Tores complexes et variétés abéliennes

A. Lesfari
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Table des matières

1 Introduction

Dans ce travail, on étudie plusieurs aspects concernant les variétés complexes. Les méthodes seront analytiques, topologiques, algébriques et géométriques. Une attention particulière est consacrée à l'étude du théorème de plongement de Kodaira ainsi qu'à d'autres versions de ce théorème. Celui-ci affirme qu'une variété analytique complexe compacte est projective algébrique si et seulement si c'est une variété de Hodge, autrement dit si et seulement si elle admet une 2-forme différentielle de type (1,1) fermée, entière et positive, ou encore si et seulement si elle admet un fibré en droites holomorphe dont la première classe de Chern est positive. On expliquera la liaison avec la théorie des variétés kählériennes. Une variété kählérienne est une variété complexe munie d'une métrique hermitienne dont la partie imaginaire, qui est une 2-forme de type $(1,1)$ relativement à la structure complexe, est fermée. Une telle métrique s'appelle métrique kählérienne et la forme est dite forme de Kähler. Dans le langage des variétés kählériennes, le théorème de plongement de Kodaira signifie qu'une variété complexe compacte est projective si et seulement si elle admet une forme de Kähler dont la classe de cohomologie est entière. On discutera un autre résultat intéressant concernant les variétés kählériennes obtenu par Moishezon. Une variété de Moishezon est une variété analytique complexe compacte qui devient projective après un nombre fini d'éclatements de centres lisses et possède le maximum de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. Plus précisèment, une variété kählérienne compacte de dimension n est projective si et seulement si elle possède n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. On évoquera aussi le théorème de Chow qui dit que toute sous-variété analytique fermé de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est une variété projective. Il affirme qu'une telle variété est définie par des équations polynomiales homogènes et on peut donc l'étudier par des méthodes soit analytiques, soit algébriques. On aborde ensuite en détail, l'étude des tores complexes et les variétés abéliennes complexes. Ces variétés sont indispensables pour comprendre l'étude de plusieurs phénomènes de mathématiques contemporaines. Une variété abélienne est un tore complexe qui possède un plongement holomorphe dans un espace projectif ou de façon équivalente d'après le théorème de Chow, un tore complexe algébrique c'est-à-dire définie par l'annulation simultanée d'un nombre fini de polynômes homogènes. On commence par donner une caractérisation de ces variétés en termes de conditions de Riemann. Après une étude des fibrés en droites sur les variétés abéliennes, on donne une preuve directe et détaillée du critère de projectivité des tores complexes à l'aide des fonctions thêta. C'est l'objet du théorème de Lefschetz qui affirme que si un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur une variété abélienne T^n est positif, alors $H^0(T^n, \mathcal{O}_{T^n}(\mathcal{L}^k))$ n'a pas de points de base pour $k \geq 2$ et fournit un plongement projectif pour $k \geq 3$. On introduit le théorème de Ramanan concernant les critères d'amplitude d'un diviseur sur une surface abélienne irréductible et on donne des formules explicites qui permettent de déterminer le nombre de sections paires et impaires, très utiles pour caractériser les surfaces abéliennes. De même, plusieurs notions et propriétés concernant les variétés abéliennes duales, isogénie, polarisation et plongement projectivement normal avec des critères de Koizumi, Mumford et autres seront expliquées. On discutera aussi un autre aspect important de la géométrie complexe à travers la théorie des variétés de Prym. Celles-ci apparaissent comme sous-variétés de certaines variétés jacobiennes et rentrent dans une classe générale de variétés abéliennes. La théorie des variétés abéliennes complexes joue un rôle crucial dans plusieurs recherches actuelles, leur géométrie se révéle très riche et un des intérêts d'avoir une description explicite des variétés de Prym est la possibilité de les appliquer à la théorie moderne des systèmes dynamiques algébriquement intégrables.

2 Le théorème de plongement de Kodaira

Soient $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur une variété complexe compacte M et $s_0, ..., s_N$ des sections de $\mathcal{L}$ que l'on suppose non toutes nulles. Rappelons que puisque M est compacte, alors la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))$ des sections de $\mathcal{L}$ sur M est finie. Désignons par $\mathcal{B}$ le lieu de base

$$\mathcal{B} \equiv \{s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L})) : s(p) = 0, p \in M\}.$$

Ce dernier est une sous-variété analytique ; il peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{B} = D(s_0) \cap ... \cap D(s_N),$$

où $D(s_j)$ est un élément de $\mathrm{Div}(M)$.

Proposition 1 *Soit $\psi_{\mathcal{L}}$ l'application définie par*

$$\psi_{\mathcal{L}} : M \backslash \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \quad p \longmapsto [s_0(p) : ... : s_N(p)],$$

où $(s_0, ..., s_N)$ est une base de $H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))$. Alors l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ est holomorphe.

Démonstration : En effet, notons tout d'abord que cette notion d'holomorphie a un sens car $M \backslash \mathcal{B}$ est une sous-variété ouverte de M puisque $\mathcal{B} \subset M$ est un sous-ensemble fermé. Pour montrer que l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ est holomorphe et à valeurs dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, il suffit de choisir localement une trivialisation holomorphe du fibré en droites $\mathcal{L}$. Un tel choix nous permet de voir localement les sections $s_0, ..., s_N$ comme des fonctions holomorphes. Ensuite, un changement de trivialisation multiplie ces fonctions par une même fonction inversible, ce qui donne lieu à la même application à valeurs dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Explicitement, soit $p \in M \backslash \mathcal{B}$ et notons par φ une trivialisation de $\mathcal{L}$ sur un voisinage ouvert de $p \in M$. Dès lors,

$$\psi_{\mathcal{L}}(p) = [s_0(p) : ... : s_N(p)],$$

désigne le point $[\varphi(s_0(p)) : ... : \varphi(s_N(p))] \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. La définition de l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ est indépendante de la trivialisation φ car pour toute autre trivialisation, elle est de la forme $\lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et

$$[\lambda(p)\varphi(s_0(p)) : ... : \lambda(p)\varphi(s_N(p))] = [\varphi(s_0(p)) : ... : \varphi(s_N(p))].$$

La description locale de l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ montre qu'elle est bien définie et qu'elle est holomorphe sur $M\backslash\mathcal{B}$, ce qui achève la démonstration. $\square$

En fait au lieu de supposer $(s_0, ..., s_N)$ comme une base, on peut considérer toute autre collection des sections $s_0, ..., s_N$. On définit une application holomorphe

$$\psi_{\mathcal{L}} : M\backslash\mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}))^*), \quad p \longmapsto [s_0(p) : ... : s_N(p)],$$

en associant à un point $p \in M\backslash\mathcal{B}$, l'application linéaire

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad s \longmapsto s(p),$$

ou ce qui revient au même, en envoyant un point p d'un ouvert $\mathcal{U}_\alpha$ de $M\backslash\mathcal{B}$ sur le point de coordonnées homogènes $[s_0(p) : ... : s_N(p)]$ de l'espace projectif

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}))^*),$$

défini par l'hyperplan constitué des sections s'annulant en p. Notons que le point p ne dépend pas de l'ouvert $\mathcal{U}_\alpha$ car dans un autre ouvert $\mathcal{U}_\alpha$, toutes ces coordonnées sont multipliées par le même scalaire non nul $g_{\alpha\beta}(p)$ et il est bien défini puisque nous avons exclus les sections nulles. Lors de l'étude du théorème de plongement de Kodaira, on travaillera avec une application méromorphe de la forme

$$\psi_{\mathcal{L}} : M \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}))^*),$$

plus précisément $\psi_{\mathcal{L}^k}$ avec $\mathcal{L}^k$ une puissance tensorielle, k entier strictement positif.

Soit

$$\mathcal{D} = \sum_j n_j \mathcal{D}_j, \quad n_j \in \mathbb{Z},$$

un diviseur sur la variété complexe M, où les $\mathcal{D}_j$ sont des sous-variétés analytiques irréductibles de codimension 1. Soit $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $M\backslash\mathcal{D}$, ayant au plus un pôle d'ordre n_j sur $\mathcal{D}_j$ lorsque $n_j > 0$ et un zéro d'ordre au moins égal à $-n_j$ lorsque $n_j \leq 0$ et soit $(1, f_1, ..., f_N)$ une base de cet espace. Si $\mathcal{L}$ est le fibré en droites associé au diviseur $\mathcal{D}$ (que l'on note $\mathcal{L} = [\mathcal{D}]$), alors la restriction de $\psi_{\mathcal{D}} \equiv \psi_{\mathcal{L}}$ à $M\backslash\mathcal{D}$ peut-être construite comme ci-dessus en écrivant

$$\psi_{\mathcal{L}} : M\backslash\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \quad p \longmapsto [1, f_1(p) : ... : f_N(p)]. \tag{1}$$

