Surfaces de Riemann compactes, courbes algébriques complexes.

A. Lesfari
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Table des matières

Introduction

Les surfaces de Riemann interviennent souvent lors de la résolution de problèmes aussi bien théoriques que pratiques et sont la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine. Dans ce cours, on étudie les courbes algébriques (projectives lisses) ou surfaces de Riemann compactes X. Ce sont des variétés analytiques de dimension 1 complexe (2 réelle) munies d'atlas dont les changements de cartes sont holomorphes. On montre que X est homéomorphe à un tore à g trous (ou sphère à g anses) pour un certain entier $g \geq 0$. Le nombre g est le genre de X. Celui-ci est la dimension de l'espace vectoriel complexe $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ (1^{er}groupe de cohomologie à coefficients dans le faisceau $\mathcal{O}_X$ des fonctions holomorphes sur X). On montre aussi que c'est le nombre des intégrales abéliennes de $1^{ère}$espèce attachées à la courbe X, linéairement indépendants. Un cas particulier important est représenté par les courbes hyperelliptiques de genre g ainsi que les courbes elliptiques ($g = 1$). Nous allons tout d'abord construire le plus intuitivement possible la surface de Riemann dans le cas elliptique et hyperelliptique. On étudie ensuite les différentielles abéliennes, les relations bilinéaires de Riemann et la matrice des périodes. Après avoir rappelé les définitions et propriétés des diviseurs et des fibrés en droites nécessaires à la compréhension des résultats principaux de cette section, on aborde le théorème de Riemann-Roch. Ce dernier est un résultat central de la théorie des surfaces de Riemann compactes. Il permet, entre autres, de définir le genre d'une surface de Riemann qui est un invariant fondamental. Il s'agit d'un théorème d'existence efficace qui permet, entre autres, de déterminer le nombre de fonctions méromorphes linéairement indépendantes ayant certaines restrictions sur leurs pôles. A cause de l'importance de ce théorème, nous donnons une preuve détaillée constructive bien qu'un peu technique. Nous mentionnons quelques conséquences de ce théorème et nous donnons également une preuve analytique de l'importante formule de Riemann-Hurwitz. Elle exprime le genre d'une surface de Riemann à l'aide du nombre de ses points de ramifications et du nombre de ses feuillets. Nous montrons que cette formule fournit un moyen efficace pour déterminer le genre d'une surface de Riemann donnée. En outre plusieurs exemples intéressants seront étudiés. Deux autres théorèmes, celui d'Abel et celui de Jacobi, de nature transcendante et considérés comme importants de la théorie des surfaces de Riemann compactes sont étudiés en détail. Le théorème d'Abel classifie les diviseurs par leurs images dans la variété jacobienne (tore complexe algébrique) tandis que le problème d'inversion de Jacobi concerne l'existence d'un diviseur qui soit l'image inverse d'un point arbitraire sur la variété jacobienne. Les surfaces de Riemann sont des objets d'une extraordinaire richesse qui apparaissent dans de nombreux champs des mathématiques : géométrie et topologie différentielle, théorie des nombres, topologie algébrique, géométrie algébrique, systèmes intégrables,... et sont la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine. Nous allons étudier ces surfaces avec une approche de géométrie complexe.

1 Courbes elliptiques et hyperelliptiques

Rappelons qu'en général, la définition d'une fonction fait qu'à une valeur de la variable correspond une seule valeur de la fonction. Dans certains cas, celà n'est pas très naturel car l'usage des fonctions complexes n'est pas simple. Lors de la définition de telles fonctions, on rencontre généralement des difficultés au niveau de la détermination de l'image : non unicité, défaut de continuité. On parle dans ce cas de fonction multiforme. Si la définition, par exemple, de la fonction carrée z^2, de la fonction inverse $\frac{1}{z}$, de la fonction exponentielle $\exp z$, etc... ne pose pas de problèmes majeurs, il n'en va pas de même, par exemple, avec les tentatives de définition de la fonction racine carrée $\sqrt{z}$, la fonction logarithme complexe $\log z$, etc... Considérons par exemple la fonction $\sqrt{z}$ sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Si z est un nombre complexe, on peut l'écrire :

$$z = re^{i(\theta+2k\pi)},$$

où r est le module de z et θ est un argument de z, défini à $2k\pi$ près. Lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, z reste inchangé. Les racines carrées de z dans $\mathbb{C}$ sont alors $\sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)}$. Supposons que le nombre complexe z décrit un cercle ne contenant pas l'origine, son argument augmente puis revient à sa valeur initiale après un tour complet. Par contre, si z décrit un cercle contenant 0, alors son argument augmente de 2π : z reprend donc sa valeur initiale mais, pendant ce temps, l'argument de la racine carrée choisie verra son argument augmenter de π. Au final, on retombe sur l'autre détermination de la racine carrée ! L'origine 0 qui pose ici problème, est appelé point de branchement ou de ramification pour la fonction racine carrée : elle est une fonction multiforme autour de 0. On est donc en présence d'une fonction multiforme : deux images opposées. Si z est non nul, il existe deux valeurs possibles pour $\sqrt{z}$, et il n'y a pas de raison de préférer l'une à l'autre. Laquelle choisir ? Problème a priori insoluble quel que soit le choix car nous travaillons ici dans $\mathbb{C}$.

Les calculs faisant intervenir des fonctions multiformes sont parfois lourds et compliqués. Riemann a eu l'idée de transformer les fonctions multiformes en fonctions uniformes (un point n'a qu'une seule image), en modifiant le domaine de définition. Il recolle pour cela continûment plusieurs représentations du domaine de définition, les feuillets, et obtient le concept de surface de Riemann. Partant de diverses fonctions multiformes sur $\mathbb{C}$, on peut les rendre uniformes en remplaçant leur domaine $\mathbb{C}$ par une surface de Riemann ; c'est le procédé d'uniformisation. Quoi qu'il semble compliqué à priori de remplacer $\mathbb{C}$ par une surface, on peut se dire que cette surface est le domaine naturel sur lequel la fonction est définie, ce qui justifie son introduction. Parmi les problèmes qui se posent, on ne peut pas définir de façon cohérente les opérations de calcul sur les fonctions multiformes : par exemple que vaut $(\pm\sqrt{z} \pm \sqrt{z})$? Sur la surface de Riemann de $\sqrt{z}$, cette complication n'existe pas. Plus précisément, pour remédier à ce problème, Riemann imagine un artifice redéfinissant l'ensemble de définition des fonctions complexes : on parle aujourd'hui de surfaces de Riemann sur lesquelles ces fonctions redeviennent uniformes (nos fonctions usuelles : l'image est unique). Pour la fonction $\sqrt{z}$, on clone le plan complexe que l'on représente par deux feuillets reliés entre eux par le demi-axe positif, appelé coupure. Aucun cercle autour de 0 ne doit franchir cette coupure à moins de passer d'un feuillet à l'autre ou inversement. Dans ces conditions, z ne reprendra sa valeur initiale qu'au bout de deux tours. Ayant fait le choix d'une détermination de la racine carrée, celle-ci devient uniforme sur la surface de Riemann (ici la sphère de Riemann), ce qui autorise alors la notation $\sqrt{z}$.

Passons maintenant à la construction de la surface de Riemann dans le cas elliptique et hyperelliptique. Soit

$$w^2 = P_3(z),$$

où $P_3(z)$ est un polynôme de degré 3, ayant trois racines distinctes e_1, e_2, e_3. Considérons

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto w : w^2 = P_3(z),$$

Il est évident que w n'est pas une fonction (uniforme). A chaque valeur de z correspond deux valeurs différentes de w sauf quand $z = e_1$, $z = e_2$ et $z = e_3$. En ces points, w est univaluée : en effet, on a

$$w = \pm\sqrt{P_3\left(e_i\right)} = 0,$$

une seule valeur. Tous les points à l'infini dans toutes les directions seront identifiés en un seul point que l'on désigne par ∞. Au point $z = \infty$, w est aussi univaluée : en effet, posons $z = \frac{1}{t}$, d'où

$$w^2 = P_3\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{1}{t} - e_1\right)\left(\frac{1}{t} - e_2\right)\left(\frac{1}{t} - e_3\right),$$

et

$$w \sim \pm\sqrt{\frac{1}{t^3}}.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{t\to 0} w = \pm\infty$ c'est-à-dire ∞, une seule valeur.

Notre problème consiste à uniformiser w, autrement dit, on cherche un domaine sur lequel w est une fonction (uniforme). Auparavant, étudions le comportement de w au voisinage des racines de $P_3(z) = 0$ c'est-à-dire e_1, e_2, e_3 ainsi qu'au voisinage du point à l'infini ∞. Si z décrit un circuit (c'est-à-dire un chemin fermé, par exemple un cercle) entourant un des points e_1, e_2, e_3 et ∞, alors w change de signe : en effet, supposons que z décrit un cercle centré en e_1 et posons

$$z - e_1 = re^{i\theta},$$

où r est le module de $z - e_1$ et θ son argument. Evidemment r ne change pas tandis que θ varie de 0 à 2π. Au voisinage de e_1, $w = \sqrt{P_3(z)}$ se comporte comme

$$w = \sqrt{z - e_1} = r^{1/2} e^{i\theta/2}.$$

Dès lors, pour $\theta = 0$, on a $w = r^{1/2}$ tandis que pour $\theta = 2\pi$, on a $w = -r^{1/2}$. Si on refait de nouveau un tour complet autour de $z = e_1$, l'argument θ varie de 2π à 4π et alors on obtient $r^{1/2}$ qui est la valeur de départ. Pour $z = e_2$ ou $z = e_3$, il suffit d'utiliser un raisonnement similaire au cas précédent. En ce qui concerne le point ∞, on pose comme précédemment $z = \frac{1}{t}$ et on étudie $w^2 = P_3\left(\frac{1}{t}\right)$ au voisinage de $t = 0$. On a

$$w \sim \pm\sqrt{\frac{1}{t^3}} = \pm t^{-3/2}.$$

Soit $t = re^{i\theta}$. Autour de $t = 0$, w se comporte comme

$$w = t^{-3/2} = r^{-3/2} e^{-3i\theta/2}.$$

Dès lors, pour $\theta = 0$, on a $w = r^{-3/2}$ et pour $\theta = 2\pi$, on a $w = -r^{-3/2}$. Comme précédemment, si t refait de nouveau un tour complet, w reprend la valeur de départ c'est-à-dire $r^{-3/2}$.

Passons maintenant à la construction du domaine sur lequel w serait une fonction uniforme. Cette construction se fera en plusieurs étapes :

<u>$1^{ère}$ étape</u> : Prenons deux copies ou feuillets σ_1 et σ_2 du plan complexe compactifié $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ou ce qui revient au même de la sphère de Riemann puisqu'ils sont homéomorphes. Plaçons le feuillet σ_1 au dessus de σ_2 et sur chacun de ces feuillets marquons les points e_1, e_2, e_3, ∞. Supposons que les points de σ_1 seront envoyés sur

$$w = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)},$$

et que ceux de σ_2 seront envoyés sur

$$w = -\sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}.$$

<u>$2^{ème}$ étape</u> : Dans chaque feuillet, faisons deux coupures : une le long de la courbe reliant le point e_1 au point e_2 et l'autre le long de la courbe reliant le point e_3 au point ∞. Désignons par A_1, B_1, C_1, D_1 (resp. A_2, B_2, C_2, D_2) les bords des coupures dans le feuillet σ_1 (resp. σ_2). Rappelons que w change de signe lorsque l'on tourne d'un tour autour d'un des points e_1, e_2, e_3, ∞. Donc en allant de A_1 à B_1, on change le signe de w c'est-à-dire on passe sur l'autre feuillet, là où w a l'autre signe. De même pour les bords A_2 et B_2, C_1 et D_1, C_2 et D_2. Par conséquent, w a la même valeur sur A_1 et B_2, sur B_1 et A_2, sur C_1 et D_2 et enfin sur D_1 et C_2.

3ème étape : On identifie les bords suivants : A_1 à B_2, B_1 à A_2, C_1 à D_2 et D_1 à C_2. Après recollement, on obtient un tore à un trou.

La surface à deux feuillets obtenue s'appelle surface de Riemann elliptique ou courbe elliptique associée à l'équation :

$$w^2 = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3).$$

Sur cette surface, w est une fonction uniforme. Lorsqu'on tourne autour d'un des points e_1, e_2, e_3, ou ∞, on passe d'un feuillet à l'autre. En ces points les deux feuillets se joignent et on les appellent points de branchement ou de ramification de la surface.

Remarque 1.1 *a) Si $w^2 = P_4(z)$, où $P_4(z)$ est un polynôme de degré 4, ayant quatre racines distinctes e_1, e_2, e_3, e_4, alors on obtient aussi une courbe elliptique. Les points de branchements sont e_1, e_2, e_3 et e_4. Notons que si*

$$w^2 = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)(z - e_4),$$

alors la transformation

$$(w, z) \longmapsto \left(\frac{y}{x^2}, e_1 + \frac{1}{x}\right),$$

ramène cette équation à la forme

$$y^2 = (1 + (e_1 - e_2)x)(1 + (e_1 - e_3)x)(1 + (e_1 - e_4)x).$$

b) Signalons enfin que si

$$w^2 - P_n(z) = 0,$$

où $P_n(z)$ est un polynôme de degré n supérieur où égal à 5, ayant n racines distinctes, alors on obtient ce qu'on appelle surface de Riemann hyperelliptique ou courbe hyperelliptique. Plus précisément, une surface de Riemann hyperelliptique ou courbe hyperelliptique de genre g se définit par une équation de la forme

$$w^2 = P_n(z) = \begin{cases} P_{2g+1}(z) & si\ n = 2g+1 \\ \widetilde{P}_{2g+2}(z) & si\ n = 2g+2 \end{cases}$$

où $P_{2g+1}(z)$ et $\widetilde{P}_{2g+2}(z)$ sont des polynômes sans racines multiples. On a

n	***g (genre)***	***Surface de Riemann***
1 ou 2	*0*	*sphère de Riemann*
3 ou 4	*1*	*elliptique à un trou*
5 ou 6	*2*	*hyperelliptique à deux trous*
7 ou 8	*3*	*hyperelliptique à trois trous*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\left[\frac{n-1}{2}\right]$ *(partie entière)*	*hyperelliptique à* $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ *trous*

2 Etude géométrique et topologique

Une surface de Riemann est une variété différentiable de dimension 1 complexe (2 réelle) munie d'un atlas dont les changements de cartes sont holomorphes. Un théorème de Riemann affirme que toute surface de Riemann compacte X est (isomorphe à) une courbe algébrique (projective lisse), i.e., peut-être définie par des équations algébriques. Soit

$$X = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : F(w, z) = 0\},$$

une courbe algébrique affine plane où

$$F(w, z) \equiv p_0(z)w^n + p_1(z)w^{n-1} + \cdots + p_n(z), \tag{2.1}$$

est un polynôme à deux variable complexes w et z, de degré n en w et irréductible (i.e., sans facteurs multiples ou encore ne soit pas le produit de deux autres polynômes en w et z). Ici $p_0(z) \neq 0$, $p_1(z), \ldots, p_n(z)$ sont des polynômes en z. Pour qu'une telle courbe soit lisse (on dit aussi non-singulière), il suffit que les fonctions $\frac{\partial F}{\partial w}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ ne s'annulent identiquement sur aucune composante de X ou encore que :

$$\text{grad } F \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial w}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \neq 0.$$

Tout au long de ce travail[1], nous supposerons ces conditions satisfaites. Nous montrerons que X est homéomorphe à un tore à g trous (ou sphère à g anses) pour un certain entier $g \geq 0$, appelé genre de X. Un cas particulier important est représenté par les courbes hyperelliptiques [2] de genre g d'équation

$$F(w, z) = w^2 - p_n(z) = 0,$$

où $p_n(z)$ est un polynôme sans racines multiples, de degré $n = 2g+1$ ou $2g+2$. Rappelons que lorsque $g = 1$, on dit courbes elliptiques.

Exercice 2.1 *Montrer que la courbe définie par léquation*

$$w^2 = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k),$$

est non-singulière si et seulement si $z_1, ..., z_n$ sont distincts.

[1]Dans la théorie des fonctions d'une variable complexe, on rencontre aussi des surfaces de Riemann plus compliquées (non-algébriques) où $F(w, z)$ n'est pas un polynôme. Par exemple, l'équation $e^w - z = 0$ détermine la surface de Riemann du logarithme. De telles surfaces de Riemann ne seront pas considérées ici.

[2]Dans la section 1, l'étude de ces courbes a été faite le plus intuitivement possible.

Considérons donc l'équation (2.1). A chaque valeur de z correspond n valeurs de w. Notre problème consiste à trouver un domaine pour lequel

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto w : F(w,z) = 0,$$

soit une fonction uniforme. Désignons par $z_1, ..., z_m$ les zéros de $p_0(z)$ et les zéros communs de $F(w,z) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial w}(w,z) = 0$. Ce sont les valeurs pour lesquelles $F(w,z)$ a un zéro double en w. Soit $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le plan complexe compactifié ou sphère de Riemann puisqu'ils sont homéomorphes. En résolvant l'équation $F(w,z) = 0$ pour $z \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_1, ..., z_m\}$, on obtient n solutions $w_k(z)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Théorème 2.1 *Les solutions $w_k(z)$ sont localement analytiques.*

Démonstration : Posons $z = x + iy$ et $w = u + iv$ où $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Donc

$$F(w,z) = G(u,v,x,y) + iH(u,v,x,y),$$

où G et H sont des polynômes. Par conséquent

$$F(w,z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} G(u,v,x,y) = 0, \\ H(u,v,x,y) = 0. \end{array} \right.$$

Fixons un point $z_0 = x_0 + iy_0 \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_1, ..., z_m\}$. L'équation

$$F(w,z) = 0,$$

a exactement n racines distinctes : $w = w_{01}, w_{02}, ..., w_{0n}$. Afin de ne pas alourdir les notations, on désignons par $w_0 = u_0 + iv_0$ l'une de ces racines. Pour pouvoir appliquer le théorème des fonctions implicites, il suffit de vérifier que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial v} \end{pmatrix},$$

est non nul en (u_0, v_0). En effet, pour z fixé, $F(w, z_0)$ est un polynôme en w et donc $F(w, z_0)$ est analytique. D'après les équations de Cauchy-Riemann, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial u} &= \frac{\partial H}{\partial v}, \\ \frac{\partial G}{\partial v} &= -\frac{\partial H}{\partial u}, \end{aligned}$$

et dès lors

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial v} \end{pmatrix} &= \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial u}, \\
&= \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2, \\
&= \left|\frac{\partial G}{\partial u} + i\frac{\partial H}{\partial u}\right|^2, \\
&= \left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|^2.
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial v} \end{pmatrix} = \left|\frac{\partial F}{\partial v}\right|^2.$$

Donc pour que

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0,$$

il suffit que

$$\left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|^2 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|\frac{\partial F}{\partial v}\right|^2 \neq 0,$$

ou encore

$$\left|\frac{\partial F}{\partial w}\right|^2 \neq 0.$$

Or par hypothèse, l'équation $F(w, z) = 0$ n'a pas de racines doubles en w pour z fixé, i.e.,

$$\frac{\partial F}{\partial w}(w_0, z_0) \neq 0.$$

Par le théorème des fontions implicites, on peut résoudre w en fonction de z et exprimer que w est différentiable dans un voisinage de z. Pour montrer que $w = w(z)$ est analytique, on va vérifier que les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y},
\end{aligned}$$

sont satisfaites. En effet, comme $F(w, z) = 0$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + i\frac{\partial F}{\partial z} = 0.
\end{aligned}$$

On multiplie la deuxième équation par i et on fait la somme avec la première. On obtient

$$\frac{\partial F}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0.$$

Or $\frac{\partial F}{\partial w}(w_0,z_0)\neq 0$, donc la seule possibilité qui reste est

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-i\frac{\partial w}{\partial y},$$

i.e.,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y},$$

ce qui achève la démonstration. □

Nous allons montrer que l'on peut prolonger analytiquement $w_k=w_k(z)$ sur tout $\overline{\mathbb{C}}\backslash\{z_1,...,z_m\}$ et chaque fonction ainsi obtenue satisfait à l'équation $F(w,z)=0$. Mais auparavant nous aurons besoin de quelques préliminaires.

