

CALCULS EXPLICITES DANS L'ÉTUDE DES VARIÉTÉS DE PRYM

A. Lesfari

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences

Université Chouaïb Doukkali

B.P. 20, El-Jadida, Maroc.

E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Cette note est consacrée à l'étude explicite d'un aspect important de la géométrie analytique algébrique complexe à travers la théorie des tores complexes et des variétés de Prym [8,2,7]. Celles-ci apparaissent comme sous-variétés de certaines variétés jacobiniennes et rentrent dans une classe générale de variétés abéliennes, c'est-à-dire qui se plongent de façon holomorphe dans un espace projectif. La théorie des variétés abéliennes complexes et en particulier les variétés de Prym joue un rôle crucial dans plusieurs recherches actuelles (problème de Schottky [3], systèmes intégrables,...), leur géométrie se révèle très riche et un des intérêts d'avoir une description explicite des variétés de Prym est la possibilité de les appliquer à la théorie moderne des systèmes dynamiques algébriquement intégrables [1,4,5,6,7]. On considère deux courbes algébriques complexes lisses \mathcal{C} , \mathcal{C}_0 et une involution σ sur \mathcal{C} échangeant les feuillets d'un revêtement $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0$ double ramifié le long de \mathcal{C}_0 et tel que φ identifie \mathcal{C}_0 au quotient \mathcal{C}/σ . L'involution σ induit une involution sur la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$ et on montre que modulo un sous-groupe discret, la variété $Jac(\mathcal{C})$ se décompose en deux parties : une partie paire qui est $Jac(\mathcal{C}_0)$ et une partie impaire qui n'est autre que la variété de Prym $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$. Nous déterminons explicitement les matrices des périodes associées à $Jac(\mathcal{C}_0)$, $Jac(\mathcal{C})$, $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ ainsi qu'au dual $Prym^*(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$.

Théorème 1 *Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}_0 deux courbes algébriques complexes lisses, $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0$, un revêtement double étale et $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, l'involution échangeant les feuillets du revêtement φ tel que celui-ci identifie \mathcal{C}_0 au quotient \mathcal{C}/σ . On note encore σ l'automorphisme induit sur la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$. Alors modulo un sous-groupe discret, la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$ se décompose en*

deux parties : une partie paire $Jac(\mathcal{C}_0)$ et une partie impaire notée $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ avec

$$Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) = \left(H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^1)^- \right)^* / H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z})^-,$$

où $\Omega_{\mathcal{C}}^1$ est le faisceau des 1-formes différentielles holomorphes sur \mathcal{C} , l'exposant $-$ désigne la partie fixe sous $-\sigma$ et $*$ le dual. Plus précisément, on a

$$Jac(\mathcal{C}) = Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) \oplus Jac(\mathcal{C}_0),$$

avec

$$\begin{aligned} \dim Jac(\mathcal{C}_0) &= g_0 = \text{genre de } \mathcal{C}_0, \\ \dim Jac(\mathcal{C}) &= g = 2g_0 + n - 1 = \text{genre de } \mathcal{C}, \\ \dim Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) &= g - g_0 = g_0 + n + 1, \end{aligned}$$

où $2n$ désigne le nombre de points de branchement. En outre si

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ G & H & I & J & K & L \end{pmatrix},$$

est la matrice des périodes de la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$ où A, \dots, L désignent les matrices en bloc (1), alors les matrices des périodes de $Jac(\mathcal{C}_0)$, de $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ et du dual $Prym^*(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ de $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$, sont respectivement

$$\begin{aligned} \Delta &= (G \quad H), \\ \Gamma &= (2A \quad B \quad 2D \quad E), \end{aligned}$$

et

$$\Gamma^* = (A \quad B \quad D \quad E).$$

Démonstration : Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur \mathcal{C} . On note $S^g(\mathcal{C})$ l'ensemble des diviseurs positifs sur la courbe \mathcal{C} et on définit sur cet ensemble une relation d'équivalence : $\mathcal{D}_1 \equiv \mathcal{D}_2$ si et seulement si il existe une fonction méromorphe f telle que $(f) = \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$ ou ce qui revient au même si et seulement si

$$\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega = \int_{\gamma} \omega, \quad \forall \omega \in \Omega_{\mathcal{C}}^1,$$

avec γ un chemin fermé sur \mathcal{C} . La variété jacobienne de \mathcal{C} , est

$$Jac(\mathcal{C}) = S^g(\mathcal{C}) / \equiv .$$

Autrement dit, on a

$$Jac(\mathcal{C}) = Pic^0(\mathcal{C}) = \{\text{fibrés en droites de degré zéro}\}.$$

