. Soit $M_n(n,\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n\times n$. Montrer que l'application:

$$M_n(n,\mathbb{K})\longrightarrow M_n(n,\mathbb{K}),\quad M\longmapsto M^p,\quad p\in\mathbb{N}^*,$$

est différentiable en tout point. Quelle est sa différentielle?

<u>Exercice</u> 18. Soit $GL_n(n, \mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles.
a) Montrer que l'application:

$$f : GL_n(n, \mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(n, \mathbb{K}), \quad M \longmapsto M^{-1},$$

est différentiable en tout point et que

$$\forall (A, H) \in GL_n(n, \mathbb{K})^2 : df(A)(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$$

b)Montrer que l'application:

$$g : GL_n(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad M \longmapsto \det M,$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point et que

$$\forall (A, H) \in GL_n(n, \mathbb{K})^2 : dg(A)(H) = \det A.\mathrm{Tr}(A^{-1}H).$$

<u>Exercice</u> 19. Montrer que pour tout opérateur linéaire $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, ona

$$\det(I + tA) = 1 + t\mathrm{tr}A + o(t^2), \quad t \to 0$$

où I est la matrice unité et $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ est la trace de la matrice associée à l'opérateur A par rapport à une base quelconque. En déduire que la trace ne dépend pas de la base.

<u>Exercice</u> 20. Soit Ω un ouvert de E, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \Omega$, $h \in E$ tels que le segment $[a, a+h] = \{a + th : 0 \leq t \leq 1\}$ soit inclus dans Ω. On suppose que f est différentiable sur Ω. Montrer qu'il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que:

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h),$$

avec $h = (h_1, ..., h_n) \in E$.

<u>Exercice</u> 21. Soit Ω un ouvert de E, $f : \Omega \longrightarrow F$ une application, $a \in \Omega$, $h \in E$ tels que le segment $[a, a+h]$ soit inclus dans Ω. On suppose que f est continue sur $[a, a+h]$, différentiable sur $]a, a+h[$ et que :

$$\exists M, \forall x \in]a, a+h[, \| df(x) \| \leq M.$$

Montrer que :

$$\| f(a + h) - f(a) \| \leq M \| h \| .$$

<u>Exercice</u> 22. Montrer que le système dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\sin(x+y) \\ y = \dfrac{1}{2}\cos(x-y) \end{cases}$$

admet une solution unique.

<u>Exercice</u> 23. Soit Ω un ouvert convexe de E, $f : \Omega \longrightarrow F$ une application différentiable dans Ω. Supposons qu'il existe

$$M = \sup\{\| \, df(x) \, \|; \quad x \in \text{int}\Omega\} < +\infty,$$

tel que :

$$\forall x \in \Omega, \quad \| \, df(x) \, \| \leq M.$$

Montrer que f est lipschitzienne sur Ω.

<u>Exercice</u> 24. Soit $\Omega \subset E$, un ouvert et soit (f_n) une suite de fonctions définies sur Ω à valeurs dans F, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $f : \Omega \longrightarrow F$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ telles que :

i) (f_n) converge simplement vers f sur Ω.

ii) (f'_n) converge uniformément vers g sur tout compact de Ω.

1) Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$ et $f' = g$.

2) Montrer que si Ω est connexe, alors on peut remplacer i) par

$$\exists a \in \Omega, \lim_{n \to +\infty} f_n(a) = f(a).$$

<u>Exercice</u> 25. Soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \text{int}\Omega$. Soient $i \neq j \in \{1, ..., n\}$. Supposons que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent en tous les points d'un voisinage U de a et que ces deux fonctions sont continues en a.