Soit $D(a,r_a)$ un disque de centre a et de rayon r_a et soit f une fonction analytique sur $D(a,r_a)$. Cette fonction admet un développement en série entière convergente de la forme

$$f(z)=f(a)+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots$$

Proposition 2.2 *Soit $b\in D(a,r_a)$. La fonction f admet un développement en série entière convergente autour de b de la forme*

$$f(z)=f(b)+b_1(z-b)+b_2(z-b)^2+\cdots$$

Démonstration : Posons $z-a=(z-b)+(b-a)$, d'où

$$\begin{aligned}f(z) &= f(a)+a_1(b-a)+a_2(b-a)^2+\cdots\\ &\quad +a_1(z-b)+2a_2(b-a)(z-b)+\cdots+a_2(z-b)^2+\cdots\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}f(b) &= f(a)+a_1(b-a)+a_2(b-a)^2+\cdots\\ b_1 &= a_1+2a_2(b-a)+\cdots\\ b_2 &= a_2+\cdots\end{aligned}$$

et

$$f(z)=f(b)+b_1(z-a)+b_2(z-a)^2+\cdots \tag{2.2}$$

Cette série converge en tout point du disque $D(a,r_a)$. Cherchons maintenant le disque $D(b,r_b)$ de centre b et de rayon r_b, dans lequel la série (2.2) converge. On sait que $r_b\geq r_a-\mid b-a\mid>0$, et il se peut aussi qu'on ait $r_b>r_a-\mid b-a\mid>0$.

Si tel est le cas, la série (2.2) convergera aussi à l'extérieur du disque $D(a, r_a)$, à savoir dans le domaine du disque $D(b, r_b)$ extérieur au disque $D(a, r_a)$ et la proposition est démontrée. □

Soit f une fonction analytique sur $D(a, r_a)$ et soit b un point en dehors de $D(a, r_a)$. On veut construire un prolongement analytique de f au point b. Du point a au point b, traçons un chemin $\mathcal{C}$. Soit $c_1 \in \mathcal{C} \cap D(a, r_a)$. On sait que la fonction f peut-être développée en série entière de $z - c_1$ car $c_1 \in D(a, r_a)$. Soit D_1, le disque de centre c_1 dans lequel le développement obtenu est convergeant. Soit $c_2 \in D_1$ un point se trouvant sur le chemin entre c_1 et b. En ce point, f admet un prolongement analytique. Soit D_2, le disque de centre c_2 dans lequel le développement obtenu est convergeant. De proche en proche, on avance progressivement sur $\mathcal{C}$, vers le point b. Quand b sera dans un disque D_n de centre c_n, on prendra b pour c_{n+1} et ainsi on obtiendra le prolongement analytique cherché. Signalons que cette construction ne démontre pas l'existence du prolongement analytique. Nous avons montré qu'en tout point $z \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_1, ..., z_m\}$, les solutions $w_k(z)$, $k = 1, 2, ..., n$ de l'équation $F(w, z) = 0$ sont localement analytiques. En outre, on a

Théorème 2.3 *On peut prolonger analytiquement les fonctions $w_k = w_k(z)$ sur tout $\overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_1, ..., z_m\}$ et chaque fonction ainsi obtenue satisfait à l'équation : $F(w, z) = 0$.*

Démonstration : Soit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_1, ..., z_m\}$. D'après les résultats précédents, on peut prolonger analytiquement w_k le long de tous les chemins contenus dans un voisinage suffisamment petit de z_0. Pour le reste, on va utiliser un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe un point a et un chemin $\mathcal{C}$ de z_0 vers a, de sorte que l'on puisse prolonger w_k le long de $\mathcal{C}$ jusqu'à tous les points b avant a, mais pas jusqu'au a. Dans $D(a, r_a)$, elles existent n séries entières $w_k(z)$ qui satisfont à l'équation $F(w_k(z), z) = 0$ et qui en donnent toutes les solutions. Choisissons b, de sorte que la partie du chemin $\mathcal{C}$ comprise entre a et b, soit entièrement incluse dans le disque $D(a, r_a)$. Considérons la série $w(z)$ résultant du prolongement analytique de $w_k(z)$ de z_0 jusqu'au b, le long du chemin $\mathcal{C}$. D'après ce qui précède, on a $F(w(z), z) = 0$ dans un disque $D(b, r_b)$ autour du point b. Donc dans un disque $D(b, r)$ de rayon $r = \min(r_a - \mid a - b \mid, r_b)$, $w(z)$ doit coincider avec l'une des $w_k(z)$ puisque dans ce disque toutes les solutions de l'équation $F(w, z) = 0$ sont données par les fonctions $w_k(z)$ et que $F(w(z), z) = 0$. Soit w_l qui coincide avec w dans $D(b, r)$. Donc $w_k(z)$ peut-être prolongé de b vers a le long de $\mathcal{C}$. Ceci contredit l'hypothèse de départ et démontre le théorème. □

On veut que le prolongement ne dépend pas du chemin. On utilise à cette fin le théorème de monodromie[3]. Nous allons tout d'abord modifier $\overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_1, ..., z_m\}$

[3] Théorème (de monodromie [23]) : Soit f une fonction analytique dans un voisinage de a et soit D un domaine simplement connexe. On suppose que pour tout $x \in D$, il existe un

pour obtenir une surface simplement connexe. On procède comme suit : Soit $z^* \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_1, ..., z_m\}$ un point arbitraire et considérons $m+1$ chemins $\mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_{m+1}$ de z^* jusque $z_1, ..., z_{m+1} = \infty$ respectivement. On suppose que chaque $\mathcal{L}_i$ ne se recoupe pas et que $\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j = \{z^*\}$, pour tout $i \neq j$, $(i, j = 1, ..., m+1)$. En faisant des coupures le long de ces chemins, on obtient une surface

$$\sigma = \left(\overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_1, ..., z_m\}\right) \backslash \bigcup_i \mathcal{L}_i,$$

homéomorphe à un disque, donc simplement connexe.

Proposition 2.4 *Sur la surface σ, le prolongement analytique des $w_k(z)$ ne dépend pas du chemin.*

Démonstration : Il suffit d'utiliser le théorème de monodromie, la construction de la surface σ et la proposition est démontrée. $\square$

Considérons une coupure le long de $\mathcal{L}_j$ et la solution $w_k(z)$. On tourne autour de z_j pour atteindre l'autre coupure. Ceci revient à transformer la solution $w_k(z)$ en une solution $w_{l_k}(z)$. Donc pour chaque j fixé, on a une permutation π_j qui transforme k en l_k. Prenons n copies $\sigma_1, ..., \sigma_n$ de σ et identifions le bord B_j de σ_i avec le bord A_j de $\sigma_{k=\pi_j(i)}$. On identifie ainsi tous les bords deux à deux et on obtient une surface compacte. Nous allons montrer que cette surface, notée X, est connexe. Mais avant cela, nous aurons besoin de quelques résultats d'algèbre concernant les résultants.

Soient

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = a_0 \prod_{k=1}^{m} (x - \alpha_k), \quad a_0 \neq 0, \\ g(x) &= b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = b_0 \prod_{j=1}^{n} (x - \beta_j), \quad b_0 \neq 0, \end{aligned}$$

deux polynômes de degré m et n respectivement. Ici $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ et $(\beta_1, ..., \beta_n)$ désignent les racines des polynômes f et g respectivement. Le résultant des polynômes f et g, noté $\text{Rés}(f, g)$, est le déterminant de leur matrice de Sylvester,

chemin de a vers x tel que f peut-être prolongée analytiquement en x. Alors ce prolongement ne dépend pas du chemin suivi.

i.e., le déterminant de la matrice carrée d'ordre $(m+n)$ suivante :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Proposition 2.5 *Les polynômes f et g ont un facteur commun non nul si et seulement si il existe deux polynômes F et G de degré strictement inférieur à m et n respectivement tels que : $fG = gF$.*

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} f &= Af_1^{m_1}f_2^{m_2}...f_r^{m_r}, \\ g &= Bg_1^{n_1}g_2^{n_2}...g_s^{n_s}, \end{aligned}$$

où $f_1^{m_1},...,f_r^{m_r},g_1^{n_1},...,g_s^{n_s}$ sont des polynômes irréductibles et A, B sont des constantes. Supposons que f et g ont un facteur commun non nul, disons $f_1 = g_1$. Considérons les polynômes

$$\begin{aligned} F &= \frac{f}{f_1}, \\ G &= \frac{g}{g_1}. \end{aligned}$$

D'où $\deg F \deg f = m$, $\deg G = \deg g = n$, et

$$fG = \frac{fg}{g_1} = \frac{gf}{f_1} = gF.$$

Réciproquement, on a

$$fG = gF,$$

avec $\deg F < m$ et $\deg G < n$. Supposons que f et g n'ont pas de facteur commun. Dans ce cas, puisque

$$Af_1^{m_1}f_2^{m_2}...f_r^{m_r}.G = Bg_1^{n_1}g_2^{n_2}...g_s^{n_s}.F,$$

alors pour tout $j = 1,2,...,r$, $f_j^{m_j}$ doit apparaître comme facteur dans F, i.e., f doit diviser F donc $\deg f \leq \deg F$ ce qui est absurde car par hypothèse $\deg F < m$ et la démonstration s'achève. $\square$

Proposition 2.6 *Les polynômes f et g ont un facteur commun non nul si et seulement si Rés$(f,g)=0$.*

Démonstration : D'après la proposition précédente, les polynômes f et g ont un facteur commun non nul si et seulement si il existe deux polynômes

$$\begin{aligned} F(x) &= A_0x^{m-1}+A_1x^{m-2}+\cdots+A_{m-1}, \\ G(x) &= B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\cdots+B_{n-1}, \end{aligned}$$

tels que : $fG=gF$, i.e.,

$$(a_0x^m+\cdots+a_m)(B_0x^{n-1}+\cdots+B_{n-1})=(b_0x^n+\cdots+b_n)(A_0x^{m-1}+\cdots+A_{m-1}).$$

On identifie les coefficients :

$$\begin{aligned} x^{m+n-1} &: \quad a_0B_0=b_0A_0, \\ x^{m+n-2} &: \quad a_0B_1+a_1B_0=b_0A_1+b_1A_0, \\ &\vdots \\ x^0 &: \quad a_mB_{n-1}=b_nA_{m-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &a_0B_0-b_0A_0=0, \\ &a_1B_0+a_0B_1-b_1A_0-b_0A_1=0, \\ &\quad\vdots \\ &a_mB_{n-1}-b_nA_{m-1}=0. \end{aligned}$$

On obtient un système linéaire homogène de $(m+n)$ équations dont les inconnues sont $B_0,...,B_{n-1},A_0,,A_{m-1}$. Ce système admet une solution non triviale si et seulement si

$$\Delta \equiv \det\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \ldots & 0 & -b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & -b_1 & -b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & -b_1 & \ddots & 0 \\ a_m & \vdots & \ddots & a_0 & -b_n & \vdots & \ddots & -b_0 \\ 0 & a_m & \vdots & a_1 & 0 & -b_n & \vdots & -b_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_m & 0 & \ldots & 0 & -b_n \end{pmatrix}=0.$$

En mettant en évidence le signe $-$ dans les m dernières colonnes et en tenant compte du fait que le déterminant de la transposée d'une matrice est le même que celui de la matrice initiale, on obtient $\Delta=\pm$Rés(f,g), et le résultat en découle. $\square$

Proposition 2.7 *Il existe deux polynômes F et G de degré strictement inférieur à m et n respectivement tels que :*

$$\begin{aligned} fG - gF &= Rés(f,g), \\ &= \text{polynôme en les coefficients de } f \text{ et } g, \\ &= a_0^n b_0^m \prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_k - \beta_j), \\ &= a_0^n \prod_{k=1}^{m} g(\alpha_k), \\ &= (-1)^{mn} b_0^m \prod_{j=1}^{n} f(\beta_j). \end{aligned}$$

Démonstration : Si f et g ont un facteur commun, alors d'après ce qui précède les polynômes F et G existent et on a

$$fG - gF = 0 = \text{Rés}(f,g).$$

Si f et g n'ont pas de facteur commun, alors on cherche F et G tels que :

$$fG - gF = \text{Rés}(f,g).$$

En raisonnant comme dans la proposition précédente, on obtient un système non homogène ayant une solution non nulle. Autrement dit, le déterminant Δ utilisé dans la preuve de la proposition précédente est nul ou ce qui est équivalent f et g n'ont pas de facteur commun, ce qui est vrai par hypothèse et achève la démonstration. □

Soient $\alpha_1, ..., \alpha_m$ les m racines du polynôme f comptées avec multiplicité. Le discriminant de f, noté $Disc(f)$, est

$$\begin{aligned} Disc(f) &= a_0^{2m-2}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{i\neq j}(\alpha_i - \alpha_j), \\ &= a_0^{2n-2} \prod_{1\leq j<i\leq m}(\alpha_i - \alpha_j)^2. \end{aligned}$$

Proposition 2.8 *Le résultant de f et de son polynôme dérivé f' est*

$$Rés(f,f') = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0 Disc(f).$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 \prod_{k=1}^{m}(x - \alpha_k), \\ f'(x) &= a_0 \sum_{k=1}^{m}\prod_{j\neq k}(x - \alpha_j). \end{aligned}$$

En remplaçant dans cette dernière équation x par α_i, on constate que tous les termes s'annulent sauf le i-ème et dès lors

$$f'(\alpha_i) = a_0 \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Par ailleurs, on sait que

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f, f') &= a_0^{m-1} \prod_{i=1}^{m} f'(\alpha_i), \\ &= a_0^{2m-1} \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j). \end{aligned}$$

Notons que dans le produit ci-dessus, il y a $m(m-1)$ facteurs. Comme chacun de ces derniers s'écrit sous la forme $\alpha_i - \alpha_j$ et sous la forme $\alpha_j - \alpha_i$, alors leur produit est $(-1)(\alpha_i - \alpha_j)^2$. En tenant compte du fait qu'il y a $\frac{m(m-1)}{2}$ paires d'indices i, j avec $1 \leq j < i \leq m$, alors

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f, f') &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^{2m-1} \prod_{1 \leq j < i \leq m} (\alpha_i - \alpha_j)^2, \\ &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0 Disc(f), \end{aligned}$$

et la proposition est démontrée. $\square$

On déduit des propositions précédentes le résultat suivant :

Proposition 2.9 *Le discriminant du polynôme f est nul si et seulement si les polynômes f et f' ont un facteur en commun non constant ou encore si et seulement si le polynôme f admet une racine multiple.*

Nous passons maintenant à la preuve de la connexité de la surface de Riemann X construite précédemment.

Théorème 2.10 *La surface de Riemann X obtenue est connexe.*

Démonstration : Supposons que X n'est pas connexe. Il est donc possible de numéroter les copies $\sigma_1, ..., \sigma_n$ de σ de sorte que les k premières $\sigma_1, ..., \sigma_k$, $k < n$, soient reliées entre elles, formant ainsi une des composantes connexes de X. Du point de vue des permutations, celà signifie que si π_j envoit les indices $i = 1, ..., n$ sur les indices $j_1, ..., j_n$, alors $j_1, ..., j_k$ est une permutation des indices $1, ..., k$ et $j_{k+1}, ..., j_n$ est une permutation des indices $k+1, ..., n$. On considère

$$\begin{aligned} P(w, z) &= p_0(z) \prod_{i=1}^{n} (w - w_i(z)), \\ G(w, z) &= (w - w_1(z))...(w - w_k(z)), \\ &= w^k - E_1 w^{k-1} + E_2 w^{k-2} - \cdots + (-1)^k E_k, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{i=1}^{k} w_i(z), \\ E_2 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{k} w_i w_j, \\ &\vdots \\ E_k &= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_j \in \{1,\dots,k\} \\ i_1<\dots<i_j}}^{k} w_{i_1}\dots w_{i_j}, \end{aligned}$$

sont des polynômes symétriques en $w_1, ..., w_k$. Ce sont des fonctions rationnelles. En effet, la permutation $\pi_j (j = 1, ..., m + 1)$ transforme l'ensemble $\{w_1, ..., w_k\}$ en lui même. Comme E_k sont des polynômes symétriques en $w_1, ..., w_k$, alors cette permutation transforme aussi E_k en E_k. Pour passer les coupures L_j, on applique la permutation π_j qui conserve la valeur de E_k, donc $E_k(z)$ est univaluée sur σ. En outre E_k est holomorphe sauf peut-être aux points de branchement où elle pourrait éventuellement avoir des pôles. Donc E_k est méromophe et par conséquent rationnelle. Dès lors $G(w, z)$ est une fonction rationnelle en w et z. En multipliant $G(w, z)$ par le dénominateur commun des E_k, on obtient un polynôme $Q(w, z)$ de degré k en w et dont les racines sont les fonctions $w_1, ..., w_k$. D'après la proposition 2.7, il existe deux polynômes U et V tels que :

$$UP + VQ = \text{polynôme (résultant) } R(z) \text{ en } z.$$

Par hypothèse P est irréductible. Comme deg $Q <$ deg P, P et Q sont premiers entre eux, donc ces polynômes n'ont pas de facteur commun et par conséquent $R(z) \neq 0$. Mais que vaut l'expression

$$UP + VQ = R(z), \quad \forall z$$

pour les valeurs particulières $w = w_j(z), 1 \leq j \leq k$? On a

$$UP + VQ \mid_{w=w_j(z)} = U.0 + V.0 = 0 = R(z).$$

Donc $R(z) = 0, \forall z$, ce qui est contradictoire et le théorème est démontré. □

3 Différentielles abéliennes

Dans tout ce qui va suivre, on suppose le lecteur déjà familier avec les notions et résultats fondamentaux des formes différentielles sur les variétés, qui se trouvent d'ailleurs dans la plupart des livres sur ces sujets.