Cette variété est un tore complexe de dimension g . En effet, en utilisant la suite exponentielle exacte de faisceaux ainsi que la dualité, on montre que

$$\begin{aligned} \text{Jac}(\mathcal{C}) &= H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}) / H^1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}), \\ &\simeq H^1(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^1) / H^1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}), \\ &\simeq H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^1)^* / H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z}), \\ &\simeq \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^{2g}. \end{aligned}$$

On a une application naturelle (Abel), donnée par

$$S^g(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^g / L_{\Omega}, \quad \sum_{k=1}^g \mu_k \longmapsto \sum_{k=1}^g \int^{\mu_k(t)} (\omega_1, \dots, \omega_g) = t(k_1, \dots, k_g),$$

où $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ est une base de $\Omega_{\mathcal{C}}^1$, L_{Ω} est le réseau défini par la matrice des périodes Ω et μ_1, \dots, μ_g sont des fonctions définies sur un ouvert de Zariski par des relations algébriques. Par exemple, dans le cas particulier où \mathcal{C} est hyperelliptique de genre g c'est-à-dire

$$\mathcal{C} = \overline{\{(w, z) : w^2 = P_n(z)\}},$$

avec $P_n(z)$ un polynôme de degré $2g + 1$ ou $2g + 2$, on a

$$\omega_1 = \frac{dz}{\sqrt{P_n(z)}}, \quad \omega_2 = \frac{zdz}{\sqrt{P_n(z)}}, \dots, \quad \omega_g = \frac{z^{g-1}dz}{\sqrt{P_n(z)}},$$

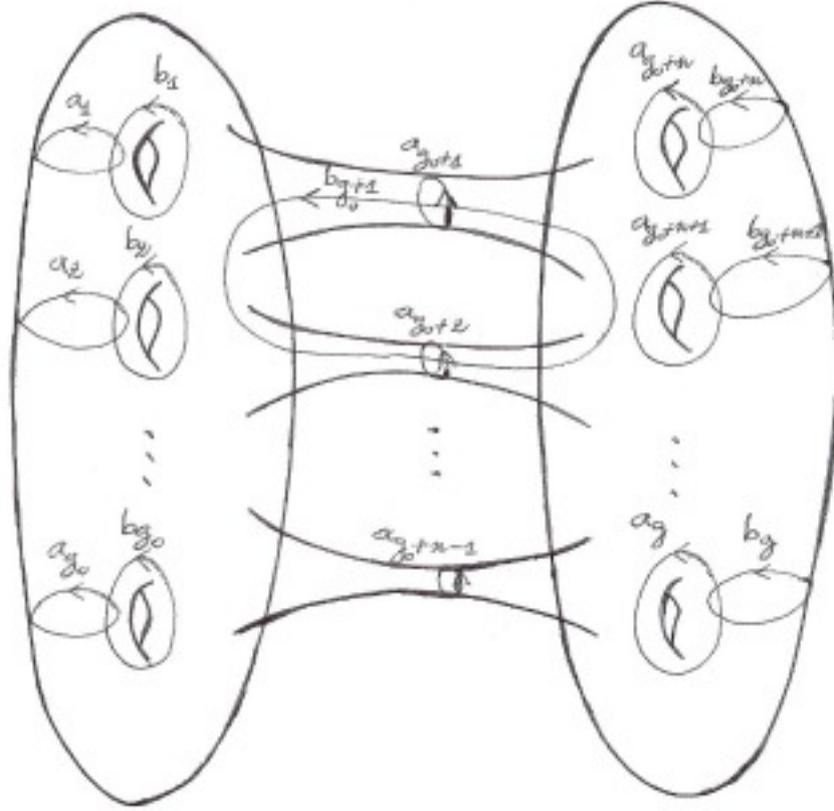
et

$$\sum_{k=1}^g \frac{d\mu_k}{\sqrt{P_{n+1}(\mu_k)}} = k_1 dt, \dots, \quad \sum_{k=1}^g \frac{\mu_k^{g-1} d\mu_k}{\sqrt{P_{n+1}(\mu_k)}} = k_g dt.$$