On dit que la variété M est projective ou de façon équivalente M admet un plongement holomorphe dans un espace projectif si elle admet un fibré en droites sans point de base qui détermine un plongement holomorphe de M dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Une variété projective est une sous-variété analytique fermée d'un espace projectif complexe. En outre, elle est compacte et tout point régulier admet un voisinage qui peut être paramétré à l'aide de fonctions analytiques. Un fibré en droites $\mathcal{L}$ est dit très ample si ses sections globales fournissent un plongement de la variété M dans un espace projectif ou autrement dit si l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ plonge la variété M dans un espace projectif. Un fibré en droites $\mathcal{L}$ est dit ample si une puissance $\mathcal{L}^k \equiv \mathcal{L}^{\otimes k}$, $k > 0$ est très ample. Un diviseur $\mathcal{D}$ est dit ample (resp. très ample) si le fibré en droites $[\mathcal{D}]$ associé à ce diviseur est ample (resp. très ample). Rappelons que sur $\mathbb{C}^n$, il n'y a pas de sous-variétés compactes intéressantes car la seule sous-variété complexe et compacte de $\mathbb{C}^n$ est un point. En effet, si $\psi : M \longrightarrow \mathbb{C}^n$ est un plongement holomorphe où M est une variété complexe compacte, alors ψ est constante en certu du théorème de Liouville. Nous allons donc examiner les différents plongements de la variété M dans un espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Le théorème de plongement de Kodaira suivant caractérise les variétés complexes compactes admettant un plongement holomorphe dans un espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

Théorème 2 *Soit M une variété complexe compacte et soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites positif sur M. Alors, il existe k_0 tel que pour $k \geq k_0$, l'application*

$$\psi_{\mathcal{L}^k} : M \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}),$$

est bien définie et c'est un plongement de M dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Autrement dit, pour un diviseur $\mathcal{D}$ si $\mathcal{L} \equiv [\mathcal{D}]$ est positif, alors pour $k \in \mathbb{N}$, l'application (1) définie par les fonctions de l'espace $\mathcal{L}(k\mathcal{D})$ plonge M dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ où $N = \dim \mathcal{L}(k\mathcal{D}) - 1$.

Démonstration : La preuve procède en plusieurs étapes.
Etape 1 : Rappelons tout d'abord qu'n fibré en droites $\mathcal{L}$ est dit positif sur M si sa classe de Chern $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(M, \mathbb{R})$ peut être représentée par une $(1,1)$-forme réelle positive fermée. Nous allons montrer que l'expression $\psi_{\mathcal{L}}$ est un plongement peut s'exprimer en terme de cohomologie et ainsi voir la possibilité d'utiliser le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano [7] (Si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites positif, alors $H^q(M, \Omega^p(\mathcal{L})) = 0$ pour $p+q > n$ où n est la dimension de M). Pour que l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ soit bien définie sur M (un morphisme), il faut et il suffit que pour tout $p \in M$, il existe au moins une section $s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))$ jamais nulle ; autrement dit il faut et il suffit que le lieu de base $\mathcal{B}$ soit non vide. Soit $\mathcal{L}_p$ la fibre au point $p \in M$, $p \neq 0$. L'évaluation des sections de $\mathcal{L}$ en ce point détermine une application linéaire

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L})) \xrightarrow{r_p} \mathcal{L}_p.$$

Lorsque p est un point de base de $\mathcal{L}$, alors toutes les sections de $\mathcal{L}$ s'annulent en p et donc l'application r_p est identiquement nulle. En fixant un isomorphisme de $\mathcal{L}_p$ avec $\mathbb{C}$, l'application r_p s'interprète comme une forme linéaire et ne dépend du choix de l'isomorphisme $\mathcal{L}_p \simeq \mathbb{C}$ que par un facteur multiplicatif. En tout point p de M qui n'est pas un point de base de $\mathcal{L}$, on obtient un élément de l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))^*)$. Pour les fibrés en droites qui admettent au moins une section non nulle, ce procédé détermine une application méromorphe

$$\psi_{\mathcal{L}} : M \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))^*),$$

dont les points d'indétermination sont contenus dans le lieu de base $\mathcal{B}$. Donc de façon équivalente, pour montrer que $\psi_{\mathcal{L}}$ est un plongement il faut et il suffit que l'application restreinte suivante :

$$\mathbb{C}^{N+1} = H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L})) \xrightarrow{r_p} \mathcal{L}_p = \mathbb{C},$$

soit surjective. Si tel est le cas, alors l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ est un plongement si deux conditions sont satisfaites. La première condition : l'application $\psi_{\mathcal{L}}$ est injective. Autrement dit, $\psi_{\mathcal{L}}$ sépare les points, i.e., pour $p, q \in M$ avec $p \neq q$, on peut trouver une section $s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))$ satisfaisant à $s(p) = 0$ et $s(q) \neq 0$. De façon équivalente, $\psi_{\mathcal{L}}$ est injective si et seulement si pour $p, q \in M$ avec $p \neq q$, l'application restreinte

$$\mathbb{C}^{N+1} = H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L})) \xrightarrow{r_{p,q}} \mathcal{L}_p \oplus \mathcal{L}_p = \mathbb{C}^2, \tag{2}$$

est surjective (ou encore si et seulement si $\ker r_{p,q} = \ker r_p \cap \ker r_q$, est de codimension deux). Dans ce cas le système linéaire complet $|\mathcal{L}|$ détermine un morphisme injective et il est sans point de base. La seconde condition : la différentielle

$$D\psi_{\mathcal{L}}(p) : T_pM \longrightarrow T_{\psi_{\mathcal{L}}(p)}\mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \quad p \in \mathcal{U}_\alpha,$$

est injective si et seulement si $s_0(p) \neq 0$ et

$$D\psi_{\mathcal{L}}(p) = \{ds_1(p), ..., ds_(p)\} : T_pM \longrightarrow \mathbb{C}^N, \quad p \in \mathcal{U}_\alpha,$$

est un plongement. On peut toujours supposer que l'image de $\psi_{\mathcal{L}}(p)$ est $\psi_{\mathcal{L}}(p) = (1, 0, ..., 0)$; il suffit de faire un changement de coordonnées s_j en ajoutant λs_0, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ à $s_j(p)$. Donc, la seconde condition est équivalente au fait que $\bigcap_{j\geq 1} ds_j(p) \neq 0$ ou si on veut que $\psi_{\mathcal{L}}$ admet une différentielle jamais nulle. De façon équivalente (il suffit d'utiliser une transformation linéaire) pour tout $v* \in T_p^*(M)$, on peut trouver une section $s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}))$ satisfaisant à $s_\alpha(p) = 0$ et $ds_\alpha(p) = v^*$ où $s_\alpha = \varphi_\alpha^* s$ et φ_α désigne une trivialisation de $\mathcal{L}$ autour de p. On peut formuler cette seconde condition d'une autre manière indépendante du choix du voisinage $\mathcal{U}_p$ de p. On désigne par $\mathcal{J}_p$ le faisceau des fonctions holomorphes s'annulant en p et par $\mathcal{J}_p(\mathcal{L})$ le faisceau des sections de $\mathcal{L}$ s'annulant en p. Soient s une section de $\mathcal{J}_p(\mathcal{L})$ définie près de p et φ_α, φ_β des trivialisations de $\mathcal{L}$ dans les voisinages $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{U}_\beta$ de p. En écrivant

$$s_\alpha = \varphi_\alpha^* s, \quad s_\beta = \varphi_\beta^* s, \quad s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta,$$

où $g_{\alpha\beta}$ est la fonction de transition de $\mathcal{L}$, alors les différentielles ds_α et ds_β correspondants au changement de $\mathcal{U}_\alpha$ à $\mathcal{U}_\beta$ sont liées par la relation $d(s_\alpha) = d(s_\beta)g_{\alpha\beta}$, en p. Dès lors, nous avons défini une application

$$d_p : \mathcal{J}_p(\mathcal{L}) \longrightarrow T_p'^* \otimes \mathcal{L}_p,$$

qui est bien défini et par conséquent la seconde condition ci-dessus peut se formuler en disant que pour tout $p \in M$, l'application

$$H^0(M, \mathcal{J}_p(\mathcal{L})) \xrightarrow{d_{p,q}} T_p'^* \otimes \mathcal{L}_p, \tag{3}$$

est surjective. Celle-ci est un cas limite de (2) lorsque $q \longrightarrow p$.
Etape 2 : Nous allons passer maintenant à la preuve proprement dite du théorème. On a deux suites exactes de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{p,q}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{O}_M(\mathcal{L}) \xrightarrow{r_{p,q}} \mathcal{L}_p \oplus \mathcal{L}_q \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_p^2(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{J}_p(\mathcal{L}) \xrightarrow{d_p} T_p'^* \otimes \mathcal{L}_p \longrightarrow 0.$$