Sur la surface de Riemann X, les 1-formes différentielles[4] (on dira tout simplement différentielles) s'écrivent en coordonnées locales $z = x + iy$ sous la forme

$$\omega = u(x, y)dx + v(x, y)dy,$$

ou encore dans la base $dz = dx + idy$, $d\overline{z} = dx - idy$, sous la forme

$$\omega = f dz + g d\overline{z}.$$

Définition 3.1 *Une différentielle ω est dite holomorphe (ou différentielle abélienne de $1^{\text{ère}}$espèce ou tout simplement différentielle de $1^{\text{ère}}$espèce) si elle s'écrit localement sous la forme*

$$\omega = f(z)dz,$$

où f est une fonction holomorphe de z.

Toute différentielle holomorphe ω est fermée ($d\omega = 0$) ainsi que son conjugué $\overline{\omega} = \overline{f(z)}d\overline{z}$. Toute différentielle holomorphe ω est localement exacte :

$$\omega = f(z)dz = dg(z),$$

où g est une fonction analytique complexe (une primitive de $f(z)$). Par ailleurs, comme la surface de Riemann compacte X n'a aucune fonction holomorphe non triviale, alors la forme non nulle ω n'est jamais exacte et ceci est valable aussi pour la forme $\overline{\omega}$.

Nous verrons plus loin (exercice 3.4) que sur la courbe hyperelliptique X (étudiée précédemment) de genre g définie par $w^2 = P_{2g+1}(z)$, les différentielles

$$\omega_k = \frac{z^{k-1}dz}{\sqrt{\prod_{j=1}^{2g+1}(z - z_j)}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, g)$$

sont holomorphes sur X. Nous verrons aussi que les formes $\omega_1, ..., \omega_g$ constituent une famille libre sur le corps des complexes. Les formes

$$\text{Re } \omega_k = \frac{1}{2}(\omega_k + \overline{\omega}_k), \qquad \text{Im } \omega_k = \frac{1}{2i}(\omega_k - \overline{\omega}_k),$$

forment une base dans le groupe de cohomologie $H^1(X, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{2g}$.

Les différentielles (abéliennes) méromorphes sur X différent des différentielles holomorphes par la présence possible de singularités de type pôles. Si X est définie par l'équation $F(w, z) = 0$, alors les différentielles abéliennes s'écrivent sous la forme

$$\omega = P(w, z)dz,$$

[4] On omettra de préciser qu'il s'agit de 1-formes différentielles.

où $P(w,z)$ est une fonction rationnelle (ou de façon équivalente sous la forme $\omega = Q(w,z)dw$ où $Q(w,z)$ est une fonction rationnelle). Sur la courbe hyperelliptique de genre g d'équation :

$$w^2 = P_{2g+1}(z),$$

la différentielle $\frac{z^{k-1}}{w}dz$ admet pour $k > g$ un et un seul pôle à l'infini de multiplicité égale à $2(k-g)$ (voir exercice 3.4 pour le détail). Autrement dit, une différentielle (abélienne) méromorphe a un pôle de multiplicité ou d'ordre k en un point p si ω s'écrit en terme du paramètre local z, $z(p) = 0$, sous la forme

$$\omega = f(z)dz,$$

où $f(z)$ a un pôle de multiplicité ou d'ordre k. La notion de zéro de multiplicité ou d'ordre k en ce point d'une différentielle peut-être définie de manière similaire. Ces notions ne dépendent pas du choix du paramètre local z. Soit ω une différentielle ayant un pôle de multiplicité k en un point p. Explicitement, ω s'écrit en terme du paramètre local z, $z(p) = 0$, sous la forme

$$\omega = \left(\sum_{n=-k}^{\infty} c_n z^n\right) dz = \left(\frac{c_{-k}}{z^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + o(1)\right) dz.$$

Définition 3.2 *Le résidu de la différentielle ω au point p est défini par*

$$Rés_p\omega = c_{-1}.$$

Exercice 3.1 *Montrer que le résidu $Rés_p\omega$ ne dépend pas du choix du paramètre local z.*

<u>Solution</u> : En effet, le résidu $\text{Rés}_p\omega$ est égal à

$$\text{Rés}_p\omega = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \omega,$$

où γ est une courbe fermée sur X, contenant le point p. L'intégrale ci-dessus étant indépendante du choix du paramètre local, le résultat en découle.

Soit $(a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g)$ une base de cycles (contours fermés) dans le groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ de telle façon que les produits d'intersection de cycles deux à deux s'écrivent :

$$(a_j, a_j) = (b_j, b_j) = 0, \quad (a_j, b_k) = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq g.$$

On dira que $(a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g)$ est une base symplectique du groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z})$. On désigne par X^* la représentation normale de la surface de Riemann X de genre g, i.e., un polygône à $4g$ côtés identifiés deux à deux selon le symbole $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}...a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ et peut être définit à partir d'une triangulation de la surface X. Les $4g$ côtés sont nommés dans l'ordre où ils se présentent sur le bord orienté du polygône, a_1^{-1} devant être identifié à a_1 après avoir renversé son orientation, etc...

Proposition 3.3 *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g. Soit ω une différentielle méromorphe sur X. Alors*

$$\sum_{p\in X} Rés_p\omega = 0.$$

Démonstration : Soit X^* la représentation normale de X. On sait que X^* est un polygône à $4g$ côtés identifiés deux à deux. Si l'on parcourt le bord ∂X^* de ce polygône, on constate que chaque côté est parcouru deux foix, l'un dans le sens de son orientation et l'autre dans le sens opposé. Donc

$$\int_{\partial X^*} \omega = 0.$$

Or, d'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{\partial X^*} \omega = 2\pi i \sum_{p\in X} \text{Rés}_p\omega,$$

car tous les points de X^* sont des points de X ce qui achève la démonstration. $\square$

Définition 3.4 *Une différentielle (abélienne) méromorphe sur X est dite de $2^{\text{ème}}$espèce si elle a des pôles et si son résidu est nul en chaque point de X. Elle est dite de $3^{\text{ème}}$espèce si elle n'a que des pôles simples (et son résidu est non nul en au moins un point de X).*

Soient X une surface de Riemann compacte, ω une forme différentielle fermée, $\triangle$ une chaîne sur X et $\partial\triangle$ son bord. D'après le théorème de Stokes-Cartan, on a

$$\int_{\partial\triangle} = \int\int_{\triangle} d\omega = 0.$$

Dès lors, si γ est un chemin contenu dans X et si $[\gamma] \in H_1(X,\mathbb{Z})$ est la classe d'homologie contenant γ, alors l'application

$$\int_{[\gamma]} : H_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad [\gamma] \longmapsto \int_{[\gamma]} \omega = \int_{\gamma} \omega,$$

est bien définie. En particulier, si ω est une forme différentielle holomorphe alors l'intégrale ci-dessus est bien définie puisque toute forme différentielle holomorphe ω est fermée.

Définition 3.5 *On appelle périodes de ω suivant les cycles a_j, b_j, les nombres $\int_{a_j} \omega$ et $\int_{b_j} \omega$.*

Soit ω une forme différentielle holomorphe ou de $2^{ème}$espèce sur X. Soit

$$\gamma = \sum_{j=1}^{g} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{g} \beta_j b_j,$$

un cycle sur X. On déduit du théorème des résidus, que

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^{g} \alpha_j \int_{a_j} \omega + \sum_{j=1}^{g} \beta_j \int_{b_j} \omega.$$

Exercice 3.2 *Soit $p_0 \in X$, un point fixé. Montrer que pour tout point $p \in X$, l'intégrale $\int_{p_0}^{p} \omega$ est bien définie si et seulement si toutes les périodes de ω sont nulles.*

<u>*Solution*</u> : La condition nécessaire est évidente car si $\int_{p_0}^{p} \omega$ est bien définie, alors l'intégrale de ω sur tout chemin fermé est nulle. Concernant la condition suffisante, on va utiliser un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\int_{p_0}^{p} \omega$ n'est pas bien définie, dès lors deux chemins γ_1 et γ_2 conduisent à des résultats différents. On peut donc trouver un point p appartenant à l'intérieur du chemin fermé $\gamma \equiv \gamma_1 \cup \gamma_2$ tel que : $\text{Rés}_p \omega \neq 0$. Considérons maintenant deux cycles homologues, un de chaque côté du point p, de telle manière à ce que la bande de surface ainsi déterminée soit assez fine pour ne contenir qu'un seul point à résidu non nul. Soit q un point du premier cycle, r un autre point du second cycle et traçons un chemin qui relie les deux points a et r mais qui ne passe pas par le point p. En partant du point q, on parcourt le premier cycle et on revient au point q ; on désigne ce chemin parcouru par $\mathcal{C}_1$. Ensuite, on emprunte le chemin $\mathcal{C}_2$ qui mène du point q au point r. Après, on parcourt le second cycle et on notera par $\mathcal{C}_3$ le chemin parcouru. Enfin, on reprend le chemin inverse $\mathcal{C}_4$ qui mène du point r au point q. En désignant par $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$ le chemin fermé de ces parcourts, on voit que $\int_\mathcal{C} \omega \neq 0$ puisque $\text{Rés}_p \omega \neq 0$. D'un autre côté, on a

$$\int_\mathcal{C} \omega = \int_{\mathcal{C}_1} \omega + \int_{\mathcal{C}_2} \omega + \int_{\mathcal{C}_3} \omega + \int_{\mathcal{C}_4} \omega.$$

Par hypothèse les périodes de ω sont nulles, i.e.,

$$\int_{\mathcal{C}_1} \omega = \int_{\mathcal{C}_3} \omega = 0.$$

Or

$$\int_{\mathcal{C}_2} \omega = -\int_{\mathcal{C}_4} \omega,$$

donc $\int_\mathcal{C} \omega = 0$, ce qui est absurde.

Théorème 3.6 *L'ensemble*[5]

$$\Omega^1(X) = \{\omega : \omega \text{ différentielle holomorphe sur } X\},$$

des différentielles holomorphes sur X est de dimension g.

Démonstration : Montrons tout d'abord que :

$$\dim \Omega^1(X) \leq g.$$

Pour celà, nous allons montrer qu'il n'existe pas de suite libre de $g+1$ formes différentielles $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_g$ sur X. Donc déterminons des constantes non toutes nulles $c_0, ..., c_g$ telles que :

$$\omega \equiv \sum_{k=0}^{g} c_k \omega_k = 0.$$

Soit $\omega_k = u_k + iv_k$. Comme ω_k est holomorphe, sa partie réelle $u_k = \operatorname{Re} \omega_k$ et sa partie imaginaire $v_k = \operatorname{Im} \omega_k$ sont donc harmoniques. Considérons la différentielle réelle

$$\theta \equiv \sum_{k=0}^{g} (\xi_k u_k + \eta_k v_k), \quad (\xi_k, \eta_k \in \mathbb{R}),$$

et déterminons ξ_k, η_k de sorte que toutes les périodes de θ soient nulles, i.e.,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{g} \left(\xi_k \int_{a_1} u_k + \eta_k \int_{a_1} v_k \right) &= 0, \\
&\vdots \\
\sum_{k=0}^{g} \left(\xi_k \int_{a_g} u_k + \eta_k \int_{a_g} v_k \right) &= 0, \\
\sum_{k=0}^{g} \left(\xi_k \int_{b_1} u_k + \eta_k \int_{b_1} v_k \right) &= 0, \\
&\vdots \\
\sum_{k=0}^{g} \left(\xi_k \int_{b_g} u_k + \eta_k \int_{b_g} v_k \right) &= 0.
\end{aligned}$$

Ce sont $2g$ équations à $2g+2$ inconnues, il existe donc une solution ξ_k, η_k non triviale. Toutes les périodes de θ sont nulles et d'après ce qui précède, la fonction

$$\varphi(p) \equiv \int_0^p \theta,$$

[5] On écrira indifféramment $\Omega^1(X)$ ou $H^0(X, \Omega^1)$.

est bien définie. Cette fonction étant bornée et harmonique, alors d'après le principe du maximum, $\varphi=$ constante[6]. Notons que $\varphi(0)=0$, donc $\varphi\equiv 0$ et par conséquent $\theta=0$. Montrons maintenant que :

$$\sum_{k=0}^{g} c_k\omega_k = 0.$$

En effet, posons $c_k=\xi_k-i\eta_k$, d'où

$$\begin{aligned}\int_0^p \omega &= \int_0^p \sum_{k=0}^{g}(\xi_k-i\eta_k)(u_k+iv_k),\\ &= \int_0^p \sum_{k=0}^{g}(\xi_k u_k+\eta_k v_k)+i\int_0^p \sum_{k=0}^{g}(\xi_k v_k-\eta_k u_k),\\ &= \int_0^p \text{Re }\omega + i\int_0^p \text{Im }\omega.\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{g}(\xi_k u_k+\eta_k v_k)=\theta=0,$$

donc

$$\int_0^p \text{Re }\omega = 0.$$

D'après les conditions de Cauchy-Riemann, on a aussi

$$\int_0^p \text{Im }\omega = 0.$$

Donc

$$\int_0^p \omega = 0,\quad \forall p$$

et par conséquent $\omega=0$. Il reste à prouver que :

$$\dim\Omega^1(X)\geq g.$$

On se contente ici de donner les étapes essentielles. Considérons l'espace d'Hilbert $L^2(X)$ des formes différentielles mesurables sur X et $C^k(X)$ l'ensemble des formes différentielles $\zeta(\tau)d\tau$ avec $\zeta\in\mathcal{C}^k$ et τ un paramètre local. Soit $\omega\in C^1(X)\cap L^2(X)$. On montre que la forme ω se décompose de manière unique comme suit :

$$\omega=\omega_h+df,$$

[6]En effet, la fonction φ n'a ni maximum ni minimum car sinon elle devrait l'atteindre sur le bord de la surface de Riemann X. Or X n'a pas de bord et comme φ est bornée, alors $\varphi=$ constante.

où ω_h est une différentielle harmonique et $df \in L^2(X)$. Si $H(X)$ est l'ensemble des formes différentielles harmoniques sur X alors $\dim H \geq 2g$ et

$$H(X) = \Omega^1 \oplus \overline{\Omega}^1.$$

Dès lors,

$$\dim H(X) = 2\dim \Omega^1,$$

et par conséquent

$$\dim \Omega^1(X) \geq g,$$

et le résultat en découle. □

On déduit de l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial w}dw = 0,$$

sur la surface de Riemann $X : F(w,z) = 0$, que les différentielles rationnelles s'écrivent sur X :

$$\omega = \frac{P(w,z)}{\frac{\partial F}{\partial w}}dz = -\frac{P(w,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}}dw,$$

où $P(w,z)$ une fonction rationnelle arbitraire. En fait, la formule du résidu de Poincaré affirme que toutes les différentielles holomorphes sur la surface de Riemann X s'écrivent sous la forme ci-dessus avec pour $P(w,z)$ un polynôme de degré $\leq n-3$.

Exercice 3.3 *Montrer que*

$$\omega = \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}},$$

est l'unique différentielle holomorphe sur la courbe elliptique X d'équation :

$$F(w,z) = w^2 - z(z-1)(z-\lambda) = 0, \ \lambda \neq 0, 1.$$

<u>*Solution*</u> : En effet, les points de branchements de X sont : $0, 1, \lambda, \infty$. Comme $g(X) = 1$, alors d'après le théorème 3.6, il existe une seule différentielle holomorphe sur X. La formule du résidu de Poincaré s'écrit dans ce cas

$$\omega = \frac{z^k w^j}{2\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}}dz.$$

Prenons $j = 0$, d'où

$$\omega = \frac{z^k}{2\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}}dz.$$

Au voisinage du point $z = 0$, on choisit comme paramètre local $t = \sqrt{z}$. D'où

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{t^{2k}}{\sqrt{(t^2-1)(t^2-\lambda)}}dt,\\ &= at^{2k}(1+o(t^2))dt, \quad a \equiv \text{constante},\end{aligned}$$

ce qui montre que ω est holomorphe pour $k \geq 0$. Au voisinage de $z = 1$ et de $z = \lambda$, on utilise la même méthode et on obtient la même conclusion. Au voisinage de $z = \infty$, on choisit comme paramètre local $t = \dfrac{1}{\sqrt{z}}$ et on obtient

$$\begin{aligned}\omega &= -\frac{dt}{\sqrt{t^{2k}(1-t^2)(1-\lambda t^2)}}dt,\\ &= bt^{-2k}(1+o(t^2))dt, \quad b \equiv \text{constante},\end{aligned}$$

ce qui montre que ω est holomorphe pour $k \leq 0$. Donc au voisinage de $0, 1, \lambda, \infty$, la forme différentielle ω est holomorphe si $k = 0$, i.e., si

$$\omega = \frac{dz}{\sqrt{z\,(z-1)\,(z-\lambda)}}.$$

Elle l'est aussi en dehors de ces points car si $c \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0, 1, \lambda, \infty$, on choisit comme paramètre local $t = z - z_0$, d'où

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{dt}{2\sqrt{(t+z_0)(t+z_0-1)(t+z_0-\lambda)}}dt,\\ &= c(1+o(t^3))dt, \quad c \equiv \text{constante},\end{aligned}$$

est holomorphe. En conclusion,

$$\omega = \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-\lambda)}},$$

est l'unique différentielle holomorphe sur la courbe elliptique X.

Exercice 3.4 *Montrer que les différentielles*

$$\omega_k = \frac{z^{k-1}dz}{\sqrt{\prod_{j=1}^{2g+1}(z-z_j)}}, \ k = 1, 2, \ldots, g,$$

forment une base de différentielles holomorphes sur la courbe hyperelliptique X de genre g associée à l'équation

$$F(w, z) = w^2 - \prod_{j=1}^{2g+1}(z-z_j) = 0.$$

<u>*Solution*</u> : En effet, les points de branchements de X sont : $z_1, ..., z_{2g+1}, \infty$. D'après le théorème 3.6, le nombre de différentielles holomorphes sur X est égal au genre g de X. Il suffit d'utiliser un raisonnement similaire à celui de l'exemple précédent. Au voisinage de $z = z_i$, $1 \leq i \leq 2g+1$, on choisit comme paramètre local $t = \sqrt{z - z_i}$ et on obtient

$$\frac{2\left(z_i + t^2\right)^{k-1} tdt}{\sqrt{\prod_{j=1}^{2g+1}\left(t^2 + z_i - z_j\right)}},$$

qui sont holomorphes pour $k \geq 1$. De même, au voisinage de $z = \infty$, on choisit comme paramètre local $t = \frac{1}{\sqrt{z}}$ et on obtient

$$\omega = -\frac{2t^{2g+1}dt}{t^{2(k-g)}\sqrt{\prod_{j=1}^{2g+1}\left(1 - z_j t^2\right)}},$$

qui sont holomorphes pour $k \leq g$. En dehors des points $z_1, ..., z_{2g+1}, \infty$ les différentielles en questions sont évidemment holomorphes.

4 Relations bilinéaires de Riemann

Théorème 4.1 *Soient ω et ω' deux différentielles holomorphes sur X. Alors,*

$$\sum_{k=1}^{g}\left(\int_{a_k}\omega\int_{b_k}\omega' - \int_{b_k}\omega\int_{a_k}\omega'\right) = 0.$$

Si en outre ω est non nulle, alors

$$i\sum_{k=1}^{g}\left(\int_{a_k}\omega\int_{b_k}\overline{\omega} - \int_{b_k}\omega\int_{a_k}\overline{\omega}\right) > 0.$$

(Ces deux expressions s'appellent relations bilinéaires de Riemann).