Notons aussi qu'en genre 2, principalement polarisé équivaut à hyperelliptique ce qui montre que toute surface abélienne est isogène à une jacobienne hyperelliptique. Revenons maintenant aux courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}_0 . Le genre g de \mathcal{C} s'exprime en fonction du genre g_0 de \mathcal{C}_0 à l'aide de la formule de Riemann-Hurwitz, $g = 2g_0 + n - 1$. Soit $(a_1, \dots, a_{g_0}, \dots, a_g, b_1, \dots, b_{g_0}, \dots, b_g)$, une base de cycles de \mathcal{C} de telle façon que les indices d'intersection de cycles deux à deux s'écrivent : $(a_i, b_i) = 1$, $1 \leq i \leq g$, tandis que les autres sont tous égaux à zéro. On a

$$\begin{aligned} \sigma(a_1) &= a_{g_0+n}, \dots, \quad \sigma(a_{g_0}) = a_g, \\ \sigma(a_{g_0+1}) &= -a_{g_0+1}, \dots, \quad \sigma(a_{g_0+n-1}) = -a_{g_0+n-1}, \\ \sigma(b_1) &= b_{g_0+n}, \dots, \quad \sigma(b_{g_0}) = b_g, \\ \sigma(b_{g_0+1}) &= -b_{g_0+1}, \dots, \quad \sigma(b_{g_0+n-1}) = -b_{g_0+n-1}. \end{aligned}$$

Notons que $\varphi(a_{g_0+1}), \dots, \varphi(a_{g_0+n-1}), \varphi(b_{g_0+1}), \dots, \varphi(b_{g_0+n-1})$ sont homologues à zéro dans \mathcal{C}_0 .



Soit $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ une base de différentielles holomorphes sur \mathcal{C} avec $\omega_{g_0+n}, \dots, \omega_g$, des différentielles holomorphes sur \mathcal{C}_0 et

$$\sigma^*(\omega_j) = \begin{cases} -\omega_j, & 1 \leq j \leq g_0 + n - 1, \\ \omega_j, & g_0 + n \leq j \leq g, \end{cases}$$

le pullback de σ . Soit Ω la matrice des périodes de la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$.

On a

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ G & H & I & J & K & L \end{pmatrix},$$

où A, \dots, L désignent les matrices en bloc suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \int_{a_1} \omega_1 & \dots & \int_{a_{g_0}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_1} \omega_{g_0+n-1} & \dots & \int_{a_{g_0}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$B = \begin{pmatrix} \int_{a_{g_0+1}} \omega_1 & \cdots & \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_{g_0+1}} \omega_{g_0+n-1} & \cdots & \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \int_{a_{g_0+n}} \omega_1 & \cdots & \int_{a_g} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_{g_0+n}} \omega_{g_0+n-1} & \cdots & \int_{a_g} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \int_{b_1} \omega_1 & \cdots & \int_{b_{g_0}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{b_1} \omega_{g_0+n-1} & \cdots & \int_{b_{g_0}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} \int_{b_{g_0+1}} \omega_1 & \cdots & \int_{b_{g_0+n-1}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{b_{g_0+1}} \omega_{g_0+n-1} & \cdots & \int_{b_{g_0+n-1}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} \int_{b_{g_0+n}} \omega_1 & \cdots & \int_{b_g} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{b_{g_0+n}} \omega_{g_0+n-1} & \cdots & \int_{b_g} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \int_{a_1} \omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{a_{g_0}} \omega_{g_0+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_1} \omega_g & \cdots & \int_{a_{g_0}} \omega_g \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} \int_{a_{g_0+1}} \omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_{g_0+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_{g_0+1}} \omega_g & \cdots & \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_g \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} \int_{a_{g_0+n}} \omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{a_g} \omega_{g_0+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_{g_0+n}} \omega_g & \cdots & \int_{a_g} \omega_g \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} \int_{b_1} \omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{b_{g_0}} \omega_{g_0+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{b_1} \omega_g & \cdots & \int_{b_{g_0}} \omega_g \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} \int_{b_{g_0+1}} \omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{b_{g_0+n-1}} \omega_{g_0+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{b_{g_0+1}} \omega_g & \cdots & \int_{b_{g_0+n-1}} \omega_g \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} \int_{b_{g_0+n}} \omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{b_g} \omega_{g_0+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{b_{g_0+n}} \omega_g & \cdots & \int_{b_g} \omega_g \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$\begin{aligned} \int_{a_{g_0+1}} \omega_j &= - \int_{\sigma(a_{g_0+1})} \omega_j, \\ &= - \int_{a_{g_0+1}} \sigma^*(\omega_j), \\ &= \begin{cases} \int_{a_{g_0+1}} \omega_j, & 1 \leq j \leq g_0 + n - 1, \\ - \int_{a_{g_0+1}} \omega_j, & g_0 + n \leq j \leq g, \end{cases} \end{aligned}$$