Donc pour montrer que les applications (2) et (3) sont surjectives, il suffit de prouver que :

$$H^1(M, \mathcal{J}_{p,q}(\mathcal{L})) = 0, \tag{4}$$

et

$$H^1(M, \mathcal{J}_p^2(\mathcal{L})) = 0. \tag{5}$$

Notons que dans le théorème, le fait d'avoir $\mathcal{L}^k$ (k entier strictement positif) au lieu de $\mathcal{L}$, ne pose pas de problème car cette construction peut-être répétée en remplaçant $\mathcal{L}$ par sa puissance tensorielle $\mathcal{L}^k$ et on utilise le fait que $H^1(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}^k)) = 0$ pour $k \geq k_1$. Nous avons mentionné plus haut que nous allons voir la possibilité d'utiliser les théorèmes d'annulation. Or notre problème ici (sauf dans le cas où $\dim M = 1$) est dû au fait que nous avons affaire aux faisceaux $\mathcal{J}_{p,q}$, $\mathcal{J}_p^2$ et ce ne sont pas des fibrés en droites, ce sont en fait des faisceaux cohérents. On peut certes utiliser un diviseur et procéder par induction, mais le problème est qu'on ne sait pas si M contient de tels diviseurs. Pour contourner ces difficultés on va faire appel à la méthode des éclatements.
Etape 3 : Soient $\widetilde{M}_p$ l'éclaté de M au point p et $\pi : \widetilde{M}_p \longrightarrow M$ une projection holomorphe. Le préimage $E \equiv \pi^{-1}(p)$ (que l'on note aussi E_p s'il y'a risque de confusion) est un diviseur dans M, biholomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. L'application

$$\pi : \widetilde{M}_p \backslash E \longrightarrow M \backslash \{p\},$$

est un difféomorphisme. On construit la variété $\widetilde{M}_p$ de la façon suivante : soient $z_1, ..., z_n \in \Delta$, des coordonnées holomorphes en p où $n = \dim M$ et Δ un voisinage ouvert de p. Soit

$$\widetilde{\Delta}_p = \{(z,l) \in \Delta \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) : z_i l_j - z_j l_i = 0, \forall i,j\},$$

l'éclaté de Δ en p avec $z = (z_1, ..., z_n) \in \Delta$ et $l = [l_1 : ... : l_n]$ des coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. En considérant $l \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ comme une droite dans $\mathbb{C}^n$, alors la condition $z_i l_j = z_j l_i$ signifie que cette droite contient le point z. On vérifie aisément que la variété $\widetilde{\Delta}_p$ est lisse et qu'elle se projette holomorphiquement sur Δ par la projection vers le premier facteur ; c'est-à-dire,

$$\pi : \widetilde{\Delta}_p \subset \Delta \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \longrightarrow \Delta, \quad (z,l) \longmapsto z.$$

Evidemment π est un isomorphisme si $z \neq 0$ et

$$E = \pi^{-1}(0) = \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}),$$

est une hypersurface complexe lisse (en fait, $E = \mathbb{P}(T_p M)$). On appelle E le diviseur exceptionnel, dont le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_E$ est un faisceau inversible noté $\mathcal{O}(-E)$. Finalement, l'éclaté $\widetilde{M}_p$ de M en p s'obtient en recollant $\widetilde{\Delta}_p$ et $M \backslash \{p\}$ suivant l'ouvert $\widetilde{\Delta}_p \backslash E \simeq \Delta \backslash \{p\}$.

Etape 4 : Soit $\widetilde{M}$ l'éclaté de la variété M (de dimension n) aux points p, q et

$$\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M,$$

une projection holomorphe. Les préimages $E_p = \pi^{-1}(p)$ et $E_q = \pi^{-1}(q)$ sont des diviseurs exceptionnels. Posons $E = E_p + E_q$ et $\widetilde{\mathcal{L}} = \pi^* \mathcal{L}$. Pour $n = 1$, on prend $\widetilde{M} = M$, $\pi = Id$; en fait dans ce cas nous n'avons pas besoin de pratiquer l'éclatement et le résultat découle directement du théorème d'annulation de Kodaira-Nakano. On peut donc supposer que $n \geq 2$. L'application de pull-back des formes holomorphes de degré maximal

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}^k)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k)),$$

en vertu du théorème de Hartog (pour toute section globale $\widetilde{s}$ de $\widetilde{\mathcal{L}}^k$, la section s de $\mathcal{L}^k$ sur $M \backslash \{p,q\}$ s'étend à une section globale $s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L})))$. Par définition $\widetilde{\mathcal{L}}^k$ étant trivial le long de E_p et E_q, on en déduit que

$$H^0(E, \mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k)) = \mathcal{L}_p^k \oplus \mathcal{L}_q^k.$$

Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}^k)) & \xrightarrow{r_{p,q}} & \mathcal{L}_p^k \oplus \mathcal{L}_q^k \\ \pi^* \downarrow & & \| \\ H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k)) & \xrightarrow{r_E} & H^0(E, \mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k)) \end{array}$$

est commutatif où r_E désigne la restriction à E. Pour prouver (3), il revient au même de montrer la surjectivité de r_ε. En considèrant la suite exacte sur l'éclaté $\widetilde{M}$,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]) \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k) \xrightarrow{r_E} \mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k_{|E}) \longrightarrow 0,$$

et la suite exacte longue associée, on voit qu'il suffit de montrer que

$$H^1(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E])) = 0,$$

pour k suffisamment grand.
Etape 5 : On choisit k_1 tel que : $\mathcal{L}^{k_1} \otimes K_M^*$ est positif sur M. Montrons que l'on peut choisir k_2 tel que : $\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]^n$ est positif pour $k \geq k_2$ (le choix de $k_1 + k_2$ va intervenir dans l'étape 8 ci-dessous). Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de $p \in M$ et soit $z : \mathcal{U} \longrightarrow \Delta$, une coordonnée locale autour de p. Soit $\Theta_{[E]}$ la courbure du fibré en droites $[E]$ et posons $\Omega_{[E]} = \frac{i}{2\pi}\Theta_{[E]}$. On peut trouver une métrique h sur $\widetilde{M}$ de façon à ce que : $\Omega_{[-E]} = -\Omega_{[E]}$ soit nulle sur $\widetilde{M} \backslash \widetilde{\mathcal{U}}_{2\delta'}$, supérieure où égale à zéro sur $\widetilde{\mathcal{U}}_\delta$ et supérieur strictement à zéro sur $T_pE \subset T'_p\widetilde{M}$ pour tout $p \in E$. Ici $\mathcal{U}_\delta$ désigne la boule $\|z\| < \delta$ avec $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. Pour déterminer une telle métrique, on procède comme suit : soit h_1 la métrique sur $[E]_{\widetilde{\mathcal{U}}}$ donnée par $|(l_1, ..., l_n)|^2 = \|l\|^2$. Soit $s \in H^(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(E))$ une section globale de $[E]$ sur $\widetilde{M}$ avec $(s) = E$. Soit h_2 sur $[E]_{\widetilde{M} \backslash E}$ définie par $|s(z)| = 1$. Pour $\delta > 0$, on considère la boule $\|z\| < \delta$ de centre 0 et de rayon $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $\widetilde{\mathcal{U}}_\delta = \pi^{-1}(\mathcal{U}_\delta)$. Soit $\{\rho_1, \rho_2\}$ une partition de l'unité pour $\{\widetilde{\mathcal{U}}_{2\delta}, \widetilde{M} \backslash \widetilde{\mathcal{U}}_\delta\}$ et soit $h = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2$. Sur $\widetilde{M} \backslash \widetilde{\mathcal{U}}_{2\delta}$, on a $\rho_2 = 1$, d'où $\|s\|^2 = 1$ et donc

$$\Omega_{[E]} = -\frac{i}{2\pi} \log \frac{1}{\|s\|^2} = 0.$$

De même, sur $\widetilde{M} \backslash E \simeq \mathcal{U}_\delta \backslash \{p\}$, on écrit $s(z, l) = z$ et dès lors

$$\Omega_{[E]} = -\frac{i}{2\pi} \log \frac{1}{\parallel z \parallel^2} = \frac{i}{2\pi} \log \parallel z \parallel^2 .$$

Autrement dit, $-\Omega_{[\varepsilon]} = \pi'^* \omega$ où ω est la $(1,1)$-forme associée à la métrique de Fubini-Study (Pour de plus amples informations sur telle métrique voir exemple 3) sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, avec

$$\pi' : \widetilde{\mathcal{U}}_\delta \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}), \quad (z, l) \longmapsto l.$$

Donc $-\Omega_{[E]} \geq 0$ sur $\widetilde{\mathcal{U}}_\delta \backslash E$. Par continuité, $-\Omega_{[E]} = \pi'^* \omega$ sur $\widetilde{\mathcal{U}}_\delta$ et par conséquent $\Omega_{[E]}|_E = \omega > 0$. Maintenant, nous allons voir qu'il existe k_2 tel que : $\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]^n$ est positif pour $k \geq k_2$. En effet, on a $\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}} = \pi^* \Omega_{[\mathcal{L}]}$ et d'après ce qui précède $\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}}$ est positif excepté le long de E. En outre, on a $\langle\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}}; v, \overline{v}\rangle \geq 0$ si et seulement si $v \in T_p(\widetilde{M})$, $p \in E$ et $\langle\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}}; v, \overline{v}\rangle = 0$ si et seulement si $\pi_*(v) = 0$. Celà signifie que la forme $\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}}$ est partout supérieure ou égale à zéro et elle est strictement supérieure à zéro sur $\widetilde{M}\backslash E$ et sur $T'_p\widetilde{M}/T'_pE$, $p \in E$. La forme

$$\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}^k\otimes[-E]^n} = \Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}^k} + \Omega_{[-E]^n} = k\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}} + n\Omega_{[-E]},$$

est positif partout sur $\widetilde{U}_\delta$ et $\widetilde{M}\backslash\widetilde{U}_{2\delta}$. En tenant compte de la compacité, alors si $v \notin T_pE$ alors $\langle\Omega_{\widetilde{\mathcal{L}}}; v, \overline{v}\rangle$ est borné. Dès lors, $\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]^n$ est positif pour k assez grand ou ce qui revient au même il existe k_2 tel que : $\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]^n$ est positif pour $k \geq k_2$.