1) Montrer que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

2) Plus généralement, Montrer que si $f; \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert Ω et si σ est une permutation de $\{1, 2, ..., k\}$, alors

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} ... \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(k)}} ... \partial x_{i_{\sigma(2)}} \partial x_{i_{\sigma(1)}}}.$$

<u>Exercice</u> 26. Soit $a \in E$, Ω un voisinage de a et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $h \in E$, tel que le segment $[a, a+h]$, soit contenu dans Ω. On suppose que $f \in \mathcal{C}^{r+1}$

sur Ω. Montrer qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}(a)h_{i_1}h_{i_2} + ... \\ &+ \frac{1}{r!}\sum_{i_1,...,i_r=1}^{n} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r}...\partial x_{i_1}}(a)h_{i_1}...h_{i_r} \\ &+ \frac{1}{(r+1)!}\sum_{i_1,...,i_{r+1}=1}^{n} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_{i_{r+1}}...\partial x_{i_1}}(a+\theta h)h_{i_1}...h_{i_{r+1}}. \end{aligned}$$

Exercice 27. Quelle est la valeur approchée de $(0,95)^{2,01}$?

Exercice 28. Soit Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow E$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x_0 \in \Omega$, $b_0 = f(x_0)$. Supposons que $df(x_0)$ soit inversible.
1) Montrer qu'il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 et un voisinage $V(b_0)$ de b_0 tels que la restriction de f à $U(x_0)$ soit une bijection de $U(x_0)$ sur $V(b_0)$.
2) Montrer que la réciproque $f^{-1} : V(b_0) \longrightarrow U(x_0)$, est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 29. Soit $\Omega \subset E$, un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow E$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x_0 \in \Omega$, $b_0 = f(x_0)$. Supposons que : $\forall x \in \Omega$, $df(x)$ est un isomorphisme. Montrer que :
a) $\Delta \subset \Omega$, ouvert$\Longrightarrow f(\triangle) \subset E$, ouvert.
b) f injective au voisinage de chaque point de Ω.
c) f peut ne pas être injective sur Ω tout entier même si Ω est connexe.

Exercice 30. Soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow E$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω et supposons que $df(x)$ est un isomorphisme pour tout $x \in \Omega$. Montrer que $f(\Delta)$ est ouvert dans E pour chaque ouvert $\Delta \subset \Omega$.

Exercice 31. Sous les hypothèses de l'exercice précédent, montrer que
a) f est injective au voisinage de chaque point de Ω.
b) f peut ne pas être injective sur Ω tout entier (même lorsque Ω est connexe).

Exercice 32. Plaçons nous dans la situation du théorème d'inversion locale dont nous utilisons les notations (voir cours) : Ω, f, x_0, U, V et f_1. Montrer que pour tout voisinage ouvert $W \subset U$ de x_0, $f(W)$ est un voisinage ouvert de $f(x_0)$, et f est bijective de W sur $f(W)$ avec une réciproque de classe $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{C}^k$ si f l'est).

Exercice 33. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(a,b) \in \Omega$. Supposons que :

(i) $g(a,b) = 0$.

(ii) la matrice $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{1\leq i,j\leq p}$ est inversible.

Montrer qu'il existe un voisinage $U(a)$ de a dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage $V(b)$ de b dans $\mathbb{R}^p$, avec $U(a) \times V(b) \subset \Omega$, tels qu'il existe une fonction unique $f : U(a) \longrightarrow V(b)$, avec

(i)' $b = f(a)$.

(ii)' $g(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in U(a)$.

Cette fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$, f est de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 34. On considère la relation :

$$g(x_1, ..., x_n, y) = 0,$$

où $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ avec $g(a, b) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Montrer que qu'il existe f définie et de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}.$$

Exercice 35. On considère deux surfaces d'équations :

$$x^2(y^2 + z^2) = 2,$$

et

$$(x - z)^2 + y^2 = 1.$$

Peut-on représenter la courbe intersection de ces surfaces par des équations de la forme $y = f_1(x)$ et $z = f_2(x)$ au voisinage du point $(1, 1, 1)$? Si oui, calculer $f_1'(1)$ et $f_2'(1)$.

Exercice 36. On considère la courbe d'équation :

$$g(x, y) = y^2 - 2x^3 - x^2 = 0.$$

Peut-on représenter cette courbe par une équation $x = f(y)$.
a) au voisinage du point $(1, \sqrt{3})$?
b) au voisinage du point $(0, 0)$?
Si oui, calculer ladérivée de f au point considéré.