⋮

$$\int_{a_{g_0+n-1}} \omega_j = \begin{cases} \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_j, & 1 \leq j \leq g_0 + n - 1, \\ - \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_j, & g_0 + n \leq j \leq g, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{b_{g_0+1}} \omega_j &= - \int_{\sigma(b_{g_0+1})} \omega_j, \\ &= - \int_{b_{g_0+1}} \sigma^*(\omega_j), \\ &= \begin{cases} \int_{b_{g_0+1}} \omega_j, & 1 \leq j \leq g_0 + n - 1, \\ - \int_{b_{g_0+1}} \omega_j, & g_0 + n \leq j \leq g, \end{cases} \end{aligned}$$

⋮

$$\int_{b_{g_0+1}} \omega_j = \begin{cases} \int_{b_{g_0+1}} \omega_j, & 1 \leq j \leq g_0 + n - 1, \\ - \int_{b_{g_0+1}} \omega_j, & g_0 + n \leq j \leq g, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{a_{g_0+n}} \omega_j &= \int_{\sigma(a_1)} \omega_j, \\ &= \int_{a_1} \sigma^*(\omega_j), \\ &= \begin{cases} - \int_{a_1} \omega_j, & 1 \leq j \leq g_0 + n - 1, \\ \int_{a_1} \omega_j, & g_0 + n \leq j \leq g, \end{cases} \end{aligned}$$

⋮

$$\int_{a_{g_0+n}} \omega_j = \begin{cases} -\int_{a_{g_0}} \omega_j, & 1 \leq j \leq g_0 + n - 1, \\ \int_{a_{g_0}} \omega_j, & g_0 + n \leq j \leq g, \end{cases}$$

$$\int_{b_{g_0+n}} \omega_j = \int_{\sigma(b_1)} \omega_j,$$

$$= \int_{b_1} \sigma^*(\omega_j),$$

$$= \begin{cases} -\int_{b_1} \omega_j, & 1 \leq j \leq g_0 + n - 1, \\ \int_{b_1} \omega_j, & g_0 + n \leq j \leq g, \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\int_{b_g} \omega_j = \begin{cases} -\int_{b_{g_0}} \omega_j, & 1 \leq j \leq g_0 + n - 1, \\ \int_{b_{g_0}} \omega_j, & g_0 + n \leq j \leq g. \end{cases}$$

Dès lors, $C = -A$, $F = -D$, $H = O$, $I = G$, $K = O$, $L = J$, où O est la matrice nulle et donc

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & B & -A & D & E & -D \\ G & O & G & J & O & J \end{pmatrix},$$

$$\equiv (C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6).$$

En effectuant des combinaisons simples sur les cycles ou ce qui revient au même sur les colonnes, on obtient les trois matrices suivantes :

$$\Omega_1 = (C_1 \ C_2 \ C_1 + C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_4 + C_6),$$

$$= \begin{pmatrix} A & B & O & D & E & O \\ G & O & 2G & J & O & 2J \end{pmatrix},$$

$$\Omega_2 = (C_1 \ C_2 \ C_1 - C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_4 - C_6),$$

$$= \begin{pmatrix} A & B & 2A & D & E & 2D \\ G & O & O & J & O & O \end{pmatrix},$$