Etape 6 : Montrons que le fibré canonique $K_{\widetilde{M}}$ de $\widetilde{M}$ est donné par la formule

$$\widetilde{M} = \widetilde{K_M} \otimes [E]^{n-1},$$

où $\widetilde{K_M} = \pi^* K_M$. En effet, nous allons utiliser dans cette preuve les équations

$$z_il_j - z_jl_i = 0,$$

qui interviennent dans la définition de l'éclaté (voir étape 3). Comme il s'agit de calcul local, alors on peut sans restreindre la généralité prendre $M = \mathbb{C}^n$. Choisissons un recouvrement ouvert $\widetilde{M} = \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ avec

$$\mathcal{U}_\alpha = \{(z, l) : z_\alpha \neq 0\}, \quad \alpha = 1, ..., n$$

et des coordonnées

$$\varphi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \simeq \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}, \quad (z, l) \longmapsto \left(\frac{z_1}{z_\alpha}, ..., 1, ..., \frac{z_n}{z_\alpha}, z_\alpha\right).$$

Donc, $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est le sous-espace affine défini par $u_\alpha = 1$. Les fonctions de transitions sont données par

$$\varphi_{\alpha\beta}(u_1, ..., u_{n+1}) = \left(\frac{u_1}{u_\alpha}, ..., \frac{u_n}{u_\alpha}, ..., \frac{u_{n+1}}{u_\alpha}\right).$$

Par conséquent, le déterminant de la matrice de changement de cartes est

$$\det J(\varphi_{\alpha\beta}) = \gamma_{\alpha\beta}.u_\alpha,$$

où $\{\gamma_{\alpha\beta}\}$ est le cocycle correspondant sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, i.e., $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{u_\alpha^n}$. Donc, $K_{\widetilde{M}}$ est donné par le cocycle

$$\frac{1}{u_\alpha^{n-1}} = \left(\frac{z_\beta}{z_\alpha}\right)^{n-1}.$$

Par ailleurs, le diviseur $E \subset \widetilde{M}$ est défini comme étant le lieu des zéros des fonctions $l_1, ..., l_n$. En utilisant $z_i l_j - z_j l_i = 0$, ceci peut-être décrit sur le sous-ensemble ouvert $\mathcal{U}_\alpha$ par la seule équation $l_\alpha = 0$. Donc le cocycle associé à E et qui décrit le fibré en droites $\mathcal{O}(E)$ est $\{\mathcal{U}_{\alpha\beta}, \frac{1}{u_\alpha}\}$. On déduit donc de ce calcul que pour une forme canonique définie au voisinage de $p \in M$ et non nulle en p, alors son pull-back par π est une forme canonique sur l'éclaté $\widetilde{M}$ et qui s'annule le long du diviseur exceptionnel E à l'ordre $n-1$. Nous avons par conséquent, un isomorphisme de fibré en droites :

$$\pi^* K_M \longrightarrow K_{\widetilde{M}} \otimes [E]^{1-n}, \quad \lambda \longmapsto s^{1-n} \pi^*(\lambda),$$

où $s \in H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_M(E))$ est une section.

Etape 7 : Posons $k_0 \equiv k_1 + k_2$ et notons que le choix de k_0 est indépendant de celui de de p car la variété M est compacte. Pour $k \geq k_0$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\widetilde{M}}\left(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E]\right) &= \Omega^n_{\widetilde{M}}\left(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E] \otimes K^*_{\widetilde{M}}\right), \\ &= \Omega^n_{\widetilde{M}}\left((\widetilde{\mathcal{L}}^k_1 \otimes \widetilde{K}^*_M) \otimes (\widetilde{\mathcal{L}}^{k'} \otimes [-E]^n)\right), \quad k' \geq k_2 \end{aligned}$$

en vertu de l'étape précédente. Nous avons choisi ci-dessus k_1 de façon que $\mathcal{L}^{k_1} \otimes K^*_M$ soit positif sur M, et $\widetilde{\mathcal{L}}^{k_1} \otimes \widetilde{K}^*_M$ n'est que semi-positif sur M mais ceci est corrigé par le fait que par notre choix $\widetilde{\mathcal{L}}^{k_1} \otimes [-E]^n$ est positif sur $\widetilde{M}$. Donc $(\widetilde{\mathcal{L}}^k_1 \otimes \widetilde{K}^*_M) \otimes (\widetilde{\mathcal{L}}^{k'} \otimes [-E]^n)$ est positif sur $\widetilde{M}$ et d'après le théorème d'annulation de Kodaira-Nakano, on a pour $k \geq k_0$,

$$H^1\left(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E])\right) = H^1\left(\widetilde{M}, \Omega^n_{\widetilde{M}}((\widetilde{\mathcal{L}}^{k_1} \otimes \widetilde{K}^*_M) \otimes (\widetilde{\mathcal{L}}^{k'} \otimes [-E]^n)\right) = 0.$$

Par conséquent (4) est satisfaite ou ce qui revient au même que l'application (2) est surjective.

Etape 8 : Prouvons maintenant (5), i.e., que l'application (3) est surjective. Soit $\widetilde{M}$ l'éclaté de M au point p et $\pi : \widetilde{M} \longrightarrow M$, une projection holomorphe. Le préimage $E = \pi^{-1}(p)$ est un diviseur exceptionnel. L'application de pull-back

$$H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}^k)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k)),$$

est un isomorphisme en vertu du théorème de Hartog. En outre, si $s \in H^0(M, \mathcal{O}_M(\mathcal{L}^k))$ alors $s(p) = 0$ si et seulement si $\pi^* s$ s'annule sur E. Donc π^* se limite à fournir un isomorphisme

$$H^0(M, \mathcal{J}_p(\mathcal{L}^k)) \xrightarrow{\pi^*} H^0(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E])).$$

Comme précédemment, on a

$$H^0\left(E, \mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k \otimes [-E])\right) = \mathcal{L}^k_p \otimes H^0\left(E, \mathcal{O}_E([-E])\right) \simeq \mathcal{L}^k_p \otimes T'^*_p.$$

Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^0(M,\mathcal{J}_p(\mathcal{L}^k)) & \xrightarrow{d_p} & T_p'^* \oplus \mathcal{L}_p^k \\ \pi^*\downarrow\simeq & & \| \\ H^0(\widetilde{M},\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k\otimes[-E])) & \xrightarrow{r_E} & H^0(E,\mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k\otimes[-E])) \end{array}$$

est commutatif et il suffit donc de montrer que l'application r_E est surjective pour k assez grand. Par analogie avec ce qui a été fait dans l'étape précédente, on utilise la suite exacte sur $\widetilde{M}$,

$$0\longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k\otimes[-E]^2)\longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k\otimes[-E])\xrightarrow{r_E}\mathcal{O}_E(\widetilde{\mathcal{L}}^k\otimes[-E])\longrightarrow 0.$$

Ensuite, on choisit k_1 tel que : $\mathcal{L}^{k_1}\otimes K_M^*$ soit positif sur M et d'après (2) et (3), il existe k_2 tel que : $\widetilde{\mathcal{L}}^{k'}\otimes[-E]^{n+1}$ est positif sur $\widetilde{M}$ pour $k'\geq k_2$. Pour $k\geq k_0\equiv k_1+k_2$, on a

$$\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k\otimes[-E]^2)=\Omega^n_{\widetilde{M}}\left((\mathcal{L}^{k_1}\otimes\widetilde{K}_M^*)\oplus(\widetilde{\mathcal{L}}^{k'}\otimes[-E]^{n+1})\right),$$

avec $k'\geq k_2$. Notons qu'ici aussi puisque M est compacte, le choix de k_0 ne dépend pas de p. D'après le théorème de Kodaira-Nakano, on a donc

$$H^1\left(\widetilde{M},\mathcal{O}_{\widetilde{M}}(\widetilde{\mathcal{L}}^k\otimes[-E]^2)\right)=0,$$

pour $k\geq k_0$. Par conséquent, (5) est satisfaite, donc l'application (3) est surjective et la démonstration est complète.. $\square$

D'après le théorème de plongement de Kodaira, il existe un diviseur positif si et seulement si M admet une 2-forme ω de type $(1,1)$, positive et femée telle que sa classe de cohomologie soit entière, i.e., $[\omega]\in H^2(M,\mathbb{Z})$. La forme ω s'appelle forme de Hodge. Pour k entier, $[k\omega]\in H^2(M,\mathbb{Z})$ et d'après le théorème de Lefschetz [7] (Pour une sous-variété $M\subset\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, toute classe d'homologie γ dans $H^{1,1}(M)\cap H^2(M,\mathbb{Z})$ est analytique) pour les classes de type $(1,1)$, il existe un fibré en droites $\mathcal{L}$ tel que sa classe de Chern est $c_1(\mathcal{L})=k\omega$. Donc $\mathcal{L}$ est positif et on peut donc reformuler le théorème de plongement de Kodaira comme suit :

Théorème 3 *Une variété complexe compacte est projective si et seulement si elle admet une forme de Hodge.*

Rappelons qu'une métrique hermitienne sur M est une forme hermitienne définie positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le fibré tangent TM. En coordonnées locales $z_1,...,z_n$, cette forme s'écrit

$$h(z)=\sum_{j,l}^n h_{jl}(z)dz_j\otimes d\overline{z}_l,$$

où (h_{jl}) désigne une métrique hermitienne positive à coefficients $\mathcal{C}^{\infty}$. A cette forme h, on associe une forme ω de type $(1,1)$ en prenant la partie imaginaire de h ; plus précisément,

$$\omega = -\text{Im } h = \frac{i}{2}\sum_{j,l}^{n} h_{jl} dz_j \wedge d\overline{z}_l.$$

Notons que : $\omega^n = \omega \wedge ... \wedge \omega$ (n-facteurs) est un élément de volume (noté $Vol._{\omega}(M)$) hermitien de M. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^n}{n!} &= \frac{1}{n!}\omega \wedge ... \wedge \omega,\\
&= Ci^n n! \det(h_{jl}) dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge ... \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n,\\
&= Cn! \det(h_{jl}) dx_1 \wedge dy_1 \wedge ... \wedge dx_n \wedge dy_n,
\end{aligned}$$

où $z_n = x_n + iy_n$ et C est une constante positive. Par conséquent, la (n,n)-forme $dV = \frac{1}{n!}\omega^n$ est positive et coincide avec l'élément de volume hermitien de M. Si M est compacte, alors

$$\int_M \omega^n = n! Vol._{\omega}(M) > 0.$$

Une variété kählérienne est une variété complexe munie d'une métrique hermitienne dont la partie imaginaire, qui est une 2-forme ω de type $(1,1)$ relativement à la structure complexe, est fermée. Une telle métrique s'appelle métrique kählérienne et la forme ω est dite forme de Kähler. Soit M une variété kählérienne compacte de dimension n, munie de sa métrique kählérienne ω. On vient de voir que $\int_M \omega^n > 0$, donc si la classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(M,\mathbb{R})$, alors $[\omega]^n \neq 0$ et en outre, $H^{2k}(M,\mathbb{R}) \neq 0$, $0 \leq k \leq n$.