Démonstration : Soit X^* la représentation normale de X. Posons

$$\begin{aligned} f(p) &= \int_{p_0}^{p}\omega, \\ g(p) &= \int_{p_0}^{p}\omega', \end{aligned}$$

où p_0 est un point fixé n'appartenant ni à a_k, ni à b_k. Les fonctions f et g sont bien définies sur X^*. Si $p \in a_k$, alors il est identifié à $p^* \in a_k^{-1}$. D'où

$$f(p^*) = \int_{p_0}^{p^*}\omega = f(p) + \int_{b_k}\omega. \tag{4.1}$$

Si $p \in b_k$, alors il est identifié à $p^* \in b_k^{-1}$. D'où

$$f(p^*) = \int_{p_0}^{p^*} \omega = f(p) - \int_{a_k} \omega. \tag{4.2}$$

Puisque la forme ω est exacte sur X^*, i.e., $\omega = df$, alors

$$\omega \wedge \omega' = df \wedge \omega' = d(f\omega').$$

En appliquant la formule de Stokes-Cartan, on obtient

$$\int_X \omega \wedge \omega' = \int_{\partial X^*} f\omega'.$$

En tenant compte de (4.1) et (4.2), on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\partial X^*} f\omega' = \sum_{k=1}^{g} \Bigg[\int_{\partial a_k} f\omega' + \int_{\partial b_k} f\omega' + \int_{\partial a_k^{-1}} \left(f + \int_{b_k} \omega \right) \omega' \\ + \int_{\partial b_k^{-1}} \left(f - \int_{a_k} \omega \right) \omega' \Bigg].\end{aligned}$$

Or

$$\int_{\partial a_k^{-1}} \left(f + \int_{b_k} \omega \right) \omega' = -\int_{\partial a_k} f\omega' - \int_{\partial a_k} \left(\int_{b_k} \omega \right) \omega',$$

$$\int_{\partial b_k^{-1}} \left(f - \int_{a_k} \omega \right) \omega' = -\int_{\partial b_k} f\omega' + \int_{\partial b_k} \left(\int_{a_k} \omega \right) \omega',$$

d'où

$$\int_{\partial X^*} f\omega' = \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{a_k} \omega \int_{b_k} \omega' - \int_{b_k} \omega \int_{a_k} \omega' \right),$$

i.e.,

$$\int_X \omega \wedge \omega' = \sum_{k=1}^{g} \left(\int_{a_k} \omega \int_{b_k} \omega' - \int_{b_k} \omega \int_{a_k} \omega' \right). \tag{4.3}$$

Si ω, ω' sont deux formes différentielles holomorphes sur X avec $\omega = f(z)dz$ et $\omega' = g(z)dz$, alors

$$\omega \wedge \omega' = fgdz \wedge dz = 0,$$

et par conséquent la relation (4.3) implique que :

$$\sum_{k=1}^{g} \left(\int_{a_k} \omega \int_{b_k} \omega' - \int_{b_k} \omega \int_{a_k} \omega' \right) = 0.$$

Si ω est une forme différentielle holomorphe sur X avec $\omega \neq 0$ et $\omega = f(z)dz$, $z = x + iy$ alors
$$\omega \wedge \overline{\omega} = -2i|f|^2 dx \wedge dy.$$
Dès lors
$$\begin{aligned} i\sum_{k=1}^{g}\left(\int_{a_k}\omega\int_{b_k}\overline{\omega} - \int_{b_k}\omega\int_{a_k}\overline{\omega}\right) &= i\int_X \omega\wedge\overline{\omega}, \text{ d'après (3.3) où } \omega' = \overline{\omega}, \\ &= \int_X |f|^2 dx\wedge dy > 0, \quad \omega \neq 0, \end{aligned}$$
et le théorème est démontré. □

Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ une base de différentielles holomorphes sur la surface de Riemann X de genre g.

Définition 4.2 *La matrice des périodes de X est définie par $\Omega = (E, F)$, où*
$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} \int_{a_1}\omega_1 & \cdots & \int_{a_g}\omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{a_1}\omega_g & \cdots & \int_{a_g}\omega_g \end{pmatrix}, \\ F &= \begin{pmatrix} \int_{b_1}\omega_1 & \cdots & \int_{b_g}\omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{b_1}\omega_g & \cdots & \int_{b_g}\omega_g \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 4.3 *Les 2g vecteurs*
$$\begin{pmatrix} \int_{a_1}\omega_1 \\ \vdots \\ \int_{a_1}\omega_g \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \int_{a_g}\omega_1 \\ \vdots \\ \int_{a_g}\omega_g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \int_{b_1}\omega_1 \\ \vdots \\ \int_{b_1}\omega_g \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \int_{b_g}\omega_1 \\ \vdots \\ \int_{b_g}\omega_g \end{pmatrix},$$
sont $\mathbb{R}$-linéairement indépendants.

Démonstration : En effet, procèdons par l'absurde en supposant que ces vecteurs soient $\mathbb{R}$-dépendants. Autrement dit, soit $k_1, ..., k_g, m_1, ...m_g$ des scalaires, tous non nuls, tels que :
$$\sum_{j=1}^{g}\left(k_j\begin{pmatrix} \int_{a_j}\omega_1 \\ \vdots \\ \int_{a_j}\omega_g \end{pmatrix} + m_j\begin{pmatrix} \int_{b_j}\omega_1 \\ \vdots \\ \int_{b_j}\omega_g \end{pmatrix}\right) = 0. \tag{4.4}$$
On a aussi
$$\sum_{j=1}^{g}\left(k_j\begin{pmatrix} \int_{a_j}\overline{\omega}_1 \\ \vdots \\ \int_{a_j}\overline{\omega}_g \end{pmatrix} + m_j\begin{pmatrix} \int_{b_j}\overline{\omega}_1 \\ \vdots \\ \int_{b_j}\overline{\omega}_g \end{pmatrix}\right) = 0, \tag{4.5}$$

où $\overline{\omega}_j$, $1 \leq j \leq g$, désigne le conjugué complexe de ω_j. Considérons la matrice

$$\Omega^* = \begin{pmatrix} \int_{a_1} \omega_1 & \cdots & \int_{a_g} \omega_1 & \int_{b_1} \omega_1 & \cdots & \int_{b_g} \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{a_1} \omega_g & \cdots & \int_{a_g} \omega_g & \int_{b_1} \omega_g & \cdots & \int_{b_g} \omega_g \\ \int_{a_1} \overline{\omega}_1 & \cdots & \int_{a_g} \overline{\omega}_1 & \int_{b_1} \overline{\omega}_1 & \cdots & \int_{b_g} \overline{\omega}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{a_1} \overline{\omega}_g & \cdots & \int_{a_g} \overline{\omega}_g & \int_{b_1} \overline{\omega}_g & \cdots & \int_{b_g} \overline{\omega}_g \end{pmatrix}.$$

D'après (4.4) et (4.5), on déduit que rang $\Omega^* < 2g$ et dès lors

$$\begin{aligned} \int_{a_k} \sum_{j=1}^{g} (\alpha_j \omega_j + \beta_j \overline{\omega}_j) &= 0, \\ \int_{b_k} \sum_{j=1}^{g} (\alpha_j \omega_j + \beta_j \overline{\omega}_j) &= 0, \end{aligned}$$

où $1 \leq k \leq g$ et $\alpha_1, ..., \alpha_g, \beta_1, ..., \beta_g$ sont des nombres complexes non tous nuls. En notant

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \sum_{j=1}^{g} \alpha_j \omega_j, \\ \eta &\equiv \sum_{j=1}^{g} \overline{\beta}_j \omega_j, \end{aligned}$$

les expressions ci-dessus peuvent encore s'écrire sous la forme

$$\int_{a_k} (\omega + \overline{\eta}) = 0, \qquad \int_{b_k} (\omega + \overline{\eta}) = 0, \quad 1 \leq k \leq g. \tag{4.6}$$

Montrons que la forme différentielle $\omega + \overline{\eta}$ est exacte. Soient γ un chemin d'extrémités p_0 et p et contenu dans X ; le point p_0 étant fixé tandis que p est arbitraire. On pose

$$h(p) = \int_{\gamma} (\omega + \overline{\eta}).$$

Cette intégrale ne dépend pas des extrémités p_0 et p de γ. En effet, désignons par γ_1 et γ_2 deux chemins joignant les points p_0 et p. Notons que $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ est un chemin fermé dans X et on peut écrire

$$\gamma = \sum_{j=1}^{g} (m_j a_j + n_j b_j) + \partial \triangle, \quad (m_j, n_j \in \mathbb{Z}),$$

où $\triangle$ est une chaîne dans X. D'après les équations (4.6) et le théorème de Stokes-Cartan, on a

$$\begin{aligned}\int_{\partial\triangle}(\omega+\overline{\eta}) &= \int\int_{\triangle} d(\omega+\overline{\eta}),\\ &= \int\int_{\triangle} 0,\\ &= 0.\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\int_{\gamma_1}(\omega+\overline{\eta}) = \int_{\gamma_2}(\omega+\overline{\eta}),$$

ce qui montre que la fonction

$$h(p) = \int_{\gamma}(\omega+\overline{\eta}),$$

ne dépend pas du choix de γ et elle est bien définie. Par conséquent,

$$\omega+\overline{\eta} = dh,$$

i.e., $\omega+\overline{\eta}$ est exacte. Nous allons maintenant montrer que $\omega=\eta=0$, ce qui contredit l'indépendance de $\omega_1,...,\omega_g$. Posons $\omega = f(z)dz$ et $\eta = g(z)dz$. On a

$$\omega\wedge\eta = 0,$$

et

$$\begin{aligned}\eta\wedge\overline{\eta} &= |g(z)|^2 dz\wedge d\overline{z},\\ &= -2i|g(z)|^2 dx\wedge dy,\end{aligned}$$

où $z = x+iy$. Pour montrer que $\eta = 0$, on va utiliser un raisonnement par l'absurde. Supposons donc que $\eta\neq 0$, d'où

$$\frac{i}{2}\int\int_X \eta\wedge\overline{\eta} = \int\int_X |g(z)|^2 dx\wedge dy > 0, \quad \eta\neq 0.$$

On a

$$\begin{aligned}\eta\wedge\overline{\eta} &= \eta\wedge\omega+\eta\wedge\overline{\eta},\\ &= \eta\wedge(\omega+\overline{\eta}),\\ &= \eta\wedge dh,\\ &= -dh\wedge\eta,\\ &= -d(h\eta)-h\wedge d\eta,\\ &= -d(h\eta)-h\wedge dg\wedge dz,\\ &= -d(h\eta)-h\wedge(\frac{\partial g}{\partial z}dz+\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}d\overline{z})\wedge dz,\\ &= -d(h\eta),\end{aligned}$$

car la forme η étant holomorphe, la fonction g est aussi holomorphe et d'après les conditions de Cauchy-Riemann, on a $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = 0$. D'où

$$\int\int_X \eta \wedge \overline{\eta} = -\int\int_X d(h\eta) = 0,$$

ce qui est absurde. Donc $\eta = 0$. En utilisant un raisonnement similaire, on montre qu'on a aussi $\omega = 0$ et la démonstration est complète. $\square$

Théorème 4.4 *Les relations bilinéaires de Riemann sont équivalentes respectivement aux relations suivantes :*

$$\begin{aligned} \Omega Q \Omega^\top &= 0, \\ i\Omega Q \overline{\Omega}^\top &> 0, \end{aligned}$$

où

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

est une matrice d'ordre $2g$ (dite matrice d'intersection) et I la matrice unité d'ordre g.

Démonstration : Soient ω et ω' deux différentielles holomorphes,

$$\Phi = \left(\int_{a_1} \omega ... \int_{a_g} \omega \int_{b_1} \omega ... \int_{b_g} \omega\right),$$

la matrice des périodes de ω et

$$\Phi' = \left(\int_{a_1} \omega' ... \int_{a_g} \omega' \int_{b_1} \omega' ... \int_{b_g} \omega'\right),$$

celle de ω'. Evidemment, la première relation bilinéaire de Riemann s'écrit

$$\Phi Q \Phi'^\top = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{j=1}^{g} \alpha_j \omega_j, \\ \omega' &= \sum_{j=1}^{g} \alpha'_j \omega_j, \end{aligned}$$

donc

$$\Phi = \left(\sum_{j=1}^{g} \alpha_j \int_{a_1} \omega_j ... \sum_{j=1}^{g} \alpha_j \int_{a_g} \omega_j \sum_{j=1}^{g} \alpha_j \int_{b_1} \omega_j ... \sum_{j=1}^{g} \alpha_j \int_{b_g} \omega_j \right) = \alpha\Omega,$$

où $\alpha \equiv (\alpha_1 ... \alpha_g)$ et

$$\Phi' = \left(\sum_{j=1}^{g} \alpha'_j \int_{a_1} \omega_j ... \sum_{j=1}^{g} \alpha'_j \int_{a_g} \omega_j \sum_{j=1}^{g} \alpha'_j \int_{b_1} \omega_j ... \sum_{j=1}^{g} \alpha'_j \int_{b_g} \omega_j \right) = \alpha'\Omega,$$

où $\alpha' \equiv (\alpha'_1 ... \alpha'_g)$. Si

$$\Phi Q \Phi'^{\top} = 0,$$

i.e.,

$$\alpha \Omega Q \Omega^{\top} \alpha^{\top} = 0,$$

quel que soit α, α', alors

$$\Omega Q \Omega^{\top} = 0.$$

Réciproquement, si

$$\Omega Q \Omega^{\top} = 0,$$

alors

$$\alpha \Omega Q \Omega^{\top} \alpha^{\top} = 0.$$

Autrement dit, la première relation bilinéaire de Riemann est équivalente à

$$\Omega Q \Omega^{\top} = 0.$$

Soit

$$\overline{\Phi} = \left(\int_{a_1} \overline{\omega} ... \int_{a_g} \overline{\omega} \int_{b_1} \overline{\omega} ... \int_{b_g} \overline{\omega} \right),$$

la matrice des périodes de $\overline{\omega}$. On montre que la seconde relation bilinéaire de Riemann s'écrit sous la forme

$$i \Phi Q \overline{\Phi}^{\top} > 0,$$

ou encore

$$i \alpha \Omega Q \overline{\Omega}^{\top} \overline{\alpha}^{\top} > 0.$$

Cette relation est vraie pour tout α, donc elle est équivalente à celle-ci :

$$i \Omega Q \overline{\Omega}^{\top} > 0,$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Proposition 4.5 *La matrice $i\Omega Q\overline{\Omega}^\top$ est hermitienne et elle est définie positive. On a*

$$\begin{aligned}\Omega Q\Omega^\top &= EF^\top - FE^\top,\\ \Omega Q\overline{\Omega}^\top &= E\overline{F}^\top - F\overline{E}^\top.\end{aligned}$$

En outre, la matrice E est inversible.

Démonstration : On sait que $i\Omega Q\overline{\Omega}^\top > 0$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\left(i\Omega Q\overline{\Omega}^\top\right)^\top &= Q\overline{\Omega}Q^\top\Omega^\top,\\ &= -Q\overline{\Omega}Q\Omega^\top,\\ &= \overline{\left(Q\Omega Q\overline{\Omega}^\top\right)},\end{aligned}$$

ce qui montre que $i\Omega Q\overline{\Omega}^\top$ est une matrice hermitienne. On a

$$\begin{aligned}\Omega Q\Omega^\top &= (E \quad F)\begin{pmatrix} O & I\\ -I & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E^\top\\ F^\top\end{pmatrix},\\ &= -FE^\top + EF^\top.\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}\Omega Q\overline{\Omega}^\top &= (E \quad F)\begin{pmatrix} O & I\\ -I & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{E}^\top\\ \overline{F}^\top\end{pmatrix},\\ &= -F\overline{E}^\top + E\overline{F}^\top.\end{aligned}$$

Soit s la solution de l'équation : $sE = 0$. D'après ce qui précéde, on a

$$\begin{aligned}s\left(i\Omega Q\overline{\Omega}^\top\right)^\top\overline{s}^\top &= is\left(E\overline{F}^\top - F\overline{E}^\top\right)\overline{s}^\top,\\ &= i\left((sE)(\overline{sF})^\top - (sF)(\overline{sE})^\top\right),\\ &= 0,\end{aligned}$$

puisque $sE = 0$. Dès lors l'équation $sE = 0$ admet la seule solution triviale $s = 0$ et par conséquent $\det E \neq 0$. Donc E est inversible et achève la démonstration. □

Soit $(\omega_1, ..., \omega_g)$ une base de différentielles holomorphes sur une surface de Riemann compacte X de genre g et soit $(a_1, ..., a_g, b_1, ..., b_g)$ une base symplectique du groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z})$. Soit $\Omega = (E, F)$ la matrice des périodes de X associée à ces bases. Notons que les périodes $\int_{a_j}\omega_j$ et $\int_{b_j}\omega_j$, dépendent non seulement de la structure complexe de la surface X mais dépendent aussi de ces bases. Nous allons voir qu'on n'est pas obligé de maintenir ce dernier choix. On montrera ci-dessous qu'il existe une unique base (dite normalisée) $(\eta_1, ..., \eta_g)$ de $H^0(X, \Omega^1)$ telle que :

$$(\eta_1, ..., \eta_g)^\top = E^{-1}(\omega_1, ..., \omega_g)^\top,$$

ou ce qui revient au même, telle que :

$$\int_{a_l} \eta_k = \delta_{lk}.$$

Proposition 4.6 *Soit $(\omega_1, ..., \omega_g)$ une base de différentielles holomorphes sur une surface de Riemann de genre g. Alors, il existe une nouvelle base (η_k) où*

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{g} c_{kj}\omega_j, \quad 1 \leq k \leq g,$$

telle que :

$$\int_{a_l} \eta_k = \delta_{lk}, \quad 1 \leq k, l \leq g,$$

i.e., de telle sorte que la matrice des périodes associée à cette base soit de la forme $(I,\ Z)$ où I est la matrice unité et $Z = E^{-1}F$. La matrice Z est symétrique et à partie imaginaire définie positive.