$$\Omega_3 = (C_1 - C_3 \ C_2 \ C_4 - C_6 \ C_5 \ C_1 + C_3 \ C_4 + C_6),$$

$$= \begin{pmatrix} 2A & B & 2D & E & O & O \\ O & O & O & O & 2G & 2J \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} \Gamma & O \\ O & 2\Delta \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \Delta &= (G \ J), \\ &= \begin{pmatrix} \int_{a_1} \omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{a_{g_0}} \omega_{g_0+n} & \int_{b_1} \omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{b_{g_0}} \omega_{g_0+n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_{a_1} \omega_g & \cdots & \int_{a_{g_0}} \omega_g & \int_{b_1} \omega_g & \cdots & \int_{b_{g_0}} \omega_g \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= (2A \ B \ 2D \ E), \\ &= \begin{pmatrix} 2 \int_{a_1} \omega_1 & \cdots & 2 \int_{a_1} \omega_{g_0+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 2 \int_{a_{g_0}} \omega_1 & \cdots & 2 \int_{a_{g_0}} \omega_{g_0+n-1} \\ \int_{a_{g_0+1}} \omega_1 & \cdots & \int_{a_{g_0+1}} \omega_{g_0+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_1 & \cdots & \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_{g_0+n-1} \\ 2 \int_{b_1} \omega_1 & \cdots & 2 \int_{b_1} \omega_{g_0+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 2 \int_{b_{g_0}} \omega_1 & \cdots & 2 \int_{b_{g_0}} \omega_{g_0+n-1} \\ \int_{b_{g_0+1}} \omega_1 & \cdots & \int_{b_{g_0+1}} \omega_{g_0+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{b_{g_0+n-1}} \omega_1 & \cdots & \int_{b_{g_0+n-1}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix}^T. \end{aligned} \quad (3)$$

Soit

$$L_\Omega = \left\{ \sum_{i=1}^g m_i \int_{a_i} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_g \end{pmatrix} + n_i \int_{b_i} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_g \end{pmatrix} : m_i, n_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

le réseau engendré par \mathbb{Z}^g et les colonnes de la matrice des périodes Ω . De même, on désigne par L_{Ω_1} , L_{Ω_2} , L_{Ω_3} et L_Δ les réseaux correspondants aux matrices Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 et Δ . On a $L_\Omega = L_{\Omega_1} = L_{\Omega_2} = L_{\Omega_3}$. Dès lors, les applications

$$\mathbb{C}^{g_0+n-1}/L_\Gamma : \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{g_0+n-1} \end{pmatrix} \bmod L_\Gamma \hookrightarrow \mathbb{C}^g/L_\Omega : \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{g_0+n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \bmod L_\Omega,$$

$$\mathbb{C}^{g_0}/2L_\Delta : \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{g_0} \end{pmatrix} \text{ mod } 2L_\Delta \hookrightarrow \mathbb{C}^g/L_\Omega : \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{g_0} \end{pmatrix} \text{ mod } L_\Omega,$$

sont injectives. Les tores $\mathbb{C}^{g_0+n-1}/L_\Gamma$ et $\mathbb{C}^{g_0}/2L_\Delta$ possèdent donc un plongement dans \mathbb{C}^g/L_Ω et l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^g/L_{\Omega_3} &= \mathbb{C}^{g_0+n-1}/L_\Gamma \oplus \mathbb{C}^{g_0}/2L_\Delta \longrightarrow \mathbb{C}^g/L_\Omega, \\ \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_g \end{pmatrix} \text{ mod } L_{\Omega_3} &\mapsto \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_g \end{pmatrix} \text{ mod } L_\Omega, \end{aligned}$$

montre que la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C}_0)$ coupe le tore $\mathbb{C}^{g_0+n-1}/L_\Gamma$ en 2^{2g_0} points. D'après ce qui précède, on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C} & & Ker N_\varphi & & & & \\ \downarrow \sigma & & \downarrow & & & & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{u} & Jac(\mathcal{C}) & \xleftarrow{u^*} & Jac^*(\mathcal{C}) & & \\ \downarrow \varphi & & \downarrow N_\varphi & & \uparrow N_\varphi^* & & \\ \mathcal{C}_0 & \xrightarrow{u_0} & Jac(\mathcal{C}_0) & \xleftarrow{u_0^*} & Jac^*(\mathcal{C}_0) & & \\ & & \downarrow \varphi^* & & & & \\ & & Jac(\mathcal{C}) & \subset & H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}^*) & \simeq & H^1(\mathcal{C}_0, (\varphi_* \mathcal{O}_{\mathcal{C}})^*) \\ & & \downarrow \sigma & & & & \downarrow N_\varphi \\ & & Jac(\mathcal{C}) & \xrightarrow{N_\varphi} & Jac(\mathcal{C}_0) & \hookrightarrow & H^1(\mathcal{C}_0, \mathcal{O}_{\mathcal{C}_0}^*) \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} u &: z \mapsto \text{classe des diviseurs}(z - p), \quad p \in \mathcal{C}, \text{ fixé,} \\ u_0 &: z_0 \mapsto \text{classe des diviseurs}(z_0 - p_0), \quad p_0 \in \mathcal{C}_0, \text{ fixé avec } p_0 = \varphi(p), \\ N_\varphi &: Jac(\mathcal{C}) \rightarrow Jac(\mathcal{C}_0), \quad \sum m_i p_i \mapsto \sum m_i \varphi(p_i) \\ &\text{est le morphisme norme.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Jac^*(\mathcal{C}) &= \text{dual de } Jac(\mathcal{C}), \\ Jac^*(\mathcal{C}_0) &= \text{dual de } Jac(\mathcal{C}_0). \end{aligned}$$