Exemple 1 *Toute surface de Riemann est kählérienne puisque toute 2-forme est fermée.*

Exemple 2 *Toute sous-variété analytique d'une variété kählérienne est kählérienne pour la métrique induite. En particulier, toute variété projective est kählérienne.*

Exemple 3 *Sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de dimension n, on dispose d'une métrique hermitienne canonique, la métrique de Fubini-Study qui fait de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ une variété kählérienne. Soit $[Z_0 : ... : Z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ des coordonnées homogènes et soit*

$$\mathcal{U}_j = \{[Z_0 : ... : Z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : Z_j \neq 0\},$$

l'ensemble des droites pour lesquelles $Z_j \neq 0$. On considère aussi l'application

$$\varphi_j : \mathcal{U}_j \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad [Z_0 : ... : Z_n] \longmapsto \left(\frac{Z_0}{Z_j}, ..., \frac{Z_{j-1}}{Z_j}, \frac{Z_{j+1}}{Z_j}, ..., \frac{Z_n}{Z_j}\right) \equiv (z_1, ..., z_n),$$

avec $z_k = \frac{Z_{k-1}}{Z_j}$ *si* $k \leq j$ *et* $z_k = \frac{Z_k}{Z_j}$ *si* $k > j$ *où* $1 \leq k \leq n$. *On considère dans* $\mathcal{U}_j$ *la* $(1,1)$*-forme différentielle*

$$\omega_j = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{Z_k}{Z_j}\right|^2.$$

En tenant compte de l'application φ_j, *on écrit*

$$\omega_j = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\left(1+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right),$$

en fonction des coordonnées non homogènes $z_1, ..., z_n$.
a) Notons que $\omega_j|_{\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k} = \omega_k|_{\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k}$ *; autrement dit, ces formes définissent une forme globale* ω *sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. *En effet, on a*

$$\log\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{Z_k}{Z_j}\right|^2 = \log\left|\frac{Z_l}{Z_j}\right|^2 + \log\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{Z_k}{Z_l}\right|^2,$$

et il suffit de montrer que : $\partial\overline{\partial}\log\left|\frac{Z_l}{Z_j}\right|^2 = 0$ *sur* $\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_l$. *Or* $\frac{Z_l}{Z_j} = z_l$ *est la* l*-ème coordonnée sur* $\mathcal{U}_j$, *donc*

$$\partial\overline{\partial}\log|z_l|^2 = \partial\left(\frac{1}{z_l\overline{z}_l}\overline{\partial}(z_l\overline{z}_l)\right) = \partial\left(\frac{z_l d\overline{z}_l}{z_l\overline{z}_l}\right) = \partial\left(\frac{d\overline{z}_l}{\overline{z}_l}\right) = 0.$$

b) Montrons que ω *est une* $(1,1)$*-forme réelle fermée. En effet, cette forme est réelle car de la relation*

$$\overline{\partial\overline{\partial}} = \overline{\partial}\partial = -\partial\overline{\partial},$$

on déduit que $\omega_j = \overline{\omega}_j$. *En outre,* ω *est fermée ;*

$$d(\partial\overline{\partial}\lambda) = \partial^2\overline{\partial}\lambda - \overline{\partial}^2\partial\lambda = 0.$$

c) Montrons que ω *est définie positive. En effet, on vérifie celà sur chaque* $\mathcal{U}_j$. *On a*

$$\begin{aligned}
\omega_j &= \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\left(1+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right),\\
&= \frac{i}{2\pi}\partial\left(\frac{\overline{\partial}\left(1+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)}{1+\sum|z_k|^2}\right),\\
&= \frac{i}{2\pi}\partial\left(\frac{\sum z_k d\overline{z}_k}{1+\sum|z_k|^2}\right),\\
&= \frac{i}{2\pi}\partial\left(\frac{(1+\sum|z_k|^2)\sum dz_k\wedge d\overline{z}_k - (\sum\overline{z}_k dz_k)\wedge(\sum z_k d\overline{z}_k)}{(1+\sum|z_k|^2)^2}\right).
\end{aligned}$$

Au point $[1:0:...:0]$ *par exemple, on a*

$$\omega_j = \frac{i}{2\pi}\sum dz_k \wedge d\overline{z}_k,$$

qui est positive. Or ω *est invariante sous l'action du groupe* $\mathcal{U}(n+1)$ *sur* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, *donc* ω *est positive partout. On peut aussi le montrer de manière directe en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :* $|\langle\zeta,\eta\rangle| \leq \|\zeta\|.\|\eta\|$ *où* $\langle,\rangle$ *est le produit hermitien canonique sur* $\mathbb{C}^n$ *et* $\|\zeta\| = \sqrt{\langle\zeta,\zeta\rangle}$. *En effet, notons tout d'abord que la relation ci-dessus peut s'écrire sous la forme*

$$\omega_j = \frac{i}{2\pi}\frac{1}{(1+\sum|z_k|^2)^2}.\sum f_{kl}dz_k\wedge dz_l,$$

où

$$f_{kl} = (1+\sum|z_k|^2)\delta_{kl} - \overline{z}_k z_l.$$

Montrons que la matrice (f_{kl}) *est définie positive. Pour* $\zeta \neq 0$, *on a*

$$\zeta^\top(f_{kl})\overline{\zeta} = \|\zeta\|^2 + \|z\|^2\|\zeta\|^2 - \zeta^\top\overline{z}z^\top\overline{\zeta}.$$

Or

$$\zeta^\top\overline{z}z^\top\overline{\zeta} = \langle\zeta,z\rangle\langle z,\zeta\rangle = \overline{\langle z,\zeta\rangle}\langle z,\zeta\rangle = \|\langle z,\zeta\rangle\|^2,$$

donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\zeta^\top(f_{kl})\overline{\zeta} = \|\zeta\|^2 + \|z\|^2\|\zeta\|^2 - \zeta^\top(f_{kl})\overline{\zeta} = \|\zeta\|^2 + \|z\|^2\|\zeta\|^2 - \zeta^\top\overline{z}z^\top\overline{\zeta} \geq \|\zeta\|^2.$$

Comme $\zeta \neq 0$, *alors* $\zeta^\top(f_{kl})\overline{\zeta} > 0$. *Soit*

$$\sigma : \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}),$$

la projection standard. Sur $\sigma^{-1}(\mathcal{U}_j) = \{(Z_0:...:Z_n) : Z_j \neq 0\}$, *on a*

$$\sigma^*\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log\left(\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{Z_k}{Z_j}\right|^2\right) = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\left(\log(\|Z\|^2) - \log(|Z_j|^2)\right).$$

Or on a vu ci-dessus que $\partial\overline{\partial}\log(|Z_j|^2) = 0$, *donc*

$$\sigma^*\omega = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(\|Z\|^2).$$

La métrique kählérienne ainsi définie sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *s'appelle la métrique de Fubini-Study. Les seules groupes de cohomologie entière non nul de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *étant*

$$H^{2k}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathbb{Z}) = H^{2k}(S^2,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

alors $[\omega] \in H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$ *est un générateur de l'anneau de cohomologie* $H^\bullet(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}),\mathbb{Z})$.

Exemple 4 *Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}^n$ et $T^n = \mathbb{C}^n/\Lambda$ un tore complexe. Celui-ci est une variété complexe compacte. Toute forme hermitienne*

$$\omega = i \sum f_{jk} dz_j \wedge d\overline{z}_k,$$

à coefficients constants sur $\mathbb{C}^n$ et définie positive détermine une métrique kählérienne sur T^n.

Exemple 5 *Un exemple d'une variété non kählérienne est fourni par la surface de Hopf définie par le quotient $M = \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}/\mathbb{Z}$; i.e., l'espace des orbites dans $\mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ du groupe $\mathbb{Z}$ opérant par $(k, z) \longmapsto \lambda^k z$, $\lambda \neq 0$. Comme $\mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ est homéomorphe à $S^3 \times \mathbb{R}_+^*$, alors $M \simeq S^3 \times S^1$. Dès lors, $H^2(M, \mathbb{R}) = 0$ et par conséquent la surface de Hopf n'est pas kählérienne.*

On vient de voir que les variétés kählériennes compactes forment une classe remarquable de variétés analytiques complexes. En général, on s'intéresse à la classe des variétés kählériennes, en prévilégeant les variétés projectives. Une des raisons est que ces dernières contiennent beaucoup de sous-variétés complexes alors que les variétés kählériennes n'en possèdent pas en général. On sait qu'on peut trouver des variétés complexes compactes non kählériennes mais il est très difficile de construire ou de décider si une variété complexe est ou non kählérienne. Les variétés projectives complexes analytiques sont des exemples particuliers de variétés kählériennes compactes. Une forme de Kähler de classe de cohomologie entière n'est autre qu'une forme de Hodge. En fait, une autre façon équivalente de formuler le théorème de plongement de Kodaira est donc la suivante :

Théorème 4 *Soit M une variété complexe compacte. Alors M est projective si et seulement si elle admet une forme de Kähler dont la classe de cohomologie est entière.*

3 Conditions de Riemann caractérisant les variétés abéliennes

Considérons un tore complexe de dimension n

$$T^n = \mathbb{C}^n/\Lambda,$$

où $\Lambda \simeq H_1(T^n, \mathbb{Z})$, est un réseau isomorphe à $\mathbb{Z}^{2n}$. Le tore T^n est une variété holomorphe kählérienne et un groupe commutatif.