Exercice 37. On suppose que les variables réelles x, y, z sont liées par la relation $f(x, y, z) = 0$. Montrer que sous des hypothèses à préciser

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

<u>Exercice</u> 38. On considère la surface d'équation :

$$xy - z\ln y + \exp xz = 1.$$

Cette surface peut-elle être représentée,
a) par une équation de la forme $z = f(x, y)$ au voisinage du point $(0, 1, 1)$?
b) par une équation de la forme $y = h(x, z)$ au voisinage du point $(0, 1, 1)$?
Si oui, calculer les dérivées premières de f et h au point considéré.

<u>Exercice</u> 39. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y) = (x^2 - y^2 - 2xy, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Montrer que f définit une bijection de $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ sur $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + 2v^2 > 0\}$.
2) f est-elle un homéomorphisme de U sur V?
3) f est-elle un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur V?
4) Soit g une fonction continument dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et h l'application

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow h(x, y) = g(x^2 - y^2 - 2xy) \in \mathbb{R}.$$

4.1) Calculer $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y}$.
4.2) Montrer l'égalité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x + y)\frac{\partial h}{\partial x} + (x - y)\frac{\partial h}{\partial y} = 0. \qquad (*)$$

4.3) On cherche les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité (*).
(i) Soit h_1 une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'égalité (*). Montrer que l'application g_1 :

$$(u, v) \in V \longmapsto g_1(u, v) = h_1 \circ f(u, v) \in \mathbb{R},$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\dfrac{\partial g_1}{\partial v} = 0$.
(ii) On admet que si une fonction H de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}$ vérifie $\dfrac{\partial H}{\partial v} = 0$ alors H ne dépend pas de la variable u.
En déduire la forme générale des fonctions vérifiant l'égalité (*) dans U.

<u>Exercice</u> 40. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable injective. Montrer que f est un difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$ si et seulement si le rang de f en tout point de Ω est n.

Exercice 41. Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow F$ une application différentiable de rang constant r. Montrer que pour tout $a \in \Omega$, il existe

(i) un voisinage ouvert $U(a)$ de a dans Ω.

(ii) un voisinage ouvert $V(b)$ de $b = f(a)$ dans F, contenant $f(U(a))$.

(iii) un difféomorphisme local $g : U(a) \longrightarrow W$ de E et un difféomorphisme local $h : V(b) \longrightarrow W'$ de F.

tels que l'on ait :

$$(h \circ f \circ g^{-1})(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0), \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in W.$$

Exercice 42. Montrer qu si f est différentiable en x et homogène de degré α, alors on a la formule d'Euler :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \alpha f(x).$$

Exercice 43. Déterminer $f : (\mathbb{R}_+^*)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ homogène de degré α en (y, z), β en (z, x) et γ en (x, y).

Exercice 44. Soit E, F deux espaces vectoriels réels normés et $f :\longrightarrow F$ vérifiant

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in E.$$

On suppose que f est bornée sur la boule unité de E. Montrer que :

a) $\forall \lambda \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

b) f est continue en tout point de E.

c) f est linéaire.

Exercice 45. On appelle cône (positif) d'un evn E une partie C de E vérifiant: $\forall x \in E, \forall \lambda > 0, \lambda x \in C$. Vérifier que

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \geq 0\},$$

est un cône positif et que

$$f : (x, y) \longmapsto \sqrt{y - x},$$

est homogène (préciser son degré).

Exercice 46. Déterminer les fonctions φ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que:

$$\varphi(\frac{x}{y}) = f(x)g(y).$$

Exercice 47. Montrer que si f est différentiable en a et présente un extremum en a, alors $df(a) = 0$.

Exercice 48. Soit Ω un ouvert de E, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ tel que : $df(a) = 0$.
1) Montrer que si $d^2 f(a)$ est une forme quadratique définie positive, alors f possède un minimum local au point a.
2) Montrer que si $d^2 f(a)$ est une forme quadratique définie négative, alors f possède un maximum local au point a.
3) Montrer que si la forme quadratique $d^2 f(a)$ est indéfinie, alors f n'a pas d'extremum au point a.

Exercice 49. Montrer que si f possède un minimum local (resp. un maximum local) au point a, alors $d^2 f(a)$ est semi-définie positive (resp. semi-définie négative).