Le morphisme norme N_φ est surjective. Les applications u et u_0 déterminent des isomorphismes et à isomorphisme près, la courbe \mathcal{C} (resp. \mathcal{C}_0) dépend de $3g - 3$ (resp. $3g_0 - 3$) paramètres complexes, alors que la variété jacobienne

$Jac(\mathcal{C})$ (resp. $Jac(\mathcal{C}_0)$) dépend de $\frac{1}{2}g(g+1)$ (resp. $\frac{1}{2}g_0(g_0+1)$) paramètres complexes. En outre, la duale $Jac^*(\mathcal{C})$ de $Jac(\mathcal{C})$ est isomorphe à $Jac(\mathcal{C})$. La variété de Prym notée $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ ou $Prym_\sigma(\mathcal{C})$ est définie par

$$Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) = \left(H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^1)^- \right)^* / H_1(\mathcal{C}, \mathbb{Z})^-,$$

où l'exposant $-$ désigne la partie fixe sous $-\sigma$ et $*$ le dual. Autrement dit, $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ est la composante connexe à l'origine de la partie fixe sous $-\sigma$. Soit $D \in Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2 \int_0^D \omega_{g_0+n} \\ \vdots \\ 2 \int_0^D \omega_g \end{pmatrix} \in L_\Omega,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \int_0^D \omega_{g_0+n} \\ \vdots \\ \int_0^D \omega_g \end{pmatrix} \in L_\Delta,$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} \int_0^D \omega_1 \\ \vdots \\ \int_0^D \omega_{g_0+n-1} \\ \int_0^D \omega_{g_0+n} \\ \vdots \\ \int_0^D \omega_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{g_0+n-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'application d'Abel-Jacobi

$$Jac(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C}^g / L_\Omega, \quad D \longmapsto \begin{pmatrix} \int_0^D \omega_1 \\ \vdots \\ \int_0^D \omega_{g_0+n-1} \\ \int_0^D \omega_{g_0+n} \\ \vdots \\ \int_0^D \omega_g \end{pmatrix},$$

applique de manière bihomorphe la variété $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ dans le tore $\mathcal{C}^{g_0+n-1} / L_\Gamma$. D'après le théorème de Chow, $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ est une sous-variété abélienne de

$Jac(\mathcal{C})$. Plus précisément, puisque $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ est la composante neutre de $Ker N_\varphi$, on a

$$\begin{aligned} Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) &= (Ker N_\varphi)^0, \\ &= Ker(1_{Jac(\mathcal{C})} + \sigma)^0, \\ &= Im(1_{Jac(\mathcal{C})} - \sigma) \subset Jac(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

Autrement dit, l'involution σ induit une involution

$$\sigma : Jac(\mathcal{C}) \longrightarrow Jac(\mathcal{C}), \text{ classe de } D \longmapsto \text{classe de } \sigma D,$$

et modulo un sous-groupe discret, la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$ se décompose en deux parties : une partie paire $Jac(\mathcal{C}_0)$ et une partie impaire $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$. On a

$$Jac(\mathcal{C}) = Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) \oplus Jac(\mathcal{C}_0),$$