Un tore complexe qui possède un plongement holomorphe dans un espace projectif s'appelle variété abélienne. Une autre approche consiste à définir une variété abélienne comme étant une variété abstraite complète sur laquelle est définie une structure de groupe algébrique. Une telle variété est intègre, projective, lisse et sa loi de groupe est commutative.

Un sous-ensemble analytique fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est un sous-ensemble fermé localement défini par des équations holomorphes. Un résultat remarquable est le théorème de Chow suivant : Toute sous-variété analytique fermé de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est une variété projective. Ce théorème affirme qu'une telle variété est définie par des équations polynomiales homogènes et on peut donc l'étudier par des méthodes soit analytiques, soit algébriques. Tout sous-ensemble analytique compact est algébrique, i.e., définie par l'annulation simultanée d'un nombre fini de polynêmes homogènes P_j,

$$\bigcap_j \{Z \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : P_j(Z) = 0\}.$$

D'après le théorème de Chow [7], il est équivalent de dire qu'une variété abélienne est un tore complexe algébrique c'est-à-dire définie par l'annulation simultanée d'un nombre fini de polynômes homogènes.

Un résultat intéressant concernant les variétés kählériennes a été obtenu par Moishezon. Rappelons tout d'abord que d'après un théorème de Siegel [33], toute variété analytique complexe compacte non singulière de dimension n admet au plus n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. Les variétés dites de Moishezon (i.e., des variétés analytiques complexes compactes qui deviennent projectives après un nombre fini d'éclatements de centres lisses) possèdent le maximum de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. Plus précisément, a le résultat fondamental suivant obtenu par Moishezon [19] : Une variété analytique complexe compacte de dimension n est de Moishezon si et seulement si elle admet n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. De façon équivalente, le théorème de Moishezon dit qu'une variété kählérienne compacte de dimension n est projective si et seulement si elle possède n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. En outre, on peut d'ores et déjà déduire du théorème de Moishezon, qu'un tore complexe T^n est une variété abélienne si et seulement si il possède n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes.

Soient $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ et $(e_1, ..., e_n)$ une base (canonique) de $\mathbb{C}^n$ telle que le réseau Λ ait une base (sur $\mathbb{Z}$) de $2n$-vecteurs colonnes $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ de la matrice des périodes $\Omega = (\lambda_1, ..., \lambda_{2n})$ avec $\lambda_k = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha,k} e_\alpha$. Les vecteurs $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ forment aussi une base réelle de $\mathbb{C}^n$ et on désignera par $(x_, ..., x_{2n})$ la base duale correspondante, i.e., des coordonnées relatives à la base $(\lambda_1, ..., \lambda_{2n})$ de telle façon que : $\int_{\lambda_\alpha} dx_k = \delta_{\alpha k}$. On a

$$dz_\alpha = \sum_{k=1}^n \lambda_{\alpha,k} dx_k, \qquad d\overline{z}_\alpha = \sum_{k=1}^n \overline{\lambda}_{\alpha,k} dx_k. \tag{6}$$

Soit $Q=(q_{\alpha k})$ une matrice entière (matrice d'intersection) antisymétrique d'ordre $2n$. Soit $\omega:\Lambda\times\Lambda\longrightarrow\mathbb{Z}$, une forme de Hodge, i.e., une $(1,1)$-forme positive, fermée et à classe de cohomologie $[\omega]\in H^2(T^n;\mathbb{Z})$. Posons

$$\omega=\frac{1}{2}\sum q_{\alpha k}dx_\alpha\wedge dx_k.$$

En tenant compte de la relation (6), on exprime ω sous une autre forme et on constate immédiatement qu'elle est de Hodge si et seulement si les conditions (relations bilinéaires de Riemann) suivantes sont satisfaites

$$\Omega Q\Omega^\intercal=0,\qquad i\Omega Q\overline{\Omega}^\intercal>0.$$

D'après le théorème de plongement de Kodaira, T^n admet un plongement dans l'espace projectif complexe. Réciproquement, si T^n est une variété projective alors il existe une forme kählérienne qui représente une classe de cohomologie entière et on peut sans aucun problème obtenir une forme qui satisfait aux relations précédentes.

Par ailleurs, on peut choisir une nouvelle base de Λ sur $\mathbb{Z}$ de $2n$ vecteurs colonnes $\lambda_1,...,\lambda_{2n}$ de telle façon que :

$$Q=\begin{pmatrix}0&\Delta_\delta\\-\Delta_\delta&0\end{pmatrix},\qquad \Delta_\delta=\begin{pmatrix}\delta_1&0&\cdots&0\\0&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&\delta_n\end{pmatrix},$$

où $\delta_1,\ldots,\delta_n\in\mathbb{N}^*$, $\delta_\alpha\mid\delta_{\alpha+1}$, $\alpha=1,...,n-1$, sont des diviseurs élémentaires. Ces derniers ne dépendent pas du choix de $(\lambda_1,...,\lambda_n)$. La $(1,1)$-forme ω peut donc s'exprimer comme étant

$$\omega=\sum_{\alpha=1}^n\delta_\alpha dx_\alpha\wedge dx_{n+\alpha}.$$

On peut choisir une base $(e_1,...,e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ en posant

$$e_\alpha=\frac{\lambda_\alpha}{\delta_\alpha},\quad \alpha=1,...,n$$

et la matrice des périodes Ω s'écrit $\Omega=(\Delta_\delta,Z)$, où Z est une matrice vérifiant $Z^\intercal=Z$ et $\mathrm{Im}Z>0$. On résume tout ceci comme suit :

Théorème 5 *Le tore complexe $T^n=\mathbb{C}^n/\Lambda$ est une variété abélienne si et seulement s'il existe une matrice entière Q d'ordre n, antisymétrique et satisfaisant aux relations bilinéaires de Riemann*

$$\Omega Q\Omega^\intercal=0,\qquad i\Omega Q\overline{\Omega}^\intercal>0,$$

ou de façon équivalente si et seulement s'il existe une base du réseau Λ *et une base de l'espace* $\mathbb{C}^n$ *telles que la matrice des périodes* Ω *s'écrit sous la forme* $\Omega = (\Delta_\delta, Z)$*, où* $\Delta_\delta = diag\ (\delta_1, ..., \delta_n)$*,* $\delta_\alpha \in \mathbb{N}^*$*,* $\delta_\alpha | \delta_{\alpha+1}$*,* $\alpha = 1, ..., n-1$ *et* Z *une matrice vérifiant* $Z^\intercal = Z$*,* $ImZ > 0$*.*

Exemple 6 *En dimension* 1*, tout tore complexe est une variété abélienne. Dans ce cas le plongement se réalise dans un espace projectif de dimension* 2*. On obtient les modèles* $\mathbb{C}/$*réseau comme courbes projectives planes et il est plus facile dans ce cas de travailler avec les fonctions* $\wp$ *et* $\wp'$ *de Weierstrass. Les variétés abéliennes de dimension* 1 *sont les courbes elliptiques.*

Exemple 7 *La variété jacobienne d'une courbe algébrique non singulière est une variété abélienne.*

Notons que d'après ce qui précède, la forme de Hodge ω peut-être vue comme étant la forme de courbure d'un fibré en droites positif $\mathcal{L}$ avec $\omega = [\frac{i}{2\pi}\Theta_{\mathcal{L}}]$ et $\mathcal{L} = [\mathcal{D}]$ où $\mathcal{D}$ est un diviseur ample sur une variété abélienne T^n. Tout diviseur positif sur une variété abélienne n'est pas nécessairement ample. On montre par ailleurs que si la variété abélienne est irréductible alors le fibré en droites $\mathcal{L} = [\mathcal{D}]$ associé à tout diviseur $\mathcal{D}$ positif est ample. On rappelle qu'une variété abélienne est irréductible lorsqu'elle ne contient pas de sous-variété abélienne. Sinon, elle est dite réductible. Le théorème de réductibilité de Poincaré [25] affirme que si T^n est une variété abélienne contenant une sous-variété abélienne A, alors on peut trouver une autre sous-variété abélienne B de T^n de façon à ce que $A \cap B$ soit un sous-groupe fini de T^n et un homomorphisme surjective $f : A \oplus B \longrightarrow T^n$ tel que : $\ker f = A \cap B$. Autrement dit, si une sous-variété abélienne contient une sous-variété abélienne, alors elle est isogène au produit de cette sous-variété par une autre sous-variété (Rappelons que si M et N sont deux variétés abéliennes, on dit que $f : M \longrightarrow N$ est une isogénie si f est un morphisme surjective et de noyau fini ; voir plus loin pour le détail.). On démontrera plus loin (voir théorème de Lefschetz sur les fonctions thêta) que si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites ample sur une variété abélienne, alors $\mathcal{L}^k \equiv \mathcal{L}^{\otimes k}$ est très ample pour $k \geq 3$.