Exercice 50. Soit Ω un ouvert de E, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ tel que : $df(a) = 0$.
1) Montrer que si les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f, a)$ sont strictement positives, alors f possède un minimum local au point a.
2) Montrer que si les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f, a)$ sont strictement négatives, alors f possède un maximum local au point a.
3) Montrer que s'il existe deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de $H(f, a)$ de signe contraire, f ne possède ni maximim ni minimum local au point a.

Exercice 51. Dans les hypothèses de la proposition précédente, montrer que:
1) Si f possède un minimum local au point a, toutes les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f, a)$ sont positives ou nulles.
2) Si f possède un maximum local au point a, toutes les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f, a)$ sont négatives ou nulles.

Exercice 52. Déterminer les extremums de la fonction :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Exercice 53. Soit $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$. On suppose que la différentielle de g est non nulle en tout point de $\mathcal{S}$. Montrer que si f admet un extremum sur $\mathcal{S}$ en $a \in \mathcal{S}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que: $df(a) = \lambda dg(a)$.

Exercice 54. Déterminer les extremums de la fonction :

$$f(x, y) = \sin x . \sin y.$$

Exercice 55. Soient $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \Omega \subset E \longrightarrow F$, deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que f possède au point a un extremum sous les contraintes $g(x) = 0$ et que la matrice jacobienne $J_g(a)$ de g au point a soit de rang p. Montrer qu'il existe des constantes $\lambda_1, ..., \lambda_p$ telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x}(a).$$

<u>Exercice</u> 56. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $f \in \mathbb{R}^n$. On leur associe l'application

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto F(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < f, x > .$$

a) Etudier la différentiabilité de F.
b) Calculer grad$F$.
c) Déterminer les extremums de F.

<u>Exercice</u> 57. Chercher un extremum de la fonction :

$$f(x, y) = x_1^2 + x_2^2,$$

sous la contrainte : $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$.

<u>Exercice</u> 58. Chercher les extremums de la fonction :

$$f(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z,$$

sous la contrainte : $x + y + z = a, \quad (a > 0)$.

<u>Exercice</u> 59. Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = \exp x + \exp y + \exp z,$$

lorsque (x, y, z) est soumis à la contrainte : $x + y + z = 0$.

<u>Exercice</u> 60. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce problème, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et on désigne par f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. On dit que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \forall \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

1) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad g'(x_0) = 0.$$

Montrer que g admet un minimum en x_0.
2) a) Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, la fonction $\varphi_{x,y}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{x,y}(t) = f(x + yt),$$

est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \varphi_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer alors, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \varphi'_{x,y}$ et $\varphi''_{x,y}$ en fonction des dérivées partielles de f.

c) Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $A_x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_x = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2, a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Soit alors ψ_x l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A_x. Montrer que les valeurs propres de A_x sont positives ou nulles si et seulement si $\forall y \in \mathbb{R}^n, \langle \psi_x(y), y\rangle \geq 0$.

d) En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, toutes les valeurs propres de A_x sont vpositives ou nulles.

3) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que si f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ et si $\forall i \in [1,n], \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$, alors f admet un minimum en x_0.

<u>Exercice</u> 61. Montrer que toute équation différentielle d'ordre n sous forme normale peut se ramener à un système de n équations du premier ordre sous forme normale.

<u>Exercice</u> 62. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Montrer qu'une fonction $y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, dont le graphe est inclus dans Ω est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si et seulement si y est continue et satisfait l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))d\tau, \quad \forall t \in I.$$

<u>Exercice</u> 63. a) Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $T : E \to E$ une application contractante. Montrer que T admet un unique point fixe.
b) En déduire que si $T^p = T \circ T \circ ... \circ T$ est contractante, alors T admet un unique point fixe dans E.
c) Montrer que le fait que T^p est une contraction n'implique pas que T en soit une.