Démonstration : On a

$$\int_{b_l} \eta_k = \sum_{j=1}^{g} c_{kj} \int_{b_l} \omega_j,$$

ce qui s'exprime en langage matriciel par

$$Z = CF,$$

où $C = (c_{kj})_{1 \leq k,j \leq g}$ est la matrice des c_{kj}. Or $\int_{a_l} \eta_k = \delta_{lk}$, donc

$$\sum_{j=1}^{g} c_{kj} \int_{a_l} \omega_j = \delta_{lk},$$

i.e., $CE = I$. D'après la proposition précédente, la matrice E est inversible, d'où $C = E^{-1}$ et par conséquent

$$Z = E^{-1}F.$$

Montrons tout d'abord que : $Z = Z^\top$. En effet, on a

$$\begin{aligned} E\left(Z^\top - Z\right)E^\top &= E\left(F^\top (E^{-1})^\top - E^{-1}F\right)E^\top, \\ &= EF^\top - FE^\top, \\ &= \Omega Q \Omega^\top, \quad \text{proposition 4.5}, \\ &= 0, \end{aligned}$$

en vertu de la première relation bilinéaire de Riemann. Donc

$$Z^\top - Z = 0.$$

Montrons maintenant que : $\mathrm{Im}Z > 0$. En effet, d'après la proposition 4.5, la matrice $i\Omega J\overline{\Omega}^\top$ est définie positive. D'où

$$\begin{aligned} 0 &< E^{-1}\left(i\Omega Q\overline{\Omega}^\top\right)\left(\overline{E}^\top\right)^{-1}, \\ &= iE^{-1}\left(E\overline{F}^\top - F\overline{E}^\top\right)\left(\overline{E}^\top\right)^{-1}, \quad \text{proposition 4.5}, \\ &= i\left(\overline{F}^\top\left(\overline{E}^\top\right)^{-1} - E^{-1}F\right), \\ &= i\left(\overline{Z}^\top - Z\right), \\ &= i\left(\overline{Z} - Z\right), \quad \text{car Z est symétrique}, \\ &= \text{Im Z}, \end{aligned}$$

la démonstration s'achève. □

5 Diviseurs

Soient p un point de X,

$$\tau_p : X \longrightarrow \overline{\mathbb{C}},$$

un paramètre local en p (ou une uniformisante locale en p, i.e., rappelons que c'est une carte locale en p appliquant p sur 0) et f une fonction méromorphe au voisinage de p. L'ordre de f en p, est l'unique entier n tel que :

$$f = \tau_p^n.g,$$

où g est holomorphe ne s'annulant pas en p. Dans le cas où $f = 0$, on choisit par convention $n = +\infty$. L'entier n dépend de p et de f et on le note $\mathrm{ord}_p(f)$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_p(f_1 + f_2) &\geq \inf(\mathrm{ord}_p(f_1), \mathrm{ord}_p(f_2)), \\ \mathrm{ord}_p(f_1 f_2) &= \mathrm{ord}_p(f_1) + \mathrm{ord}_p(f_2). \end{aligned}$$

Définition 5.1 *Un diviseur sur une surface de Riemann X est une combinaison formelle du type*[7]

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \sum_{p\in X} n_p.p,\\ &= \sum_j n_j p_j, \quad n_j \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

avec (p_j) une famille localement finie de points de X.

La somme ci-dessus étant finie (puisque X est compacte), on peut donc définir le support d'un diviseur comme étant l'ensemble fini de points p_j pour lesquels le coefficient n_j est non nul. Le diviseur $\mathcal{D}$ est fini si son support est fini et ce sera toujours le cas si X est une surface de Riemann compacte. L'ensemble des diviseurs sur X est un groupe abélien noté $\text{Div}(X)$. L'addition des diviseurs est définie par l'addition des coefficients.

Définition 5.2 *Le degré*[8] *du diviseur $\mathcal{D}$ est un entier noté $deg\ \mathcal{D}$ et est défini par*

$$deg\ \mathcal{D} = \sum_j n_j.$$

L'application

$$\deg : \text{ Div }(X) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \mathcal{D} \longmapsto \deg \mathcal{D},$$

est un homomorphisme de groupe. Le noyau de cet homomorphisme est l'ensemble des diviseurs de degré 0, noté $\text{Div}^\circ(X)$, et forme un sous-groupe de $\text{Div}(X)$.

Soit $f \neq 0$, une fonction méromorphe sur X. A cette fonction f, on fait correspondre un diviseur noté (f) en prenant pour p_j les zéros et les pôles de f et pour n_j l'ordre de p_j avec un signe négatif pour les pôles. De manière plus précise, on pose

$$(f) = \sum_{p\in X} \text{ord}_p(f).p,$$

où les $\text{ord}_p f$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. En désignant par $\alpha_1, ..., \alpha_l$ les zéros de f de multiplicité $n_1, ..., n_l$ respectivement et par $\beta_1, ..., \beta_m$ les pôles de f de multiplicité $p_1, ..., p_m$ respectivement, on obtient

$$\begin{aligned}(f) &= \sum_{j=1}^{l} n_j\alpha_j - \sum_{j=1}^{m} p_j\beta_j,\\ &= (f)_0 - (f)_\infty,\end{aligned}$$

[7]Il s'agit d'une notation utile qui désigne une collection finie de points sans ordre y compris des entiers relatifs liés à chaque point. Lorsqu'on écrit par exemple : $2p_1 + 3p_2 + p_3 + \cdots + p_n$, il faut bien comprendre que cette écriture est purement formelle et qu'elle n'a rien à voir avec 2 coordonnées p_1, 3 coordonnées p_2, etc...

[8]ou ordre de $\mathcal{D}$, noté $o(\mathcal{D})$.

où

$$(f)_0 = (\text{diviseur des zéros de } f),$$

et

$$(f)_\infty = (\text{diviseur des pôles de} f).$$

Géométriquement, celà signifie que $(f)_0$ correspond à l'intersection de X avec la courbe $f = 0$ et $(f)_\infty$ à l'intersection de X avec $\frac{1}{f} = 0$.

Exemple 5.1 *Les diviseurs des fonctions*

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= z(z-1),\\
f_2(z) &= \frac{1}{z},\\
f_3(z) &= z^2,\\
f_4(z) &= \frac{z}{(z-a)(z-b)},\\
f_5(z) &= \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}, (a, b \in \mathbb{C})
\end{aligned}$$

sont évidemment égaux à

$$\begin{aligned}
(f_1) &= \{0\} - 2\{\infty\},\\
(f_2) &= \{0\} + \{\infty\},\\
(f_3) &= 2\{0\} - \{\infty\},\\
(f_4) &= -\{a\} - \{b\} + \{0\} + \{\infty\},\\
(f_5) &= -\{a\} - \{b\} + 2\{0\}.
\end{aligned}$$

On a $(fg) = (f) + (g)$, $(f^{-1}) = -(f)$, et

$$(f) = (g) \Longrightarrow \frac{f}{g} = \text{constante}.$$

Exercice 5.1 *Déterminer les diviseurs $(\wp(z))$ et $(\wp'(z))$ de la fonction de Weierstrass et de sa dérivée.*

<u>Indication</u> : La fonction $\wp(z)$ a un pôle double en chaque point du réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ (voir [17], proposition 17) et a deux zéros simples ou un zéro double. La fonction $\wp'(z)$ a trois zéros simples $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ (mod. Λ),(voir [17], proposition 22) et un pôle d'ordre 3 en 0.

Tout diviseur d'une fonction méromorphe est dit diviseur principal. L'ensemble des diviseurs principaux forme un sous-groupe de $\text{Div}^\circ(X)$. Sur toute surface de Riemann compacte, une fonction méromorphe $f \neq 0$ a le même nombre de zéros que des pôles, donc deg $(f) = 0$. Autrement dit, tout diviseur principal a le degré 0 mais en général, les diviseurs de degré 0 ne sont pas tous principaux.

Signalons deux notions qui seront étudiées dans les sections suivantes : Le groupe de Picard, noté $\text{Pic}(X)$, est le groupe des diviseurs quotienté par les diviseurs principaux. La variété jacobienne, notée $\text{Jac}(X)$, s'identifie au quotient du groupe des diviseurs de degré 0 par les diviseurs principaux. Nous verrons que

$$\text{Jac}(X) \simeq \text{Pic}^{\circ}(X),$$

où ce dernier désigne le sous-groupe de $\text{Pic}(X)$ formé par les classes des diviseurs de degré 0.

On dit qu'un diviseur $\mathcal{D}$ est positif (ou effectif) et on note $\mathcal{D} \geq 0$, si les entiers n_j qui interviennent dans la somme sont positifs. Plus généralement, on définit la relation d'ordre partiel $\geq$ sur les diviseurs par $\mathcal{D}_1 \geq \mathcal{D}_2$ si et seulement si $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$ est positif. Deux diviseurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont dits linéairement équivalents (et on note $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$) si $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$ est principal, i.e., si

$$\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 = (f),$$

où f est une fonction méromorphe.

Si

$$\mathcal{D} = \sum_{p \in X} n_p.p,$$

est un diviseur, on notera $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ l'ensemble des fonctions méromorphes f telles que :

$$\text{ord}_p(f) + n_p \geq 0,$$

pour tout $p \in X$. Autrement dit,

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \{f \text{ méromorphe sur } X : (f) + \mathcal{D} \geq 0\},$$

i.e., l'espace vectoriel des fonctions de X dont le diviseur est plus grand que $-\mathcal{D}$. Si $(f) + \mathcal{D}$ n'est ≥ 0 pour aucun f, on posera $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = 0$. Par exemple, si le diviseur $\mathcal{D}$ est positif alors $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ est l'ensemble des fonctions holomorphes en dehors de $\mathcal{D}$ et ayant au plus des pôles simples le long de $\mathcal{D}$.

Proposition 5.3 *Si $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$, alors $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathcal{D}_2)$ et en outre deg $\mathcal{D}_1 =$ deg $\mathcal{D}_2$.*

Démonstration : Par hypothèse $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$, donc par définition $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 = (f)$ où f est une fonction méromorphe. Par ailleurs, pour tout $g \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_1)$, on a $(g) + \mathcal{D}_1 \geq 0$, et dès lors

$$\begin{aligned}(fg) + \mathcal{D}_2 &= (f) + (g) + \mathcal{D}_2,\\ &= \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 + (g) + \mathcal{D}_2,\\ &= (g) + \mathcal{D}_1 \geq 0.\end{aligned}$$

L'application

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}_1) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{D}_2), \quad g \longmapsto fg,$$

est linéaire et admet comme réciproque

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}_2) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{D}_1), \quad g \longmapsto \frac{g}{f}.$$

D'où $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1) \cong \mathcal{L}(\mathcal{D}_2)$. En ce qui concerne la dernière assertion, on a

$$\deg\ (f) = \deg\ \mathcal{D}_1 - \deg\ \mathcal{D}_2,$$

et le résultat découle du fait que tout diviseur principal a le degré 0. □

Exercice 5.2 *Considérons le cas où $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est la droite projective complexe et soit $\mathcal{D} = \{0\} + \{1\}$ un diviseur sur X. Déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{D})$.*

Solution : On a

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \{f \text{ méromorphe sur } X : (f) + \{0\} + \{1\} \geq 0\},$$

i.e., l'espace vectoriel des fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ et ayant au plus un pôle simple en 0 et 1. Les fonctions qui appartiennent à $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ sont les constantes et les fonctions : $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{z(z-1)}$ (Cet espace est de dimension 3). En effet,, tout d'abord les constantes correspondent au cas où f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ puisque $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est compacte. Les fonctions de la forme $f(z) = \frac{1}{z}$ correspondent au cas où f est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et ayant un pôle simple en 0. De même, pour les fonctions $f(z) = \frac{1}{z-1}$ relatives au cas où f est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ et admettant un pôle simple en 1. Enfin, les fonctions $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ concernant le cas où f admet un pôle simple en 0 et en 1.

Exercice 5.3 *Montrer que quels que soient $x \neq y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, il existe une fonction méromorphe f sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de diviseur $(f) = x - y$.*

Indication : Considérer la fonction $f(z) = \frac{z-x}{z-y}$.

On peut associer à chaque forme différentielle ω un diviseur noté (ω). Si

$$\omega = f d\tau_p,$$

avec f une fonction méromorphe sur X et τ_p un paramètre local en $p \in X$, on définit l'ordre de ω en p par

$$\mathrm{ord}_p(\omega) = \mathrm{ord}_0(f),$$

et le diviseur (ω) de ω par

$$(\omega) = \sum_{p\in X} \mathrm{ord}_p(\omega).p.$$

Si

$$\mathcal{D} = \sum_{p\in X} n_p.p,$$

est un diviseur, on définit de façon analogue à $\mathcal{L}(\mathcal{D})$, l'espace linéaire $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ comme étant l'ensemble des formes différentielles méromorphes ω sur X telles que :

$$\mathrm{ord}_p\omega + n_p \geq 0,$$

pour tout $p \in X$. Autrement dit,

$$\mathcal{I}(\mathcal{D}) = \{\omega \text{ méromorphe sur } X : (\omega) + \mathcal{D} \geq 0\},$$

i.e., l'ensemble des formes différentielles méromorphes ω sur X telles que : $(\omega)+\mathcal{D} \geq 0$. Si $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$, alors $\mathcal{I}(\mathcal{D}_1)$ est isomorphe à $\mathcal{I}(\mathcal{D}_2)$, d'où $\dim \mathcal{I}(\mathcal{D}_1) = \dim \mathcal{I}(\mathcal{D}_2)$. Dans le cas où le diviseur $\mathcal{D}$ est négatif, alors $(\omega) + \mathcal{D} \geq 0$ est l'ensemble des formes différentielles qui n'ont pas de pôles et qui ont des zéros au moins aux points de $\mathcal{D}$. Notons enfin qu'en vertu du théorème des résidus, on a

$$\sum_{p\in X} \text{Rés } (\omega) = 0,$$

où Rés (ω) est le résidu en p de ω, i.e., le coefficient de $\frac{1}{\tau_p}$ dans le développement de f en série de Laurent.

Définition 5.4 *On appelle diviseur canonique sur X et l'on désigne par K, le diviseur (ω) d'une $1-$forme méromorphe $\omega \neq 0$ sur X.*

Proposition 5.5 *Soit $\mathcal{D}$ un diviseur sur une surface de Riemann compacte X et K un diviseur canonique sur X. Alors, l'application*

$$\psi : \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{I}(-\mathcal{D}), \quad f \longmapsto f\omega, \tag{5.1}$$

est un isomorphisme.

Démonstration : En effet, on a

$$\begin{aligned} (f\omega) &= (f) + (\omega), \\ &= (f) + K \geq -(K - \mathcal{D}) + K, \\ &= -(-\mathcal{D}), \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application ψ est bien définie. Cette dernière est injective, i.e., l'équation $f\omega = g\omega$ entraine $f = g$. Montrons que ψ est surjective. Soit $\eta \in \mathcal{I}(-\mathcal{D})$, d'où il existe une fonction méromorphe h sur X telle que : $h\omega = \eta$. Dès lors,

$$\begin{aligned}(h) + K &= (h) + (\omega),\\ &= (h\omega),\\ &= (\eta) \geq -(-\mathcal{D}),\end{aligned}$$

d'où $(h) \geq -(K - \mathcal{D})$, $h \in \mathcal{L}(K - \mathcal{D})$ et par conséquent ψ est surjective. $\square$

6 Le théorème de Riemann-Roch

Nous allons maintenant étudier un des théorèmes les plus importants de la théorie des surfaces de Riemann compactes : le théorème de Riemann-Roch. Il permet de définir le genre d'une surface de Riemann qui est un invariant fondamental. Il s'agit d'un théorème d'existence efficace qui permet, entre autres, de déterminer le nombre de fonctions méromorphes linéairement indépendantes ayant certaines restrictions sur leurs pôles. A cause de l'importance de ce théorème, nous allons donner une preuve élémentaire constructive bien qu'un peu technique et nous mentionnons aussi quelques conséquences de ce théorème.

Théorème 6.1 *: Si X une surface de Riemann compacte et $\mathcal{D}$ est un diviseur sur X, alors*

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) = \ deg\ \mathcal{D} - g + 1, \tag{6.1}$$

où K est le diviseur canonique sur X et g est le genre de X. Cette formule peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) = \ deg\ \mathcal{D} - g + 1. \tag{6.2}$$

Démonstration : L'équivalence entre les formules (6.1) et (6.2) résulte immédiatement de l'isomorphisme (5.1). La preuve du théorème est immédiate dans le cas où $\mathcal{D} = 0$ car $\mathcal{L}(0)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur X. Or toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte est constante, donc $\mathcal{L}(0) = \mathbb{C}$. En outre, on sait que la dimension de l'espace des formes différentielles holomorphes sur X est le genre g de X, d'où le résultat. La preuve du théorème va se faire en plusieurs étapes :
Étape 1 : Soit $\mathcal{D}$ un diviseur positif. Autrement dit,

$$\mathcal{D} = \sum_{k=1}^{m} n_k p_k, \quad n_k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k \in X.$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$, i.e., f a au plus un pôle d'ordre n_k en p_k. Au voisinage de p_k, on a

$$df = \left(\sum_{j=-n_k-1}^{\infty} c_j^k \tau^j \right) d\tau,$$

donc df est méromorphe. Plus précisément, df a un pôle d'ordre $n_k + 1$ en p_k. Comme f est méromorphe, alors df ne peut pas avoir de pôle simple et dès lors son résidu est nul, i.e., $c_{-1}^k = 0$. Soit $(a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g)$ une base de cycles dans le groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z})$ de telle façon que les indices d'intersection de cycles deux à deux s'écrivent :

$$(a_i, a_i) = (b_i, b_i) = 0, \quad (a_i, b_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq g$$

Rappelons (analyse harmonique) [12] que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $p \in X$, il existe une différentielle méromorphe unique η sur X telle que : η est holomorphe sur $X \backslash p$ tandis qu'autour de p,

$$\eta = \left(\frac{1}{\tau^n} + o(\tau) \right) d\tau,$$

où τ est un paramètre local en p choisi avec $p = 0$ et en outre, on a $\int_{a_i} \eta = 0$. Posons

$$\eta = df - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k} c_j^k \eta_k^j, \tag{6.3}$$

où η_k^j sont des différentielles méromorphes ayant un pôle d'ordre j en p_k et holomorphes sur $X \backslash p_k$. D'où

$$\int_{a_i} \eta = \int_{a_i} df - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k} c_j^k \int_{a_i} \eta_k^j.$$

L'intégrale d'une différentielle exacte le long d'un chemin fermé étant nulle, donc $\int_{a_i} df = 0$. La forme η étant holomorphe, alors

$$\eta = c_1 \omega_1 + \cdots + c_g \omega_g,$$

où $(\omega_1, ..., \omega_g)$ est une base de $\Omega(X)$ et dès lors

$$\eta = c_1 \int_{a_i} \omega_1 + \cdots + c_g \int_{a_i} \omega_g, \quad i = 1, ..., g$$

La matrice $E = \left(\int_{a_i} \omega_j \right)_{1 \leq i, j \leq g}$, étant inversible, alors

$$c_1 = \cdots = c_g = 0,$$

donc $\eta = 0$ et d'après (6.3), on a

$$df = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k} c_j^k \eta_k^j.$$

Considérons l'application

$$\varphi : \mathcal{L}(\mathcal{D}) \longrightarrow V \equiv \left\{ (c_j^k) : \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k} c_j^k \int_{b_l} \eta_k^j = 0 \right\}, \quad f \longmapsto c_j^k.$$

Notons que

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi &= \{ f : \text{méromorphe sur X et n'ayant pas de pôle} \}, \\ &= \{ f : f \text{ est une constante} \}, \end{aligned}$$

d'où dim Ker $\varphi = 1$ et par conséquent,

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = \dim V + 1.$$

Les espaces $\frac{\mathcal{L}(\mathcal{D})}{\mathbb{C}}$ et V sont isomorphes et on a