4 Fibrés en droites sur les variétés abéliennes

Soient $T^n = \mathbb{C}^n/\Lambda$ une variété abélienne et $\tau : \mathcal{L} \longrightarrow T^n$ un fibré en droites. Nous noterons
$$\pi^*\mathcal{L} = \{(u, v) \in \mathbb{C}^n \times \mathcal{L} : \pi(u) = \tau(v)\},$$
le pullback avec l'application régulière $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow T^n$. Comme $\mathbb{C}^n$ est contractile (Un espace topologique E est contractile si Id_E est homotope à une application constante : $E \longrightarrow E$. Comme l'application
$$f : \mathbb{C}^n \times I \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad (z, t) \longmapsto tz,$$

est une déformation continue de $Id_{\mathbb{C}^n}$ à la fonction constante nulle, alors $\mathbb{C}^n$ est contractile) et qu'en outre tout fibré au dessus d'un espace contractile est trivial, alors on en déduit que le fibré $\pi^*\mathcal{L}$ est trivial et on a une trivialisation globale

$$\begin{aligned} \varphi &: \pi^*\mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \\ \varphi_z &: (\pi^*\mathcal{L})_z \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}^n \\ \varphi_{z+\lambda} &: (\pi^*\mathcal{L})_{z+\lambda} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad \lambda \in \Lambda \end{aligned}$$

On a $(\varphi_z) = (\varphi_{z+\lambda})$ et

$$\mathbb{C} \overset{\varphi_z}{\longleftarrow} (\varphi_z) = (\varphi_{z+\lambda}) \overset{\varphi_{z+\lambda}}{\longrightarrow} \mathbb{C},$$

fournit un automorphisme linéaire. Par conséquent, les multiples pour $\mathcal{L}$ sont donnés par $e_\lambda(z) = \varphi_{z+\lambda}^{-1}.\varphi_z \in \mathbb{C}$, et satisfont pour tout $\lambda, \mu \in \Lambda$ aux relations

$$e_{\lambda'}(z+\lambda)e_\lambda(z) = e_\lambda(z+\lambda')e_{\lambda'}(z) = e_{\lambda+\lambda'}(z).$$

Réciproquement, étant donné un ensemble des multiples $e_\lambda(z)$ satisfaisant à ces relations, alors on peut définir le fibré en droites $\mathcal{L} \longrightarrow T^n$ en prenant

$$\mathcal{L} \simeq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}/\{(z,\xi) \sim (z+\lambda, e_\lambda(z).\xi)\}.$$

Proposition 6 *Si $T^n = \mathbb{C}^n/\Lambda$ est une variété abélienne et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur T^n, alors il existe une base $(\lambda_1, ..., \lambda_{2n})$ de Λ et une trivialisation de $\pi^*\mathcal{L}$ telles que :*

$$e_{\lambda_\alpha}(z) \equiv 1, \quad \alpha = 1, ..., n.$$

Démonstration : On suppose que $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, d'où $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \simeq (\mathbb{C}^*)^n$. Soit $\pi_1^*\mathcal{L}$ le pullback du fibré $\mathcal{L}$ avec

$$\pi_1 : (\mathbb{C}^*)^n \longrightarrow T^n.$$

Sur T^n, on a une suite exacte de faisceaux de groupes :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{T^n} \overset{\exp}{\longrightarrow} \mathcal{O}_{T^n}^* \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{O}_{T^n}$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes et $\mathcal{O}_{T^n}^*$ celui des fonctions holomorphes inversibles sur T^n et où $exp(z) = e^{2\pi iz}$. Comme

$$H^1((\mathbb{C}^*)^n, \mathcal{O}_{T^n}) = H^2((\mathbb{C}^*)^n, \mathcal{O}_{T^n}) = 0,$$

on en déduit immédiatement que

$$H^1((\mathbb{C}^*)^n, \mathcal{O}_{T^n}^*) \overset{c_1}{\longrightarrow} H^2((\mathbb{C}^*)^n, \mathbb{Z}),$$

la classe $c_1(\mathcal{L})$ est la (première) classe de Chern du fibré en droites $\mathcal{L}$. Pour ce dernier, on peut choisir une base $(\lambda_1, ..., \lambda_{2n})$ de Λ telle que dans la base duale $(x_1, ..., x_{2n})$ correspondante on ait

$$c_1(\mathcal{L}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}.$$

Les coordonnées $x_{n+\alpha}$ sont bien définies sur $(\mathbb{C}^*)^n$, d'où

$$c_1()\pi_1^*\mathcal{L}) = \pi_1^*(c_1\mathcal{L}) = 0,$$

et par conséquent $\pi_1^*\mathcal{L}$ est trivial. En prenant une trivialisation

$$\pi_1^*\mathcal{L} \longrightarrow (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C},$$

et en la prolongeant à $\pi^*\mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}^n$, on obtient $e_{\lambda_\alpha}(z) \equiv 1$ pour $\alpha = 1, ..., n$ et la proposition est démontrée. $\square$

On peut choisir une base $(\lambda_1, ..., \lambda_{2n})$ de Λ telle que dans la base duale $(x_1, ..., x_{2n})$, la matrice des périodes s'écrit sous la forme $\Omega = (\Delta_\delta, Z)$ avec

$$\Delta_\delta = \text{diag } (\delta_1, ..., \delta_n), \quad \delta_\alpha \in \mathbb{N}^*, \quad \delta_\alpha | \delta_{\alpha+1}, \quad \alpha = 1, ..., n, \quad Z^\top = Z, \quad \text{Im } Z > 0.$$

La forme de Hodge s'écrit

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}.$$

Soient $e_\lambda(z)$ les multiples du fibré en droites $\mathcal{L}$ sur T^n, satisfaisant à $e_{\lambda_\alpha}(z) \equiv 1$ et

$$e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{-2\pi i z_\alpha}, \quad \alpha = 1, ..., n.$$

Comme $Z_{\alpha\beta} = Z_{\beta\alpha}$, on en déduit que ces multiples satisfont aux relations :

$$e_{\lambda_\alpha}(z + \lambda_\beta) e_{\lambda_\beta}(z) = e_{\lambda_\beta}(z + \lambda_\alpha) e_{\lambda_\alpha}(z).$$

Ecrivons $Z = X + iY$. On sait que $Y = \text{Im } Z > 0$, donc on peut poser

$$W = (w_{\alpha\beta}) = Y^{-1}.$$

Dès lors, la fonction

$$h(z) = e^{\frac{\pi}{2} \sum W_{\alpha\beta}(z_\alpha - \overline{z}_\alpha)(z_\beta - \overline{z}_\beta - 2iY_{\beta\beta})},$$

satisfait aux relations suivantes :

$$h(z + \lambda_\alpha) = h(z), \qquad h(z + \lambda_{n+\alpha}) = \left| e^{2\pi i z_\alpha} \right|^2 h(z).$$

Une telle fonction h, détermine une métrique sur le fibré en droites $\mathcal{L}$. Un calcul direct montre que la forme de courbure $\Theta_{\mathcal{L}}$ associée à cette métrique est

$$\Theta_{\mathcal{L}} = \partial\overline{\partial}\log\frac{1}{h} = \pi\sum_{\alpha,\beta} W_{\alpha\alpha} dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta,$$

et en termes de dx_α, $dx_{n+\alpha}$ avec

$$dz_\alpha = \delta_\alpha dx_\alpha + \sum_\beta z_{\alpha\beta} dx_{n+\beta}, \qquad d\overline{z}_\beta = \delta_\alpha dx_\alpha + \sum_\beta \overline{z}_{\alpha\beta} dx_{n+\beta},$$

on obtient

$$\Theta_{\mathcal{L}} = -2\pi i \sum_\alpha \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha} = -2\pi i\omega,$$

ce qui montre que

$$c_1(\mathcal{L}) = [\frac{i}{2\pi}\Theta] = [\omega].$$

Par conséquent, on a

Proposition 7 *Le fibré en droites $\mathcal{L}$ sur T^n avec les multiples $e_\lambda(z)$ vérifiant*

$$e_{\lambda_\alpha}(z) \equiv 1, \qquad e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{-2\pi i z_\alpha}, \quad \alpha = 1, ..., n$$

admet la classe de Chern $c_1(\mathcal{L}) = [\omega]$.