<u>Exercice</u> 64. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n, (t,y) \mapsto f(t,y)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Montrer que :
a) Si f(t,y) est lipschitzienne par rapport à y, alors elle est uniformément continue par rapport à y.
b) Si f(t,y) est localament lipschitzienne par rapport à y, alors elle est continue par rapport à y.

c) Si f(t,y) possède des dérivées partielles premières continues par rapport à y, alors elle est localement lipschitzienne dans Ω.
d) Si Ω est connexe et si f(t,y) possède des dérivées partielles en y continues, alors elle est lipschitzienne si et seulement si ses dérivées sont bornées.
e) Si f(t,y) est continue et localement lipschitzienne sur un compact, alors elle est lipschitzienne sur ce compact.

Exercice 65. Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (t, y) \mapsto f(t, y)$ une fonction localement lipschitzienne par rapport à y. Montrer que pour tout cylindre fermé $S \subset \Omega$, f est lipschitzienne par rapport à y sur S.

Exercice 66. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n, (t, y) \mapsto f(t, y)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et où f est continue en (t,y) et localement lipschitzienne par rapport à y. Montrer que :
a) Pour toute donnée de Cauchy $(t_0, y_0) \in \Omega$, il existe un intervalle fermé I centré en t_0 et une solution locale $y : I \to \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ telle que : $y(t_0) = y_0$.
b) Cette solution est de classe $\mathcal{C}^1$ et est unique.

Exercice 67. Montrer que le problème de Cauchy

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

$$y(t_0) = y_0, ..., y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)},$$

admet localement une solution unique, lorsque f est continue en $(t, y, y', ..., y^{(n-1)})$ et localement lipschitzienne en $(y, y', ..., y^{(n-1)})$.

Exercice 68. Soit $x(t) = y_0$ et la suite $x(t), x_1(t), ..., x_p(t), ...$ où

$$x_p(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{p-1}(\tau))d\tau,$$

et où les hypothèses de l'exercice 6 sont satisfaites. Montrer que :
a) La suite $(x_p(t))$ converge uniformément sur $[t_0 - l, t_0 + l]$ vers l'unique solution $y(t)$ de l'équation $y' = f(t, y)$ telle que : $y(t_0) = y_0$.
b) Que peut on dire de $\|x_p(t) - y(t)\|_\infty$?

Exercice 69. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n, (t, y) \mapsto f(t, y)$, une fonction continue en (t,y) et localement lipschitzienne en y sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$ une donnée de Cauchy. Montrer qu'il existe une et un seule solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$ passant par (t_0, y_0). Les bouts droits et gauches (s'ils existent) sont inclus dans le bord de Ω.

Exercice 70. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω un ouvert dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, f est continue. Montrer que pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$, il existe localement une solution $y : I \to \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ telle que : $y(t_0) = y_0$.

<u>Exercice</u> 71. On suppose que $f(t,y)$ est continue dans un cylindre et qu'en outre
$$|t-t_0|.\|f(t,y_2)-f(t,y_1)\| \leq \|y_2-y_1\|.$$
Montrer que l'équation $y' = f(t,y)$ possède une solution unique pour la donnée de Cauchy $y(t_0)=y_0$.

<u>Exercice</u> 72. Montrer que le problème de Cauchy
$$y' = \exp(-t^2) + y^2, \quad y(0) = 0,$$
admet une solution unique pour $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

<u>Exercice</u> 73. Déterminer toutes les applications f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda - x).$$

<u>Exercice</u> 74. Soit l'équation différentielle
$$ty' + (1-t)y = \frac{t\exp t}{t^2+1},$$
a) Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
b) Montrer qu'il existe une solution de cette équation et une seule définie sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice</u> 75. Résoudre les équations suivantes :
a) $y' + \frac{t}{1-t^2}y = \arcsin t + t$.
b) $ty' = t + y$.
c) $(t+2y-1)y' + (2t+y+1)$.
d) $(2t+2y-1)y' + (t+y+2)$.
e) $y' - 2ty = -ty^2$.
f) $2t + 3t^2y + (t^3 - 3y^2)y' = 0$.
g) $2y + t(2+y)y' = 0$.
h) $y - (t+1)y'^2$.
i) $y - ty' + \exp y' = 0$.
j) $ty' + y - t^3y^4 = 0$.
k) $(t^2 \ln y - t)y' - y = 0$.
l) $(4t-1)^2y'' - 2(4t-1)y' + 8y = 0$.
m) $ty'' - y'\ln y' + y'\ln t = 0$.
n) $yy'' - y'^2 - 1 = 0$.
o) $(2t+y^3)y' - y = 0$.