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - 1 = \dim V &= \dim \left\{ (c_j^k) : \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k} c_j^k \int_{b_l} \eta_k^j = 0 \right\}, \\ &= \deg \mathcal{D} - \text{ rang } \mathcal{M}, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \int_{b_l} \eta_1^2 & \int_{b_l} \eta_1^3 & \dots & \int_{b_l} \eta_1^{n_1+1} & \int_{b_l} \eta_2^2 & \dots & \int_{b_l} \eta_2^{n_2+1} & \dots & \int_{b_l} \eta_m^{n_m+1} \\ \int_{b_2} \eta_1^2 & \int_{b_2} \eta_1^3 & \dots & \int_{b_2} \eta_1^{n_1+1} & \int_{b_2} \eta_2^2 & \dots & \int_{b_2} \eta_2^{n_2+1} & \dots & \int_{b_2} \eta_m^{n_m+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \int_{b_g} \eta_1^2 & \int_{b_g} \eta_1^3 & \dots & \int_{b_g} \eta_1^{n_1+1} & \int_{b_g} \eta_2^2 & \dots & \int_{b_g} \eta_2^{n_2+1} & \dots & \int_{b_g} \eta_m^{n_m+1} \end{pmatrix},$$

est la matrice dont le nombre de lignes est g et le nombre de colonnes est deg $\mathcal{D}$. Notons que

$$\begin{aligned} \text{rang } \mathcal{M} &= \text{ Nombre de colonnes } - \text{Nombre de relations entre ces colonnes }, \\ &= \deg \mathcal{D} - \dim V, \\ &= \deg \mathcal{D} - \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) + 1. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Calculons maintenant le rang de $\mathcal{M}$ d'une autre façon. Soit $(\omega_1, ..., \omega_g)$ une base orthonormée de $\Omega^1(X)$. Au voisinage de p_k, la forme ω_s admet un développement en série de Taylor,

$$\omega_s = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{sj}^k \tau^j \right) d\tau.$$

Posons
$$\varphi_s \equiv \int_0^z \omega_s,$$
et soit X^* la représentation normale de la surface de Riemann X. Notons que si $\tau \in a_j$, alors il est identifié à $\tau^* \in a_j^{-1}$, d'où
$$\varphi_s(\tau^*) = \varphi_s(\tau) + \int_{b_j} \omega_s.$$
De même, si $\tau \in b_j$, alors il est identifié à $\tau^* \in b_j^{-1}$ et
$$\varphi_s(\tau^*) = \varphi_s(\tau) + \int_{a_j} \omega_s.$$
On a
$$\begin{aligned}
\int_{\partial X^*} \varphi_s \eta_k^n &= \sum_{j=1}^{g} \left(\int_{a_j} \varphi_s \eta_k^n + \int_{b_j} \varphi_s \eta_k^n + \int_{a_j^{-1}} \left(\varphi_s + \int_{b_j} \omega_s \right) \eta_k^n \right. \\
&\quad \left. + \int_{b_j^{-1}} \left(\varphi_s - \int_{a_j} \omega_s \right) \eta_k^n \right), \\
&= \sum_{j=1}^{g} \left(- \int_{b_j} \omega_s \int_{a_j} \eta_k^n + \int_{a_j} \omega_s \int_{b_j} \eta_k^n \right), \\
&= \sum_{j=1}^{g} \left(-\omega_s(b_j) \eta_k^n(a_j) + \omega_s(a_j) \eta_k^n(b_j) \right), \\
&= \sum_{j=1}^{g} \omega_s(a_j) \eta_k^n(b_j), \\
&= \eta_k^n(b_s).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial X^*} \varphi_s \eta_k^n &= 2\pi i \sum_k \text{ Rés }_{p_k} \left(\varphi_s \eta_k^n \right), \\
&= 2\pi i \frac{\alpha_{s,n-2}^k}{n-1},
\end{aligned}$$
donc d'après (6.5), la matrice $\mathcal{M}$ a comme coefficient
$$\begin{aligned}
\int_{b_s} \eta_k^n &= \eta_k^n(b_s), \\
&= 2\pi i \frac{\alpha_{s,n-2}^k}{n-1}.
\end{aligned}$$

Dès lors $\det \mathcal{M} = C \det \mathcal{N}$, où

$$C \equiv (2\pi i)\,(\pi i)\ldots\left(\frac{2\pi i}{n_1}\right)(2\pi i)\ldots\left(\frac{2\pi i}{n_2}\right)\ldots\left(\frac{2\pi i}{n_m}\right),$$

est une constante et

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} \alpha^1_{1,0} & \alpha^1_{1,1} & \ldots & \alpha^1_{1,n_1-1} & \alpha^2_{1,0} & \ldots & \alpha^2_{1,n_2-1} & \ldots & \alpha^m_{1,n_m-2} \\ \alpha^1_{2,0} & \alpha^1_{2,1} & \ldots & \alpha^1_{2,n_1-1} & \alpha^2_{2,0} & \ldots & \alpha^2_{2,n_2-1} & \ldots & \alpha^m_{2,n_m-2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha^1_{g,0} & \alpha^1_{g,1} & \ldots & \alpha^1_{g,n_1-1} & \alpha^2_{g,0} & \ldots & \alpha^2_{g,n_2-1} & \ldots & \alpha^m_{g,n_m-2} \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant la dimension de l'espace $\mathcal{L}(K-\mathcal{D})$ ou ce qui revient au même de l'espace $\mathcal{I}(-\mathcal{D})$, i.e., celui des formes différentielles méromorphes ω qui s'annulent n_k fois au point p_k. On a

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{s=1}^{g} X_s\omega_s, \\ &= \sum_{s=1}^{g} X_s\left(\alpha^k_{s,0} + \alpha^k_{s,1}\tau + \alpha^k_{s,2}\tau^2 + \cdots\right)d\tau. \end{aligned}$$

Pour que ω s'annule n_k fois au point p_k, il faut que les n_k premiers termes dans l'expression ci-dessus soient nulles. Dès lors, $(X_1, \ldots, X_g).\mathcal{N} = 0$, tandis que la dimension de $\mathcal{L}(K-\mathcal{D})$ coincide avec celle de l'ensemble de $(X_1, \ldots, X_g)$ tel que :

$$\omega = \sum_{s=1}^{g} X_s\omega_s,$$

s'annule n_k fois au point p_k, i.e.,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(K-\mathcal{D}) &= g - \text{rang}\,\mathcal{N}, \\ &= g - \text{rang}\,\mathcal{M}. \end{aligned}$$

D'où rang $\mathcal{M} = g - \dim \mathcal{L}(K-\mathcal{D})$, et en tenant compte de (5.4), on obtient finalement

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(K-\mathcal{D}) = \deg\,\mathcal{D} - g + 1.$$

<u>Étape 2</u> : La preuve donnée dans l'étape 1 est valable pour tout diviseur linéairement équivalent à un diviseur positif car $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D})$, $\dim \mathcal{L}(K-\mathcal{D})$ (ou $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D})$) et $\deg\,\mathcal{D}$ ne seront pas affectés.
<u>Étape 3</u> : Soit f une fonction méromorphe, $\mathcal{D}$ un diviseur positif et posons

$$\mathcal{D}' = (f) + \mathcal{D}_0,$$

autrement dit, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}_0$ sont linéairement équivalents. Nous avons les assertions suivantes :

(i) $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}') = \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_0)$,

(ii) $\dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}') = \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}_0)$,

(iii) $\deg\, \mathcal{D}' = \deg\, \mathcal{D}_0$,

qui découlent immédiatement de la proposition 5.3. Envisageons maintenant les différents cas possibles :
1^{er}*cas* : $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) > 0$. Soit $f_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$, d'où $(f_0) + \mathcal{D} > 0$, et

$$\dim \mathcal{L}((f_0) + \mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}\left(K - (f_0) - \mathcal{D}\right) = \deg\, ((f_0) + \mathcal{D}) - g + 1,$$

i.e.,

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) = \deg\, \mathcal{D} - g + 1.$$

$2^{\text{ème}}$*cas* : $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = 0$ et $\dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) \neq 0$. En appliquant la formule ci-dessus à $K - \mathcal{D}$, on obtient

$$\dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = \deg(K - \mathcal{D}) - g + 1. \tag{6.6}$$

Pour la suite, on aura besoin du résultat intéressant suivant : Pour tout diviseur canonique K sur une surface de Riemann compacte X, on a

$$\deg\, K = 2g - 2. \tag{6.7}$$

où g est le genre de X. En effet, en posant $\mathcal{D} = K$ dans la formule (6.1), on obtient

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(0) = \deg\, \mathcal{D} - g + 1.$$

Or $\mathcal{L}(0) = \mathbb{C}$, donc $\dim \mathcal{L}(0) = 1$ et on a

$$\deg\, K = g + \dim \mathcal{L}(K) - 2.$$

Par ailleurs, en posant $\mathcal{D} = 0$ dans la formule (6.1), on obtient

$$\dim \mathcal{L}(0) - \dim \mathcal{L}(K) = \deg\, 0 - g + 1,$$

d'où $\dim \mathcal{L}(K) = g$ et par conséquent $\deg\, K = 2g - 2$. Ceci achève la preuve du résultat annoncé. Pour terminer la preuve du $2^{\text{ème}}$*cas*, on utilise ce résultat et la formule (6.6), on obtient

$$\dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = -\deg\, \mathcal{D} + g - 1.$$

$3^{\text{ème}}$*cas* : $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) = 0$. Pour ce cas, on doit montrer que : $\deg\, \mathcal{D} = g - 1$. Pour celà, considérons deux diviseurs positifs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'ayant aucun point en commun et posons $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$. On a

$$\deg\, \mathcal{D} = \deg\, \mathcal{D}_1 - \deg\, \mathcal{D}_2,$$

et

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) \geq \deg\, \mathcal{D}_1 - g + 1 = \deg\, \mathcal{D} + \deg\, \mathcal{D}_2 - g + 1,$$

i.e.,

$$\deg\, \mathcal{D}_2 - \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_1) \leq \deg\, \mathcal{D} + g - 1.$$

Or $\deg\, \mathcal{D}_2 - \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}_1) \geq 0$, car sinon il existe une fonction $f \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_1)$ qui s'annule en tout point de $\mathcal{D}_2$, donc $\deg\, \mathcal{D} \leq g - 1$. En appliquant le même raisonnement à $K - \mathcal{D}$, on obtient $\deg\, (K - \mathcal{D}) \leq g - 1$. Comme $\deg\, K = 2g - 2$ (voir (6.7)), alors $\deg\, \mathcal{D} \geq g - 1$. Finalement, $\deg\, \mathcal{D} = g - 1$, ce qui achève la démonstration du théorème. □

Remarque 6.1 *La formule (6.1) peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_{\mathcal{D}}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{\mathcal{D}}) = \ deg\, \mathcal{D} - g + 1.$$

En introduisant la caractéristique d'Euler-Poincaré :

$$\chi(\mathcal{D}) \equiv \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_{\mathcal{D}}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{\mathcal{D}}),$$

pour un diviseur $\mathcal{D}$ sur une surface de Riemann X de genre g, le théorème de Riemann-Roch s'écrit

$$\chi(\mathcal{D}) = deg\, \mathcal{D} - g + 1.$$

Une preuve rapide du théorème de Riemann-Roch utilise des théories encore plus poussées ; elle se base sur la dualité de Kodaira-Serre et autres techniques (voir par exemple [9, 20]).

Exercice 6.1 *Soit X une surface de Riemann compacte de genre g. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur X avec un seul pôle d'ordre au plus $g + 1$.*

<u>Indication</u> : Utiliser le théorème de Riemann-Roch.

Exercice 6.2 *On sait que toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann compacte X est constante. Que se passe t-il dans le cas des fonctions méromorphes ? Même question pour les formes différentielles holomorphes non nulles sur X.*

<u>Réponse</u> : La réponse découle du théorème de Riemann-Roch. Plus précisément, si p est un point quelconque de X, on peut trouver une fonction méromorphe non constante, holomorphe sur $X \backslash \{p\}$ et ayant un pôle d'ordre inférieur ou égal à $g + 1$ en p. De même, on montre qu'il existe sur X des formes différentielles holomorphes non nulles, qui s'annulent en au moins un point.

Exercice 6.3 *Soient $(\omega_1, ..., \omega_g)$ une base de $\Omega^1(X)$. Soit (U, τ) une carte locale en $p \in X$ avec $\tau(p) = 0$. Il existe des fonctions f_j holomorphes sur U telles que : $\omega_j = f_j(\tau)d\tau$. Le wronskien de $\omega_1, ..., \omega_g$ est défini par le déterminant*

$$W_\tau(\omega_1, ..., \omega_g) \equiv W(f_1, ..., f_g) = \det\left(f_j^{(k-1)}\right)_{1\leq j,k\leq g}.$$

On dit que p est un point de Weierstrass si $W_\tau(\omega_1, ..., \omega_g)$ s'annule.

a) Montrer que si p est un point de Weierstrass alors on peut trouver une fonction méromorphe sur X ayant un pôle unique d'ordre inférieur ou égal au genre g au point p.

b) Montrer que le théorème de Riemann-Roch, permet de montrer l'existence d'une suite de g entiers : $1 = n_1 < n_2 < ... < 2g$, $g \geq 1$, pour lesquels il n'existe aucune fonction holomorphe sur $X \setminus p$, $p \in X$, et ayant un pôle en p d'ordre exactement n_j.

c) Montrer que p est un point de Weierstrass si et seulement si la suite des n_j est distincte de $\{1, 2, ..., g\}$.

7 La formule de Riemann-Hurwitz

Nous donnons une preuve analytique de l'importante formule de Riemann-Hurwitz. Elle exprime le genre d'une surface de Riemann à l'aide du nombre de ses points de ramifications et du nombre de ses feuillets. Nous montrons que cette formule fournit un moyen efficace pour déterminer le genre d'une surface de Riemann donnée. Quelques exemples intéressants seront étudiés.

Soient X et Y deux surfaces de Riemann compactes connexes et soit f une application holomorphe non constante de X dans Y. Notons que f est un revêtement, i.e., un morphisme surjectif fini. Pour tout point $p \in X$, il existe une carte φ (resp. ψ) de X (resp. Y) centrée en p (resp. $f(p)$) telles que :

$$f_{\psi\circ\varphi}(\tau) = \tau^n,$$

où n est un entier strictement positif. L'entier $n - 1$ s'appelle indice de ramification de f au point p et on le note $V_f(p)$. Lorsque $V_f(p)$ est strictement positif, alors on dit que p est un point de ramification (ou de branchement) de f. Une condition nécessaire et suffisante pour que p soit un point de ramification de f est que le rang de f en p soit nul. L'image J des points de ramifications de f ainsi que que son image réciproque I sont fermés et discrets. La restriction de f à $X \setminus I$ est un revêtement de $Y \setminus J$ dont le nombre de feuillets est le degré de l'application f et on a

$$m \equiv \sum_{p\in f^{-1}(q)} (V_f(p) + 1), \quad \forall q \in Y.$$

Théorème 7.1 *(Formule de Riemann-Hurwitz). Soient X et Y deux surfaces de Riemann compactes de genre $g(X)$ et $g(Y)$ respectivement. Soit f une application holomorphe non constante de X dans Y. Alors*

$$g(X) = m\,(g(Y) - 1) + 1 + \frac{V}{2},$$

où m est le degré de f et V est la somme des indices de ramification de f aux différents points de X.

Démonstration : Soit $f : X \longrightarrow Y$, une application holomorphe non constante de degré m. Soit ω (resp. η) une forme différentielle méromorphe non nulle sur Y (resp. X). Soit τ (resp. υ) un paramètre local sur X (resp. Y) et supposons que : $\upsilon = f(\tau)$. En désignant par

$$\omega = h(\upsilon)d\upsilon,$$

la forme différentielle méromorphe sur Y, alors la forme différentielle η sur X s'écrit en terme de τ sous la forme,

$$\eta = h(f(\tau))f'(\tau)d\tau.$$

Nous allons voir que cette dernière est aussi méromorphe. Notons que si on remplace τ par τ_1, avec $\tau = w(\tau_1)$, alors en terme de τ_1 l'application f s'écrit

$$\upsilon = (f \circ w)(\tau_1),$$

et donc nous attribuons à τ_1 l'expression

$$h(f(w(\tau_1)))f'(w(\tau_1))w'(\tau_1)d\tau_1,$$

ce qui montre que η est une forme différentielle méromorphe. On peut supposer que τ s'annule en $p \in X$ et que υ s'annule en $f(p)$. Dès lors,

$$\upsilon = \tau^{V_f(p)+1},$$

où $V_f(p)$ est l'indice de ramification de f au point p. Par conséquent,

$$\text{ord}_p\eta = (V_f(p) + 1)\ \text{ord}_{f(p)}\omega + V_f(p),$$

et

$$\sum_{p\in X} \text{ord}_p\eta = \sum_{p\in X}(V_f(p) + 1)\ \text{ord}_{f(p)}\omega + V,$$

où $V = \sum_{p\in X} V_f(p)$. D'après la formule (6.7), on a

$$\sum_{p\in X} \text{ord}_p\eta = 2g(X) - 2,$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{p\in X}(V_f(p)+1)\ \mathrm{ord}_{f(p)}\omega &= \sum_{p\in X, V_f(p)=0} \mathrm{ord}_{f(p)}\omega,\\ &= \sum_{q\in Y} m.\ \mathrm{ord}_q\omega,\\ &= m(2g(Y)-2).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$2g(X)-2 = m(2g(Y)-2)+V,$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

Une des conséquences les plus intéressantes de la formule de Riemann-Hurwitz est de fournir un moyen efficace pour calculer le genre d'une surface de Riemann donnée.

Exemple 7.1 *Un cas particulier important est représenté par les courbes hyperelliptiques X de genre $g(X)$ d'équations*

$$w^2 = p_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-z_j),$$

où $p_n(z)$ est un polynôme sans racines multiples, i.e., tous les z_j sont distincts. Notons que

$$f : X \longrightarrow Y = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\cup\{\infty\},$$

est un revêtement double ramifié le long des points z_j. Chaque z_j est ramifié d'indice 1 et en outre le point à l'infini ∞ est ramifié si et seulement si n est impair. D'après la formule de Riemann-Hurwitz, on a

$$\begin{aligned}g(X) &= m(g(Y)-1)+1+\frac{V}{2},\\ &= 2(0-1)+1+\frac{1}{2}\sum_{p\in X}V_f(p),\\ &= E\left(\frac{n-1}{2}\right),\end{aligned}$$

où $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ désigne la partie entière de $\left(\frac{n-1}{2}\right)$. Les courbes hyperelliptiques de genre g sont associées aux équations de la forme :

$$w^2 = p_{2g+1}(z),$$

ou $w^2 = p_{2g+2}(z)$, (selon que le point à l'infini ∞ est un point de branchement ou non) avec $p_{2g+1}(z)$ et $p_{2g+2}(z)$ des polynômes sans racines multiples.

Exercice 7.1 *Déterminer le genre g de la surface de Riemann X associée à l'équation :*

$$F(w,z) = w^3 + p_2(z)w^2 + p_4(z)w + p_6(z) = 0,$$

où $p_j(z)$ désigne un polynôme de degré j.