avec

$$\begin{aligned} \dim Jac(\mathcal{C}_0) &= g_0, \\ \dim Jac(\mathcal{C}) &= g = 2g_0 + n - 1, \\ \dim Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) &= g - g_0 = g_0 + n - 1. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, $\Delta(2)$ est la matrice des périodes de $Jac(\mathcal{C}_0)$ tandis que $\Gamma(3)$ est celle de $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$. Pour déterminer la matrice des périodes du dual $Prym^*(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$, écrivons la matrice des périodes Γ de $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ sous la forme $\Gamma = (U, V)$, où

$$U = \begin{pmatrix} 2 \int_{a_1} \omega_1 & \dots & 2 \int_{a_{g_0}} \omega_1 & \int_{a_{g_0+1}} \omega_1 & \dots & \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 \int_{a_1} \omega_{g_0+n-1} & \dots & 2 \int_{a_{g_0}} \omega_{g_0+n-1} & \int_{a_{g_0+1}} \omega_{g_0+n-1} & \dots & \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 2 \int_{b_1} \omega_1 & \dots & 2 \int_{b_{g_0}} \omega_1 & \int_{b_{g_0+1}} \omega_1 & \dots & \int_{b_{g_0+n-1}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 \int_{b_1} \omega_{g_0+n-1} & \dots & 2 \int_{b_{g_0}} \omega_{g_0+n-1} & \int_{b_{g_0+1}} \omega_{g_0+n-1} & \dots & \int_{b_{g_0+n-1}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix}.$$

Posons

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \int_{a_1} \omega_1 \\ \vdots \\ 2 \int_{a_1} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix}, \dots, e_{g_0} = \begin{pmatrix} 2 \int_{a_{g_0}} \omega_1 \\ \vdots \\ 2 \int_{a_{g_0}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$e_{g_0+1} = \begin{pmatrix} \int_{a_{g_0+1}} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{a_{g_0+1}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix}, \dots, e_{g_0+n-1} = \begin{pmatrix} \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix}.$$

On peut choisir une nouvelle base $(\lambda_1, \dots, \lambda_{g_0+n-1})$ avec

$$\lambda_j = \frac{e_j}{\delta_j}, \quad \delta_j = \begin{cases} 1 & \text{pour } 1 \leq j \leq g_0, \\ 2 & \text{pour } g_0 + 1 \leq j \leq g_0 + n - 1, \end{cases}$$

de telle façon que la matrice des périodes Γ s'exprime sous la forme (Δ_δ, Z) , où $\Delta_\delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ et $Z = \Delta_\delta U^{-1}V$, est une matrice symétrique, à partie imaginaire définie positive. Dès lors,

$$\begin{aligned} \Gamma^* &= (\delta_{g_0+n-1} \Delta_\delta^{-1}, \delta_{g_0+n-1} \Delta_\delta^{-1} Z \Delta_\delta^{-1}), \\ &= (\delta_{g_0+n-1} \Delta_\delta^{-1}, \delta_{g_0+n-1} U^{-1} V \Delta_\delta^{-1}), \\ &= (\delta_{g_0+n-1} \Delta_\delta^{-1}, \delta_{g_0+n-1} \Delta_\delta^{-1} (U^*)^{-1} V^*). \end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma^* = (U^*, V^*) = (A \quad B \quad D \quad E),$$

est la matrice des périodes du dual $\text{Prym}^*(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Références

- [1] M. Adler and P. van Moerbeke, The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis, *Invent. Math.* **7** (1989) 3-51.
- [2] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths, J. Harris, *Geometry of algebraic curves I*, Springer-Verlag, 1994.
- [3] A. Beauville, Prym varieties and the Schottky problem, *Invent. Math.* **41** (1977) 149-196.
- [4] L. Haine, Geodesic flow on $SO(4)$ and Abelian surfaces, *Math. Ann.* **263** (1983) 435-472.
- [5] A. Lesfari, Abelian surfaces and Kowalewski's top, *Ann. Scient. École Norm. Sup.*, Paris sér. 4 **21** (1988) 193-223.
- [6] A. Lesfari, Le système différentiel de Hénon-Heiles et les variétés Prym. *Pacific J. Math.*, Vol. **212**, N°1 (2003) 125-132.
- [7] A. Lesfari, Prym varieties and applications. *J. Geom. Phys.*, **58**, 1063-1079 (2008).
- [8] D. Mumford, Prym varieties I, in *Contributions to Analysis* (L.V. Ahlfors, I. Kra, B. Maskit, L. Nirenberg, eds.), Academic Press, New-York, 325-350, 1974.