<u>Exercice</u> 76. Montrer que le problème de Cauchy
$$\begin{cases} x'' = \sin x \\ x(0) = \frac{\pi}{4} \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$
admet une solution unique.

<u>**Exercice**</u> **77.** Soient $A = (a_{jk})$ et $b = (b_j)$, $n^2 + n$ fonctions continues de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le système $y' = A(t)y + b(t)$ admet pour toute donnée de Cauchy $y(t_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ une solution maximale unique définie sur tout I.

<u>**Exercice**</u> **78.** Montrer que l'ensemble des solutions d'un système homogène $y' = A(t)y$, où la matrice $A(t)$ est formée de n^2 fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$, est un espace vectoriel de dimension n.

<u>**Exercice**</u> **79.** Soit $R(t;t_0)$ la matrice résolvante du système défini dans l'exercice précédent. Montrer que :
a)$R(t;t_0) = Id$.
b)$R(t;s) = R(s;r) = R(t;r)$.
c)La matrice $R(t;s)$ est inversible et $R^{-1}(t;s) = R(s;t)$.

<u>**Exercice**</u> **80.** Montrer qu'un ensemble $(v_1, ..., v_n)$ de n solutions du système (exercice 15), est un système fondamental si et seulement si $\forall t \in I$, $(v_1(t), ..., v_n(t))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour un $t_0 \in I$, $(v_1(t_0), ..., v_n(t_0))$ est une base de $\mathbb{R}^n$

<u>**Exercice**</u> **81.** Montrer que la matrice résolvante $R(t;t_0)$ du système défini dans l'exercice 15, est l'unique fonction $I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ solution du système de $n \times n$ équations différentielles linéaires $R'(t;t_0) = A(t)R(t;t_0)$ pour la donnée de Cauchy : $R(t_0;t_0) = Id$.

<u>**Exercice**</u> **82.** (Equation de Jacobi-Liouville). Montrer que

$$\det R(t;t_0) = e^{\int_{t_0}^t trA(\tau)d\tau},$$

où $trA(\tau)$ désigne la matrice $A(\tau)$, ou pour toute matrice fondamentale $V(t)$,

$$\det V(t) = \det V(t_0) e^{\int_{t_0}^t trA(\tau)d\tau}.$$

<u>**Exercice**</u> **83.** Supposons que $A(t)$ et $A(s)$ commutent $\forall t, s \in I$. Montrer que

$$R(t;t_0) = e^{\int_{t_0}^t trA(\tau)d\tau}.$$

<u>**Exercice**</u> **84.** Montrer que l'espace des solutions du système :

$$y' = A(t)y + b(t),$$

est un sous-espace affine de dimension n de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$, obtenu en faisant la somme de l'ensemble des solutions du système homogène $y' = A(t)y$ et d'une solution quelconque du système non homogène.

<u>Exercice</u> 85. Montrer que la solution du système :

$$y' = A(t)y + b(t),$$

satisfaisant $y(t_0) = y_0$ est donnée par

$$y(t) = R(t;t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t;\tau)b(\tau)d\tau,$$

où $R(t;\tau)$ est la matrice résolvante du sytème homogène.

<u>Exercice</u> 86. On considère l'équation linéaire d'ordre n,

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{(n-1)}(t)y' + a_n(t)y = b(t),$$

où les $a_0 \neq 0, a_1(t), ..., a_n(t), b(t)$ sont des fonctions continues définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
a) Montrer que pour chaque $t_0 \in I$ et chaque point $(u_0, u_1, ..., u_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique $y : I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto y(t)$, de l'équation différentielle ci-dessus définie sur I et satisfaisant aux conditions initiales :

$$y(t_0) = u_0, y'(t_0) = u_1, ..., y^{(n-1)}(t_0) = u_{(n-1)}.$$

b) Montrer que l'ensemble S des solutions de l'équation linéaire homogène :

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{(n-1)}(t)y' + a_n(t)y = 0,$$

est un espace vectoriel de dimension n. Pour chaque $t_0 \in I$, la fonction associant à une solution y, le n-uple $(y(t_0), y'(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0))$ est une bijection linéaire de S sur $\mathbb{R}^n$.
c) Que devient l'équation de Jacobi-Liouville de l'exercice 82.