<u>*Solution*</u> : On procède comme suit : on a

$$\begin{aligned} F(w,z) &= w^3 + az^2w^2 + bz^4w + cz^6 + \text{termes d'ordre inférieur}, \\ &= \prod_{j=1}^{3}\left(w + \alpha_j z^2\right) + \text{termes d'ordre inférieur.} \end{aligned}$$

Considérons F comme un revêtement par rapport à z et cherchons ce qui se passe quand $z \nearrow \infty$. On a

$$\begin{aligned} (w)_\infty &= -2P - 2Q - 2R, \\ (z)_\infty &= -P - Q - R. \end{aligned}$$

Posons $t = \dfrac{1}{z}$, d'où

$$F(w,z) = \frac{1}{t^6}(t^6w^3 + at^4w^2 + bt^2w + c) + \cdots .$$

Ceci suggère le changement de cartes suivant :

$$(w,z) \longmapsto \left(\zeta = t^2w, t = \frac{1}{z}\right).$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial w} &= 3w^2 + 2p_2(z)w + p_4(z), \\ &= 3w^2 + 2az^2w + bz^4 + \cdots , \\ &= \frac{3\zeta^2}{t^4} + \frac{2a\zeta}{t^4} + \frac{b}{t^4} + \cdots \end{aligned}$$

La fonction $\frac{\partial F}{\partial w}$ étant méromorphe sur la surface de Riemann X, alors Le nombre de zéros de cette fonction coincide avec celui de ses pôles. Comme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_P &= -4P, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_Q &= -4Q, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_R &= -4R, \\ \left(\frac{\partial F}{\partial w}\right)_\infty &= -4(P+Q+R), \end{aligned}$$

alors le nombre de zéros de $\frac{\partial F}{\partial w}$ dans la partie affine $X \setminus \{P, Q, R\}$ est égal à 12, et d'après la formule de Riemann-Hurwitz, on a $g(X) = 4$.

Exercice 7.2 *Calculer le genre de la surface de Riemann X associée à l'équation :*

$$w^4 = z^4 - 1.$$

<u>*Solution*</u> : Ici, on a quatre feuillets. Les points de ramifications à distance finie sont $1, -1, i$ et $-i$. On note que $z = \infty$ n'est pas un point de ramification. L'indice de ramification étant égal à 12, alors d'après la formule de Riemann-Hurwitz, le genre de la surface de Riemann en question est égal à 3.

Exercice 7.3 *Considérons la courbe de Fermat X associée à l'équation :*

$$w^n + z^n = 1, \quad n \geq 2.$$

Quel est le genre de X ?

<u>*Solution*</u> : Ici on a un revêtement de degré n. Chaque racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité est ramifié d'indice $n-1$ tandis que le point à l'infini ∞ n'est pas un point de ramification et par conséquent

$$g(X) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

L'équation de Fermat :

$$U^n + V^n = W^n,$$

(avec $w = \frac{U}{Z}$, $z = \frac{V}{Z}$), étant de genre ≥ 1 pour $n \geq 3$, elle n'admet donc qu'un nombre fini de solutions. Ce fut une des pistes utilisées par A. Wiles pour prouver le grand théorème de Fermat : pour $n \geq 3$ cette équation n'a pas de solution non triviale.

8 Le théorème d'Abel

Théorème 8.1 *Soient $p_1, ..., p_m, q_1, ...q_m$ des points de X. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe une fonction méromorphe f telle que :

$$(f) = \sum_{j=1}^{m} q_j - \sum_{j=1}^{m} p_j.$$

(ii) Il existe un chemin fermé γ tel que :

$$\forall \omega \in \Omega^1(X), \quad \sum_{j=1}^{m} \int_{p_j}^{q_j} \omega = \int_{\gamma} \omega.$$

Démonstration : Montrons que : $(i) \Longrightarrow (ii)$. Soit f une fonction méromorphe sur X et soit

$$\omega = d\log f \in \Omega^1(X).$$

Posons

$$\varphi(p) \equiv \int_{p_0}^{p} \omega.$$

Nous allons calculer $\int_{\partial X^*} \varphi d\log f$ où X^* est la représentation normale de X. D'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{\partial X^*} \varphi d\log f = 2\pi \sum \text{Rés }(\varphi d\log f).$$

Notons que puisque la fonction φ est holomorphe, elle n'a donc pas de pôles et par conséquent pour calculer le résidu de $\varphi d\log f$ sur X^*, il suffit de déterminer les pôles de $d\log f$. Par hypothèse, la fonction f est méromorphe. Donc on a au voisinage d'un pôle r d'ordre m,

$$f(z) = (z-r)^m g(z), \quad m > 0,$$

et au voisinage d'un zéro r d'ordre m,

$$f(z) = (z-r)^m g(z), \quad m < 0,$$

avec $g(z)$ une fonction holomorphe au voisinage de r et telle que : $g(r) \neq 0$. On a

$$\log f = m\log(z-r) + \log g(z),$$

et

$$d\log f = \frac{m}{z-r} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Notons que $d\log f$ a des pôles aux zéros et aux pôles de f. Dès lors,

$$\text{Rés }(\varphi d\log f) = \varphi(r_j).m_j,$$

où r_j est un pôle ou un zéro de f avec le signe positif ou négatif suivant que r_j est un zéro ou un pôle de f tandis que les entiers m_j désignent la multiplicité de r_j. Donc

$$\int_{\partial X^*} \varphi d\log f = 2\pi \sum \varphi(r_j).m_j = 2\pi \sum_{j=1}^{m} \int_{p_j}^{q_j} \omega, \tag{8.1}$$

en vertu de la définition de φ, r_j et m_j. Calculons cette intégrale d'une autre manière. En raisonnant comme dans la preuve de la première relation bilinéaire de Riemann (théorème 4.1), on obtient

$$\int_{\partial X^*} \varphi d\log f = \sum_{m=1}^{g} \left(\omega(a_m) \int_{b_m} d\log f - \omega(b_m) \int_{a_m} d\log f \right).$$

On a

$$\int_{b_m} d\log f(z) = \int_{b_m} d\log|f(z)| + i\int_{b_m} d(\arg f(z)) = 2\pi i\alpha_m, \quad \alpha_m \in \mathbb{Z},$$

et de même

$$\int_{a_m} d\log f(z) = 2\pi i\beta_m, \quad \beta_m \in \mathbb{Z}.$$

D'où

$$\int_{\partial X^*} \varphi d\log f = 2\pi i \sum_{m=1}^{g} \left(\alpha_m \omega(a_m) - \beta_m \omega(b_m)\right).$$

Posons $\gamma = \sum_{m=1}^{g}(\alpha_m a_m - \beta_m b_m)$, d'où

$$\int_{\partial X^*} \varphi d\log f = 2\pi i \int_\gamma \omega.$$

En comparant avec (8.1), on obtient

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^{m} \int_{p_j}^{q_j} \omega.$$

Montrons maintenant que : $(ii) \Longrightarrow (i)$. Soient $p_1, ..., p_m, q_1, ...q_m$ des points de X et γ un chemin fermé tel que :

$$\forall \omega \in \Omega^1(X), \quad \sum_{j=1}^{k} \int_{p_j}^{q_j} \omega = \int_\gamma \omega.$$

Montrons qu'il existe une fonction méromorphe telle que :

$$(f) = \sum_{j=1}^{m} q_j - \sum_{j=1}^{m} p_j \equiv \mathcal{D}.$$

Rappelons (analyse harmonique) [12] que pour tout $p, q \in X$, il existe une différentielle méromorphe η sur X ayant des pôles simples en p, q et telle que :

$$\text{Rés}_p \eta = 1, \qquad \text{Rés}_q \eta = -1.$$

On en déduit que si $p_1, ..., p_n \in X$ et $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ avec $\sum_{j=1}^n c_j = 0$, alors il existe une différentielle méromorphe η sur X ayant des pôles simples en p_j et telle que :

$$\text{Rés}_{pj} \eta = c_j, \qquad \int_{a_j} \eta = 0.$$

En effet, soient $p_1, ..., p_n \in X$, $q \in X$, $q \neq p_j$, $1 \leq j \leq n$ et $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ avec $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$. On peut trouver des différentielles méromorphes η_j sur X ayant des pôles simples en p_j, q et telles que :

$$\text{Rés}_{pj}\eta_j = 1, \qquad \text{Rés}_q\eta_j = -1.$$

La forme différentielle

$$\lambda_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j\eta_j,$$

a des pôles simples en p_j avec

$$\text{Rés}_{p_j}\lambda_1 = c_j,$$

mais n'a pas de pôles en q avec

$$\text{Rés}_q\lambda_1 = (-1)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right) = 0.$$

Soit $(\omega_1, ..., \omega_g)$ une base de différentielles holomorphes sur X et considérons la forme différentielle

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \sum_{k=1}^{g} \alpha_k\omega_k,$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_g$ sont des constantes à déterminer. On ajoute à λ_1 une forme différentielle holomorphe, on ne change donc rien à ses pôles qui sont simples ni à ses résidus. Il reste à montrer que : $\int_{a_j} \lambda_2 = 0$ ou ce qui revient au même à déterminer les constantes $\alpha_1, ..., \alpha_g$ telles que :

$$\int_{a_j} \lambda_1 + \sum_{k=1}^{g} \alpha_k \int_{a_j} \omega_k = 0.$$

Ceci revient à résoudre le système de g équations à g inconnues suivant :

$$\begin{pmatrix} \int_{a_1}\omega_1 & \cdots & \int_{a_1}\omega_g \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{a_g}\omega_1 & \cdots & \int_{a_g}\omega_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int_{a_1}\lambda_1 \\ \vdots \\ -\int_{a_g}\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Notons que la matrice à gauche est la transposée de la matrice E intervenant dans la définition de la matrice des périodes (définition 4.2). D'après la proposition 4.5, la matrice E est inversible, donc sa matrice transposée aussi et par conséquent le système ci-dessus admet une solution pour laquelle λ_2 est le η cherché. Revenons maintenant au diviseur

$$\mathcal{D} \equiv (f) = \sum_{j=1}^{m} q_j - \sum_{j=1}^{m} p_j,$$

et notons que l'on peut l'écrire sous la forme

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j, \quad n < m, \quad c_j \in \mathbb{Z};$$

il suffit de regrouper les p_j et q_j qui sont les mêmes. La somme des coefficients n'a pas changé ; elle valait $m.1 + m(-1) = 0$, donc $\sum_{j=1}^{n} c_j = 0$. D'après ce qui précède, il existe une différentielle méromorphe η sur X ayant des pôles simples aux points p_j et telle que :

$$\text{Rés}_{pj}\eta = c_j, \qquad \int_{a_j} = 0.$$

Soit $(\omega_1, ..., \omega_g)$ une base orthonormée de $\Omega^1(X)$ et posons

$$\varphi_j(p) = \int_{p_0}^{p} \omega_j.$$

En raisonnant comme dans la preuve de la première relation bilinéaire de Riemann (théorème 4.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\partial X^*} \varphi_j \eta &= \sum_{m=1}^{g} \left(\omega_j(a_m)\eta b_m - \omega_j(b_m)\eta a_m\right), \\
&= \sum_{m=1}^{g} \left(\int_{a_m} \omega_j \int_{b_m} \eta - \int_{b_m} \omega_j \int_{a_m} \eta\right), \\
&= \int_{b_j} \eta, \\
&= \eta(b_j), \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

car $\int_{a_m} \omega_j = \delta_{mj}$ et $\int_{a_m} \eta = 0$. D'un autre côté, on a

$$\int_{\partial X^*} \varphi_j \eta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Rés}_{p_k}(\varphi_k \eta).$$

En utilisant un raisonnement similaire à celui fait précédemment pour montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$, on obtient

$$\int_{\partial X^*} \varphi_j \eta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_j(p_k).$$

En tenant compte des définitions de φ_j, p_k et c_k, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\partial X^*} \varphi_j \eta &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{p_0}^{p} \omega_j, \\
&= 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \int_{q_k}^{p_k} \omega_j, \\
&= 2\pi i \int_\gamma \omega_j.
\end{aligned}$$

En comparant cette dernière expression avec celle obtenue dans (8.2), on obtient

$$\eta(b_j) = \int_{b_j} \eta = 2\pi i \int_\gamma \omega_j.$$

Comme γ est un chemin fermé, il peut s'écrire sous la forme

$$\gamma = \sum_{j=1}^{g} m_j a_j + \sum_{j=1}^{g} m_{g+j} b_j.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\eta(b_k) &= \int_{b_k} \eta, \\
&= 2\pi i \sum_{j=1}^{g} \left(m_j \int_{a_j} \omega_k + m_{g+j} \int_{b_j} \omega_k \right), \\
&= 2\pi i \left(m_k + \sum_{j=1}^{g} m_{g+j} \int_{b_j} \omega_k \right), \\
&= 2\pi i \left(m_k + \sum_{j=1}^{g} m_{g+j} \int_{b_k} \omega_j \right), \text{ car } Z \text{ est symétrique }, \\
&= 2\pi i \left(m_k + \sum_{j=1}^{g} m_{g+j} \omega_j(b_k) \right).
\end{aligned}$$

Posons

$$\theta \equiv \eta - 2\pi i \sum_{j=1}^{g} m_{g+j} \omega_j(b_k).$$

La forme différentielle

$$\sum_{j=1}^{g} m_{g+j} \omega_j(b_k),$$

étant holomorphe, on en déduit que θ (comme η) est une différentielle méromorphe ayant des pôles simples en p_j et dont les résidus sont $\text{Rés}_{p_j}\theta = c_j \in \mathbb{Z}$. En outre, on a

$$\begin{aligned}
\int_{b_k} \theta &= \theta(b_k), \\
&= \eta(b_k) - 2\pi i \sum_{j=1}^{g} m_{g+j}\omega_j(b_k), \\
&= 2\pi i \left(m_k + \sum_{j=1}^{g} m_{g+j}\omega_j(b_k) \right) - 2\pi i \sum_{j=1}^{g} m_{g+j}\omega_j(b_k), \\
&= 2\pi i m_k,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{a_k} \theta &= \theta(a_k), \\
&= \eta(a_k) - 2\pi i \sum_{j=1}^{g} m_{g+j}\omega_j(a_k), \\
&= 2\pi i m_k,
\end{aligned}$$

car

$$\eta(a_k) = \int_{a_k} \eta = 0,$$

et

$$\omega_j(a_k) = \int_{a_k} \omega_j = \delta_{kj} = 0.$$

Donc l'intégrale de θ le long de tout chemin fermé est définie à un multiple entier de $2\pi i$ près. La fonction que l'on cherche à déterminer est

$$f(p) = e^{\int_{p_0}^{p} \theta}.$$

En effet, cette fonction est bien définie et nous allons voir qu'elle est méromorphe et que

$$(f) = \sum_{j=1}^{m} q_j - \sum_{j=1}^{m} p_j.$$

Notons qu'au voisinage de p_j, on a

$$\theta = \left(\frac{c_j}{t} + g(t) \right) dt,$$

où g(t) est une fonction holomorphe et

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= e^{\int_t^\varepsilon \left(\frac{c_j}{t}+g(t)\right)dt}, \\ &= e^{c_j \log \varepsilon - c_j \log t + \int_t^\varepsilon g(t)dt}, \\ &= \varepsilon^{c_j} G(t), \end{aligned}$$

où $G(t)$ est une fonction holomorphe. On en déduit que suivant le signe de c_j, p_j est un zéro ou un pôle de f d'ordre $|c_j|$. Finalement, on a

$$(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j = \sum_{j=1}^{m} q_j - \sum_{j=1}^{m} p_j,$$

et le théorème est démontré. □

On désigne par L_Ω ou tout simplement L le réseau dans $\mathbb{C}^g$ défini par le $\mathbb{Z}$-module $L = \mathbb{Z}^g \oplus \Omega\mathbb{Z}^g$, ou encore

$$L = \left\{ \sum_{j=1}^{g} \left(k_j \int_{a_j} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_g \end{pmatrix} + m_j \int_{b_j} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_g \end{pmatrix} \right) : k_j, m_j \in \mathbb{Z} \right\},$$

i.e., le sous-groupe de $\mathbb{C}^g$ engendré par les vecteurs colonnes de la matrice des périodes de Ω.

Définition 8.2 *L'espace quotient $\mathbb{C}^g/L$, s'appelle variété jacobienne de X et on le désigne par $Jac(X)$.*

La variété jacobienne de X, est un tore complexe de dimension g. En effet, en utilisant la suite exponentielle exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{O}_X^*$ est le faisceau des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur X, i est l'inclusion triviale et exp est l'application exponentielle $\exp f = e^{2\pi\sqrt{-1}f}$ ainsi que la dualité, on montre que

$$\begin{aligned} Jac(X) &= H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z}), \\ &\simeq H^1\left(X, \Omega_X^1\right)/H^1(X, \mathbb{Z}), \\ &\simeq H^0(X, \Omega_X^1)^*/H_1(X, \mathbb{Z}), \\ &\simeq \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}. \end{aligned}$$

Remarque 8.1 *Soit*

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{m} n_j q_j \in Div\ (X),$$

où $p \in X$ est fixé et soit $(\omega_1, ..., \omega_g)$ une base de différentielles holomorphes sur X. L'application

$$\varphi : Div\ (X) \longrightarrow Jac(X), \quad \mathcal{D} \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{m} n_j \int_p^{q_j} \omega_1, ..., \sum_{j=1}^{m} n_j \int_p^{q_j} \omega_g \right),$$

est dite "application d'Abel-Jacobi". Dans le cas particulier où

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 = \sum_{j=1}^{m} q_j - \sum_{j=1}^{m} p_j,$$

la condition (i) signifie que $\mathcal{D} \in Div^0(X)$ ou encore $\mathcal{D}_1$ est équivalente à $\mathcal{D}_2$. La condition (ii) peut s'écrire sous une forme condensée,

$$\forall \omega \in \Omega^1(X), \quad \int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega = \int_\gamma \omega.$$

Notons que la condition (ii) peut encore s'écrire sous la forme

$$\varphi(\mathcal{D}) \equiv \left(\sum_{j=1}^{m} \int_{p_j}^{q_j} \omega_1, ..., \sum_{j=1}^{m} \int_{p_j}^{q_j} \omega_g \right) \equiv 0 \ mod.\ L,$$

avec φ l'application définie par $\varphi : Div^\circ(X) \longrightarrow Jac(X)$.

9 Le problème d'inversion de Jacobi

Avant tout nous avons besoin d'un résultat qui découle du théorème de Riemann-Roch.

Proposition 9.1 *Soit $\mathcal{D}$ un diviseur positif sur une surface de Riemann compacte X de genre $g > 0$. Alors*

a) $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) \geq g - deg\ \mathcal{D}$.

b) Pour tout $p \in X$, on a $\dim \mathcal{I}(-p) \leq g - 1$. Autrement dit, il existe une différentielle ω holomorphe sur X telle que : $\omega(p) \neq 0$.

Démonstration : *a*) Rappelons que les seules fonctions holomorphes sur une surface de Riemann compacte X sont les constantes. Donc

$$\mathcal{L}(0) = \{\text{fonctions constantes sur } X\} \simeq \mathbb{C},$$

et $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) \geq 1$. D'après le théorème de Riemann-Roch, on a

$$\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) + \deg \mathcal{D} - g + 1 \geq 1,$$

ce qui implique que :

$$\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) \geq g - \deg \mathcal{D}.$$

$b)$ Procédons par l'absurde, i.e., supposons que :

$$\forall \omega \in \Omega^1(X), \quad \omega(p) = 0.$$

Donc $\dim \mathcal{I}(-p) = g$ et en vertu du théorème de Riemann-Roch, on a

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = \dim \mathcal{I}(-p) + \deg p - g + 1 = 2.$$

D'où

$$\mathcal{L}(p) = \{1, f\},$$

où f est une fonction méromorphe non constante (ayant au plus un pôle simple en p) telle que : $(f) \geq -p$. La fonction

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}),$$

n'a pas de points de branchements et la surface X est un revêtement non ramifié de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\deg f = 1$, ce qui implique que $X \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Ceci est absurde puisque $g(X) > 0$ par hypothèse et $g(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = 0$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Soit X une surface de Riemann compacte de genre $g > 0$. On note $\mathrm{Sym}^d X$ l'ensemble de tous les diviseurs positifs

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{d} p_j,$$

de degré d sur X. On dit que $\mathrm{Sym}^d X$ est le $d^{\text{ème}}$ produit symétrique de X. On montre que $\mathrm{Sym}^d X$ peut-être muni d'une structure de variété complexe. Soit

$$X^d = X \times ... \times X,$$

le produit direct de X ; c'est une variété complexe. Considérons le groupe symétrique Σ_d des permutations de $\{1, ..., d\}$. Dès lors, pour tout $\sigma \in \Sigma_d$, on définit l'application $\sigma : X^d \longrightarrow X^d$, en posant

$$\sigma(p_1, ..., p_d) = (p_{\sigma_1}, ..., p_{\sigma_d}),$$

où $\sigma_1, ..., \sigma_d$ désignent les fonctions symétriques élémentaires. Cette application est biholomorphe, d'où $\Sigma_d \subset \mathrm{Aut}\ (X^d)$, i.e., Σ_d est un sous groupe du groupe des automorphismes de X^d. Notons que $\mathrm{Sym}^d X$ hérite de X^d d'une structure d'espace topologique. L'espace quotient

$$\mathrm{Sym}^d X = X^d / \Sigma_d,$$

est un espace séparé compact. La projection

$$\pi : X^d \longrightarrow \mathrm{Sym}^d X,$$

munit $\mathrm{Sym}^d X$ d'une structure de variété complexe. En effet, soit $p_j \in X$,

$$\mathcal{D} = \sum p_j \in \mathrm{Sym}^d X, \quad p_j \neq p_k.$$

Autour de chaque p_j, on choisit un système de coordonnées locales (U_j, z_j) dans X. On suppose que pour $p_j \neq p_k$, on a $U_j \cap U_k \neq 0$ et que pour $p_j = p_k$, on a $z_j = z_k$ dans $U_j = U_k$. L'application

$$\sum q_j \longmapsto (\sigma_1(z_j(q_j)), ..., \sigma_d(z_j(q_j))) \, ,$$

détermine, d'après le théorème fondamental d'algèbre, une carte locale sur $\pi(U_1 \times ... \times U_d) \subset \mathrm{Sym}^d X$. En dehors des points de branchements de la surface, l'application π est un revêtemnt et on peut prendre $(z_1(p_1)), ..., z_d(p_d))$ comme coordonnées autour de $\mathcal{D} \in \mathrm{Sym}^d X$. Autour d'un point $d.p$, l'ensemble suivant : $(z_1 + \cdots + z_d, ..., z_1 ... z_d)$, forme un système de coordonnées locales.

Théorème 9.2 *Soit*

$$\varphi_g : Sym^g X \longrightarrow Jac(X), \quad \mathcal{D} \longmapsto \varphi_g(\mathcal{D}) = \left(\int_0^{\mathcal{D}} \omega_1, ..., \int_0^{\mathcal{D}} \omega_g \right),$$

l'application d'Abel-Jacobi restreinte à l'espace $Sym^g X$ où $(\omega_1, ..., \omega_g)$ est une base normalisée de $\Omega^1(X)$. Alors

a) L'application φ_g est bien définie.

b) L'application φ_g est injective.

c) L'application φ_g est surjective. Si $\mathcal{D}_1$ est un diviseur positif de degré g, alors, pour tout $(s_1, \ldots, s_g) \in \mathbb{C}^g$, il existe un diviseur $\mathcal{D}_2$ positif de degré g tel que :

$$\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega = s_k.$$

L'application

$$\varphi : Div^{\,0}(X) \longrightarrow Jac(X),$$

est surjective. (Problème d'inversion de Jacobi).

Démonstration : *a*) Montrons que l'application φ_g est bien définie. Autrement dit, montrons que deux éléments équivalents dans $\mathrm{Sym}^g X$, sont envoyés sur deux éléments équivalents dans $\mathbb{C}^g/L$. Soient donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux diviseurs équivalents dans $\mathrm{Sym}^g X$ et γ un chemin fermé sur X. D'après le théorème d'Abel et la remarque 8.1, on a

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{\mathcal{D}_2}\omega_1,...,\int_0^{\mathcal{D}_2}\omega_g\right)-\left(\int_0^{\mathcal{D}_1}\omega_1,...,\int_0^{\mathcal{D}_1}\omega_g\right) &= \left(\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2}\omega_1,...,\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2}\omega_g\right),\\ &= \left(\int_\gamma\omega_1,...,\int_\gamma\omega_g\right),\end{aligned}$$

et il suffit de montrer que $\int_\gamma \omega_j \in L$, $1 \leq j \leq g$. Le chemin γ étant fermé, on peut donc l'écrire sous la forme :

$$\gamma = \sum_{k=1}^{g}\left(\alpha_k a_k + \beta_k b_k\right), \quad \left(\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Z}\right),$$

où $(a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g)$ est une base de cycles dans le groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z})$. Dès lors

$$\int_\gamma \omega_j = \sum_{k=1}^{g}\left(\alpha_k \int_{a_k}\omega_j + \beta_k\int_{b_k}\omega_j\right), \quad 1 \leq j \leq g.$$

Nous avons montré précédemment que la matrice Ω des périodes de X peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}\Omega &= (E,F), \quad \text{(définition 4.2)},\\ &= (I,Z), \quad Z = E^{-1}F, \quad \text{(proposition 4.6)},\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \int_{b_1}\omega_1 & \int_{b_1}\omega_2 & \cdots & \int_{b_1}\omega_g\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \int_{b_2}\omega_1 & \int_{b_2}\omega_2 & \cdots & \int_{b_2}\omega_g\\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & & 1 & \int_{b_g}\omega_1 & \int_{b_g}\omega_2 & \cdots & \int_{b_g}\omega_g\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_\gamma \omega_j = \alpha_j + \sum_{k=1}^{g}\beta_k\int_{b_k}\omega_j, \quad 1 \leq j \leq g,$$

ce qui montre [9] que $\int_\gamma \omega_j \in L$.

b) Montrons que l'application φ_g est injective. Autrement dit, montrons que si

[9] Rappelons que si un réseau L de g points dans $\mathbb{R}^g$ est défini par les vecteurs $c_1, ..., c_g$ rapportés à l'origine, alors dire qu'un point $(x_1, ..., x_g) \in L$, celà signifie que $(x_1, ..., x_g) = \beta_1 c_1 + ... + \beta_g c_g$, $(\beta_1, ..., \beta_g \in \mathbb{Z})$ ou encore en terme de composantes $(c_{j1}, ..., c_{jg})$ du vecteur c_j, $1 \leq j \leq g$, il faut que : $x_j = \sum_{k=1}^{g}\beta_k c_{kj}$, $1 \leq j \leq g$. Ici, nous avons un réseau de $2g$ points dans $\mathbb{C}^g$ dont les g premiers sont les vecteurs unités. Donc dire que $\int_\gamma \omega_j \in L$, celà est équivaut du point de vue des composantes à $\int_\gamma \omega_j = \alpha_j + \sum_{k=1}^{g}\beta_k c_{kj}$, $1 \leq j \leq g$ et il suffit de choisir $c_{kj} = \int_{b_k}\omega_j$.

deux diviseurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont envoyés sur des points équivalents, alors $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$. Soit $\left(\int_0^{\mathcal{D}_1} \omega_1, ..., \int_0^{\mathcal{D}_1} \omega_g\right)$ l'image de $\mathcal{D}_1$ et $\left(\int_0^{\mathcal{D}_2} \omega_1, ..., \int_0^{\mathcal{D}_2} \omega_g\right)$ celui de $\mathcal{D}_2$. Ces images étant équivalentes, alors

$$\left(\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_1, ..., \int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_g\right) \in L,$$

et dès lors

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_j\right) &= \alpha_j + \sum_{k=1}^{g} \beta_k c_{kj}, \\
&= \sum_{k=1}^{g} \alpha_k \delta_{kj} + \sum_{k=1}^{g} \beta_k c_{kj}, \\
&= \sum_{k=1}^{g} \alpha_k \int_{a_k} \omega_j + \sum_{k=1}^{g} \beta_k \int_{b_k} \omega_j, \\
&= \int_\gamma \omega_j,
\end{aligned}$$

où $\gamma = \sum_{k=1}^{g} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k)$, $(\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Z})$, est un chemin fermé et ne dépend pas de j. Par conséquent, pour tout ω, on a

$$\left(\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_j\right) = \int_\gamma \omega,$$

et d'après le théorème d'Abel, $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$.
$c)$ La preuve va se faire en plusieurs étapes :
Étape 1 : Soit $(\omega_1, ..., \omega_g)$ une base normalisée de $\Omega^1(X)$ et choisissons un diviseur positif $\mathcal{D}$ sur X de degré g tel que :

$$(\omega_j(p_j)) \neq 0,$$

où $p_j \in X$ et $1 \leq j \leq g$. Nous verrons ci-dessous que ce choix est toujours possible et on dira que "$\mathcal{D}$ est général". On veut montrer qu'il existe un diviseur positif $\mathcal{D}_2$ de degré g tel que :

$$\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = s_k.$$

Ceci est équivalent à montrer l'existence du diviseur $\mathcal{D}$ ci-dessus tel que :

$$\int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = t_k, \quad \forall (t_1, ..., t_g) \in \mathbb{C}^g.$$

En effet, on a
$$s_k = \int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = \int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}} \omega_k + \int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k,$$
d'où
$$\int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = s_k - \int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}} \omega_k = t_k.$$
Étape 2 : Montrons que les conditions suivantes sont équivalentes,

$(i)\mathcal{D}$ est général,

$(ii) \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = 1$,

$(iii) \dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) = 0$.

On a, $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. En effet, d'après le théorème de Riemann-Roch, on a
$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = \dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) + \deg\, \mathcal{D} - g + 1.$$
Or $\deg\, \mathcal{D} = g$, donc $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = 1$ si et seulement si $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) = 0$. Montrons maintenant que $(i) \Leftrightarrow (iii)$, i.e., non $(i) \Leftrightarrow$ non (iii). En effet, non (iii) signifie que $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) \neq 0$, i.e., il existe une forme différentielle ω holomorphe telle que : $(\omega) \geq \mathcal{D}$. Autrement dit, pour tous $p_1, ..., p_g \in \mathcal{D}$, on peut trouver des coefficients $c_1, ..., c_g$ tels que :
$$\omega = \sum_{k=1}^{g} c_k \omega_k(p_j), \quad 1 \leq j \leq g,$$
où $(\omega_1, ..., \omega_g)$ est une base de $\Omega^1(X)$. Les coefficients $c_1, ..., c_g$ existent si et seulement si ce système homogène de g équations à g inconnues possède une solution non triviale. Autrement dit si et seulement si
$$\det \begin{pmatrix} \omega_1(p_1) & \cdots & \omega_1(p_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_g(p_g) & \cdots & \omega_g(p_g) \end{pmatrix} = 0,$$
ou encore si et seulement si la condition (i) n'est pas satisfaite.

Étape 3 : Pour montrer que le diviseur $\mathcal{D}$ est général, il suffit donc de prouver que l'une des conditions (ii) ou (iii) mentionnée dans l'étape 2, est satisfaite. D'après la proposition 9.1, on a
$$\dim \mathcal{I}(-p_1) = g - 1,$$
ce qui montre qu'il existe $p_2 \in X$ tel que :
$$\mathcal{I}(-p_1 - p_2) \subset \mathcal{I}(-p_1),$$
et
$$\dim \mathcal{I}(-p_1 - p_2) = g - 2.$$

De même, il existe $p_3 \in X$ tel que :

$$\mathcal{I}(-p_1 - p_2 - p_3) \subset \mathcal{I}(-p_1 - p_2),$$

et

$$\dim \mathcal{I}(-p_1 - p_2 - p_3) = g - 3.$$

Et ainsi de suite, on peut trouver $p_g \in X$ tel que :

$$\mathcal{I}(-p_1 - p_2 - \cdots - p_g) \subset \mathcal{I}(-p_1 - p_2 - \cdots - p_{g-1}),$$

et

$$\dim \mathcal{I}(-p_1 - p_2 - \cdots - p_g) = 0,$$

i.e.,

$$\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) = 0,$$

et nous avons montré dans l'étape 2 ci-dessus que ceci est équivalent à

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = 1,$$

et aussi que $\mathcal{D}$ est général.
Étape 4 : Il reste à prouver qu'il existe $\mathcal{D}_2$ tel que :

$$\int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = t_k, \quad 1 \leq k \leq g.$$

Posons

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{g} p_{0j}, \qquad \mathcal{D}_2 = \sum_{j=1}^{g} p_j,$$

et considérons la fonction

$$\begin{aligned} f(p) &\equiv (f_1(p), ..., f_g(p)), \\ &= \left(\sum_{j=1}^{g} \int_{p_{0j}}^{p_j} \omega_1, ..., \sum_{j=1}^{g} \int_{p_{0j}}^{p_j} \omega_g \right), \\ &= \left(\frac{t_1}{n}, ..., \frac{t_g}{n} \right), \end{aligned} \tag{9.1}$$

où $p = (p_1, ..., p_g)$. Notons que nous avons remplacé [10] t_k par $\frac{t_k}{n}$ où n est un entier suffisamment grand. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut déterminer p explicitement car la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial p_k} \right)_{1 \leq j, kg} = \begin{pmatrix} \omega_1(p_1) & \cdots & \omega_1(p_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_g(p_g) & \cdots & \omega_g(p_g) \end{pmatrix},$$

[10] pour être sur de travailler dans un voisinage assez petit

est inversible d'après la définition du diviseur $\mathcal{D}$. D'après (9.1), on a

$$f_k(p) = \frac{t_k}{n}, \quad 1 \le k \le g$$

et

$$f_k(p) = \sum_{j=1}^{g} \int_{p_{0j}}^{p_j} \omega_k = \int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k, \quad 1 \le k \le g,$$

d'où

$$n \int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = t_k \equiv \int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_3} \omega_k.$$

On doit donc trouver un diviseur $\mathcal{D}_3$ tel que :

$$n \int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = \int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_3} \omega_k.$$

Celui-ci existe d'après le théorème d'addition[11]. Considérons enfin les diviseurs de degré 0 de la forme $\mathcal{D} - pg$ où $\mathcal{D} \in \mathrm{Sym}^g X$. Ces diviseurs forment un ensemble que l'on note

$$\mathrm{Sym}^g Y \equiv \mathrm{Sym}^g X - pg.$$

L'application φ_g étant surjective sur l'espace $\mathrm{Sym}^g X$, elle est donc aussi surjective sur $\mathrm{Sym}^g Y$. Par conséquent, φ est surjective sur $\mathrm{Div}^0(X)$ et la démonstration s'achève. □

Références

[1] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P.A. and Harris,J. : Geometry of algebraic curves I. Springer-Verlag, 1987.

[2] Belokolos, A.I., Bobenko, V.Z., Enol'skii, V.Z., Its, A.R. and Matveev, V.B. : Algebro-Geometric approach to nonlinear integrable equations, Springer-Verlag 1994.

[3] Cassels, J.W.S. and Flynn, E.V. : Prolegomena to a middlebrow arithmetic of curves of genus 2, London Mathematical Society, Lecture note series 230, Cambridge University press, 1996.

[4] Dubrovin, B.A. : Theta functions and non-linear equations, *Russian Math. Surveys* 36 : 2, 11-92 (1981).

[11] Théorème d'addition [23] : Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux diviseurs positifs de degré n, $\mathcal{E}_1$ un diviseur positif de degré g et $\omega \in \Omega^1(X)$. Alors, il existe un diviseur $\mathcal{E}_2$ positif de degré g tel que : $\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega = \int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2} \omega$.

[5] Dubrovin, B.A., Novikov, S.P., Fomenko, A.T. : Géométrie contemporaine, Méthodes et applications, 3 volumes, Mir, Moscow 1982, 1982, 1987.

[6] Farkas, H., Kra, I. : Riemann surfaces. Springer-Verlag, 1980.

[7] Fay, J. : Theta functions on Riemann surfaces, Lecture notes in mathematics, Vol. 352, Springer-Verlag, 1973.

[8] Forster, O. : Lectures on Riemann surfaces. Springer-Verlag, 1981.

[9] Griffiths, P.A., Harris,J. : Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience 1978.

[10] Griffiths, P.A. : Introduction to algebraic curves. Translations of mathematical monographs, Volume 76, American mathematical society, 1989.

[11] Hartshorne, R. : Algebraic geometry, Springer-Verlag, 1977.

[12] Jost, J. : Compact Riemann surfaces. An introduction to contemporary mathematics. Springer-Verlag, 1997.

[13] Lesfari, A. : Abelian surfaces and Kowalewski's top, *Ann. Scient. École Norm. Sup.* Paris, 4^e série, t.21, 193-223 (1988).

[14] Lesfari, A. : Abelian varieties, surfaces of general type and integrable systems, *Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry* , Vol.48, 1, 95-114 (2007).

[15] A. Lesfari, Le théorème de Riemann-Roch et ses applications, *arXiv :0706.2673 [math.CV]* (2007) 1-16.

[16] Lesfari, A. : Prym varieties and algebraic completely integrable systems. *J. Geom. Phys.*, 58, 1063-1079 (2008).

[17] Lesfari, A. : Fonctions et Intégrales elliptiques. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 3, 27-65 (2008).

[18] Lesfari, A. : Surfaces de Riemann compactes, courbes algébriques complexes et leurs Jacobiennes, *arXiv :0903.2156v1*, Algebraic Geometry[math.AG] ; Complex Variables[math.CV], 1-74, 12 March (2009).

[19] Lesfari, A. : Application d'Abel-Jacobi, Espace des modules des surfaces de Riemann et le Problème de Schottky, à paraître dans *Mathematica (Cluj)* (2012).

[20] Lesfari, A. : Géométrie complexe et systèmes intégrables. Monographie (à paraitre).

[21] Miranda, R. : Algebraic Curves and Riemann Surfaces. Graduate Studies in Mathematics series No. 5, AMS, 1995.

[22] Mumford, D. : Curves and their Jacobians. Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1975.

[23] Siegel, C.L. : Topics in complex function theory. Volume I, II and III, Wiley-Interscience, 1969, 1971 and 1973.

[24] Springer, G. : Introduction to Riemann Surfaces, Edition 2, AMS Bookstore, 2002.

[25] Vanhaecke, P. : Integrable systems in the realm of algebraic geometry, Lecture Notes in Math., 1638, Springer-Verlag, Second edition 2001.