<u>Exercice</u> 87. On rappelle que l'exponentielle e^A d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est définie par la série :

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

a) Montrer que cette série converge normalement.
b) Montrer que pour une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

on a

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

c) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K}$. Montrer que si A et B commutent, alors

$$e^A.e^B = e^{A+B} = e^B.e^A.$$

d)Montrer que pour $A \in M_n(\mathbb{K}$ et $P \in GL_n(\mathbb{K}$, on a

$$e^A = P^{-1}.e^{PAP^{-1}}.P$$

e) Montrer que : $(e^{At})' = Ae^{At}$.
e) Montrer que : $\det e^A = e^{trA}$.

<u>Exercice</u> 88. Montrer que la solution générale du système homogène à coefficients constants : $y' = Ay$ est donnée par

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}^n,$$

et que c'est l'unique solution satisfaisant à la condition initiale : $y(t_0) = y_0$.

<u>Exercice</u> 89. Reprenons le système de l'exercice précédent.
a) On suppose que la matrice A est diagonalisable. Soit $(V_1, ..., V_n)$ une base de vecteurs propres pour A et soit $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associées. Montrer que l'ensemble $(e^{\lambda_1 t}V_1, ..., e^{\lambda_n t}V_n)$ forme un système fondamental de solutions.
b) Montrer que si la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, il suffit dans la famille génératrice des solutions de remplacer, pour les valeurs non réelles, $\alpha e^{\lambda t}V + \beta e^{\overline{\lambda} t}\overline{V}$ par $aRe(e^{\lambda t}V) + bIm(e^{\lambda t}V)$.
c) Que peut-on dire si la matrice A est triangularisable ou réduite sous forme de Jordan ?

<u>Exercice</u> 90. Intégrer les systèmes différentiels

$$a) \begin{cases} y_1{}' &= y_1 + 5y_2 \\ y_2{}' &= y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y_1{}' &= 6y_1 - 12y_2 - y_3 \\ y_2{}' &= y_1 - 3y_1 - y_3 \\ y_3{}' &= -4y_1 + 12y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

Exercice 91. Résoudre matriciellement le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 0.$$

Exercice 92. Intégrer les systèmes différentiels

$$a) \begin{cases} y_1' &= 5y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= -2y_1 - y_3 \\ y_3' &= 2y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

Exercice 93. Intégrer les systèmes différentiels

$$a) \begin{cases} y_1' &= 4y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y_1' &= y_1 - y_3 \\ y_2' &= y_1 \\ y_3' &= y_1 - y_2 \end{cases}$$

Exercice 94. Intégrer le système différentiel

$$\begin{cases} y_1' &= 4(y_1 + y_2) \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

et trouver la solution particulière telle que: $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$.

Exercice 95. Intégrer les systèmes différentiels

$$a) \begin{cases} y_1' &= y_2 - 5\cos t \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y_1' &= 4y_1 - y_2 + e^{3t}(t + \sin t) \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 + xe^{3t}\cos t \end{cases}$$

Exercice 96. Déterminer deux intégrales premières du système

$$\begin{cases} y_1' &= y_3 - y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_3 \\ y_3' &= y_2 - y_1 \end{cases}$$

Exercice 97. Même question pour le système

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}.$$

Exercice 98. Les équations du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe s'écrivent, dans le cas d'Euler, sous la forme

$$m_1' = (\lambda_3 - \lambda_2)\, m_2 m_3,$$

$$m_2' = (\lambda_1 - \lambda_3)\, m_1 m_3,$$

$$m_3' = (\lambda_2 - \lambda_1)\, m_1 m_2,$$

où m_1, m_2, m_3 sont les composantes du moment angulaire du solide et $\lambda_i \equiv I_i^{-1}$ avec I_1, I_2, I_3 les moments d'inertie du solide. Ici le point fixe est le centre de gravité du solide.
a) Déterminer les intégrales premières du problème.
b) Résoudre explicitement le système en question.

Exercice 99. Montrer qu'une fonction est une intégrale première d'un système différentiel si et seulement si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles associée.

Exercice 100. Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Interprétation géométrique ?

Exercice 101. Intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = z.$$

Exercice 102. Soit Ω l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\},$$

$\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et

$$E = \{f \in \mathcal{C}, \forall (x,y) \in \Omega, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\}.$$

1) Soit φ la fonction définie sur Ω par :

$$\forall (x,y) \in \Omega, \varphi(x,y) = \frac{y}{x}.$$

a) Montrer que $\varphi \in E$.

b) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(g \circ \varphi) \in E$.

2) a) Soient $f \in E$ et g la fonction définie sur Ω par :

$$\forall (x, y) \in \Omega, g(x, y) = f(x, xy).$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et montrer que $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$. Que peut-on en conclure ?

b) Soit f une fonction définie sur Ω. Montrer que si $f \in E$, alors il existe une fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $f = h \circ \varphi$. Conclure.

Exercice 103. Intégrer

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Exercice 104. Soit $z = f(x, y)$. Déterminer la surface vérifiant l'équation

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy,$$

et passant par la circonférence

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Exercice 105. Déterminer la surface générale de l'équation

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = -xy,$$

et la surface intégrale passant par la courbe

$$\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$$

Exercice 106. Déterminer la surface vérifiant l'équation

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 4,$$

et passant par la parabole

$$\begin{cases} y^2 = z \\ x = 0 \end{cases}$$

<u>Exercice</u> 107. Montrer que toute solution de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

est de la forme

$$z = g(x-t) + h(x+t),$$

où g et h sont des fonctions quelconques de classe $\mathcal{C}^2$.

<u>Exercice</u> 108. Etant données deux fonctions $u \in \mathcal{C}^2[a,b]$ et $v \in \mathcal{C}^2[a,b]$, trouver une solution $z(x,t)$ de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

telle que pour $t = 0$ et $x \in [a,b]$,

$$\begin{cases} z(x,0) = u(x) \\ \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,0) = v(x). \end{cases}$$

<u>Exercice</u> 109. Intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x + y,$$

<u>Exercice</u> 110. Déterminer les fonctions

$$f : \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi > \eta\} \longrightarrow \mathbb{R},$$

de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(f + \eta\frac{\partial f}{\partial \eta}) = \frac{\partial}{\partial \eta}(f + \xi\frac{\partial f}{\partial \xi}).$$

<u>Exercice</u> 111. Déterminer la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (1+y^2)z,$$

vérifiant les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} z(0,y) = y \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(0,y) = 0. \end{cases}$$

Exercice 112. On considère l'équation aux dérivées partielles de fonction inconnue $z(x,y)$:

$$x^4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

a) Déterminer ses caractéristiques.
b) Former l'intégrale générale de cette équation.
c) Déterminer des solutions élémentaires de cette équation par la méthode de séparation des variables.

Exercice 113. Résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}-6\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0.$$

Exercice 114. Déterminer la solution $z(x,t)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\sin(\alpha x-\omega t),$$

qui satisfait aux conditions :

$$\left\{\begin{array}{c} z(x,0)=0) \\ \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,0)=0. \end{array}\right.$$

Exercice 115. Etant donné un domaine D dont le bord ∂D est une courbe et $\varphi:\partial D\to\mathbb{R}$ une fonction continuen, chercher une fonction $f\in\mathcal{C}^0(\overline{D})\cap\mathcal{C}^2(D)$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{cl} \Delta f & =0 \quad \text{sur} \quad D \\ f|_{\partial D} & =\varphi. \end{array}\right.$$

Exercice 116. Sous les mêmes hypothèses (exercice précédent) sur D et étant donnée une fonction continue $\psi:\partial D\to\mathbb{R}$, chercher une fonction $f\in\mathcal{C}^1(\overline{D})\cap\mathcal{C}^2(D)$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{cl} \Delta f & =0 \quad \text{sur} \quad D \\ \partial_\nu f|_{\partial D} & =\psi. \end{array}\right.$$

(∂_ν représente la dérivation suivant le vecteur unitaire normal extérieur).