Proposition 8 *Tout fibré en droites ayant le même classe de Chern que $\mathcal{L}$ est un translaté de $\mathcal{L}$. En outre, $\mathcal{L}$ est fixé par $\prod_{\alpha=1}^n \delta_\alpha^2$ translations où $\delta_1, ..., \delta_\alpha$ sont les diviseurs élémentaires associées à la polarisation $c_1(\mathcal{L})$.*

Démonstration : Nous alons tout d'abord considérer le cas d'un fibré en droites $\widetilde{\mathcal{L}} \longrightarrow T^n$ dont la classe de Chern est nulle. Des suites exactes de faisceaux

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{O}^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

sur T^n (ou sur une variété kählérienne compacte quelconque), on déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
H^1(T^n, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(T^n, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(T^n, \mathbb{Z}) \\
\uparrow f & & \uparrow g & & \| \\
H^1(T^n, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(T^n, \mathbb{C}^*) & \longrightarrow & H^2(T^n, \mathbb{Z}) \\
\shortparallel & & & & \\
H^{1,0}(T^n) \oplus H^{0,1}(T^n) & & & &
\end{array}$$

Comme f est surjective, alors les lignes sont exactes, le noyau de c_1 réside dans l'image de g et par conséquent le fibré $\widetilde{\mathcal{L}}$ s'exprime à l'aide des fonctions de transitions ou de passage (constant). La trivialisation de $\pi^*\widetilde{\mathcal{L}}$ a des multiples constants. D'après la proposition précédente, on sait que les multiples $e_\lambda(z)$ de $\mathcal{L}$ vérifient $e_{\lambda_\alpha}(z) \equiv 1$, $e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{-2\pi i z_\alpha}$, $\alpha = 1, ..., n$, donc pour tout $\mu \in T^n$, sous une translation par μ,

$$\tau_\mu : T^n \longrightarrow T^n, \quad z \longmapsto z + \mu,$$

les multiples de $\tau_\mu^*\mathcal{L}$ sont

$$\begin{aligned} e'_{\lambda_\alpha}(z) &= e_{\lambda_\alpha}(z+\mu) \equiv 1, \\ e'_{\lambda_{n+\alpha}}(z) &= e_{\lambda_{n+\alpha}}(z+\mu) = e^{-2\pi i(z_\alpha+\mu_\alpha)}. \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{L}' = \tau_\mu^*\mathcal{L}$. Les multiples constants de $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{L}'$ sont donnéés par $e_{\lambda_\alpha} \equiv 1$, $e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i \mu_\alpha}$, $\alpha = 1, ..., n$, avec $c_1(\mathcal{L}') = c_1(\mathcal{L})$, ce qui achève la démonstration de la proposition. $\square$

Corollaire 9 *Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites positif. Alors, $\mathcal{L}$ est fixé par $\prod_{\alpha=1}^n \delta_\alpha^2$ translations (de la forme $\{\tau_s : s \in \mathbb{Z}\{\delta_\alpha^{-1}\lambda_\alpha, \delta_\alpha^{-1}\lambda_{\alpha+n}\}\}$ où $\delta_1, ..., \delta_\alpha$ sont les diviseurs élémentaires associées à la polarisation $c_1(\mathcal{L})$.*

Démonstration : Comme dans la proposition précédente, on considère $\tau_\mu^*\mathcal{L}$, $\mu \in T^n$,

$$\tau_\mu : T^n \longrightarrow T^n, \quad \tau_\mu \longmapsto z + \mu,$$

une translation et le problème consiste à montrer que

$$\varphi_{\mathcal{L}} : T^n \longrightarrow \mathrm{Pic}^\circ(T^n) = \frac{H^1(T^n, \mathcal{O}_{T^n})}{T^n, \mathbb{Z}}, \quad \mu \longmapsto \mathcal{L}^{-1} \otimes \tau_\mu^*\mathcal{L},$$

est une isogénie de degré $\prod_{\alpha=1}^n \delta_\alpha^2$ (On rappelle ici aussi et le détail sera donné plus loin, qu'une isogénie entre deux variétés abéliennes est un morphisme surjective de noyau fini). On va décrire explicitement $\varphi_{\mathcal{L}}$ en termes des bases (λ_α) de Λ et (e_α) de $\mathbb{C}^n$ de la base duale (y_α^*) de Λ^*). Un raisonnement similaire à celui de la proposition précédente, montre que les multiples de

$$\varphi_{\mathcal{L}}(\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha\lambda_\alpha) = \varphi_{\mathcal{L}}(\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha\delta_\alpha e_\alpha),$$

sont

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \quad e_{\lambda_{n+\alpha}} = e^{-2\pi i \delta_\alpha c_\alpha}.$$

Autrement dit,

$$\varphi_{\mathcal{L}} = (\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha\lambda_\alpha) = -\sum_{\alpha=1}^n c_\alpha\delta_\alpha x_{n+\alpha}^* = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha\delta_\alpha y_\alpha^*,$$

où les $x_{n+\alpha}^*$ sont des coordonnées sur $\mathbb{C}^n$. De même, les multiples de

$$\varphi_{\mathcal{L}}(\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \lambda_{n+\alpha}) = \varphi_{\mathcal{L}}(\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha Z_{\alpha\beta} e_\beta),$$

sont

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \quad e_{\lambda_{n+\beta}} = e^{-2\pi i Z_{\alpha\beta}},$$

ou ce qui revient au même

$$\varphi_{\mathcal{L}}(\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \lambda_{n+\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \delta_\alpha x_\alpha^* = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \delta_\alpha y_{n+\alpha}^*.$$

L'application $\varphi_{\mathcal{L}}$ applique le sous-groupe de T^n engendré par $\{\delta_\alpha^{-1}\lambda_\alpha, \delta_\alpha^{-1}\lambda_{n+\alpha}\}$ sur le fibré en droites trivial. Le noyau de $\varphi_{\mathcal{L}}$ coincide avec ce sous-groupe et le résultat en découle. $\square$

5 Le théorème de Lefschetz sur les fonctions thêta

Nous allons donner une preuve directe du critère de projectivité des tores complexes à l'aide des fonctions thêta. C'est l'objet du théorème de Lefschetz qui affirme que si un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur une variété abélienne T^n est positif, alors $H^0(T^n, \mathcal{O}_{T^n}(\mathcal{L}^k))$ n'a pas de points de base pour $k \geq 2$ et fournit un plongement projectif pour $k \geq 3$.

Théorème 10 *Soit $\mathcal{L} \longrightarrow T^n$ un fibré en droites positif. Alors, les diviseurs élémentaires $\delta_1, ..., \delta_n$ de la polarisation $c_1(\mathcal{L})$ sont reliés par la formule*

$$\dim H^0(T^n, \mathcal{O}(\mathcal{L}^k)) = \prod_{\alpha=1}^{n} \delta_\alpha.$$

En outre, $H^0(T^n, \mathcal{O}(\mathcal{L}^k))$ n'a pas de points de base pour $k \geq 2$ et fournit un plongement projectif pour $k \geq 3$.

Démonstration : Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_{2n})$ une base de Λ et $(x_1, ..., x_{2n})$ la base duale correspondante. On a déjà montré précédemment que l'on peut écrire

$$c_1(\mathcal{L}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \delta_\alpha dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha},$$

et que l'on peut choisir une base $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ en posant $e_\alpha = \delta_\alpha^{-1}\lambda_\alpha$, $\alpha = 1, ..., n$, de telle façon que la matrice des périodes Ω s'écrit

$$\Omega = (\Delta_\delta, Z), \quad \Delta_\delta = \text{diag }(\delta_1, ..., \delta_n), \quad \delta_\alpha \in \mathbb{N}^*, \quad Z^\top = Z, \quad \text{Im } Z > 0.$$

D'après la proposition 7, le fibré en droites $\mathcal{L}$ est une translation du fibré $\mathcal{L}_0$ de multiples $e_{\lambda_\alpha} \equiv 1$, $e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{-2\pi i z_\alpha}$. Soit $\mathcal{L} = \tau_\mu^* \mathcal{L}_0$, $\mu = \frac{1}{2} \sum Z_{\alpha\alpha}.e_\alpha \in T^n$, $\tau_\mu : T^n \longrightarrow T^n$ une translation. Les multiples de $\mathcal{L}$ sont

$$e_{\lambda_\alpha} \equiv 1, \quad e_{\lambda_{n+\alpha}}(z) = e^{-2\pi i z_\alpha - \pi i Z_{\alpha\alpha}},$$

et dès lors les sections de $\mathcal{L}$ sont données (via le pullback de $\mathbb{C}^n$) par les fonctions θ avec

$$\begin{aligned} \theta(z + \lambda_\alpha) &= \theta(z), &(7)\\ \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) &= e^{-2\pi i z_\alpha - \pi i Z_{\alpha\alpha}}.\theta(z). &(8) \end{aligned}$$

D'après la première condition de périodicité, la fonction θ admet un développement en série de Fourier de la forme

$$\theta(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l.e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} z \rangle}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l.e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1}(z + \lambda_{n+\alpha}) \rangle},\\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l.e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} \lambda_{n+\alpha} \rangle}.e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} z \rangle}. \end{aligned}$$

Aussi, la seconde équation fonctionnelle (8) s'écrit

$$\begin{aligned} \theta(z + \lambda_{n+\alpha}) &= e^{-2\pi i z_\alpha - \pi i Z_{\alpha\alpha}} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_l e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} z \rangle},\\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} a_{l + \delta_\alpha e_\alpha}.e^{-\pi i Z_{\alpha\alpha}}.e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} z \rangle}. \end{aligned}$$

Identifiant les coefficients des fonctionnelles de base, on trouve la relation de récurrence

$$a_{l + \delta_\alpha e_\alpha} = e^{2\pi i \langle l, \Delta_\delta^{-1} \rangle + \pi i Z_{\alpha\alpha}}.a_l.$$

Connaissant les a_l, $0 \leq l_\alpha \leq \delta_\alpha$, les autres coefficients s'en déduisent inductivement, la fonction θ est complètement déterminée et donc

$$\dim H^0(T^n, \mathcal{O}(\mathcal{L}^k)) \leq \prod_{\alpha=1}^n \delta_\alpha.$$

On va montrer que cette dimension est exactement $\prod_{\alpha=1}^n \delta_\alpha$. Soit $\mathcal{L} \longrightarrow T^n$ principalement polarisé et normalisé comme précédemment. On a

$$H^0(T^n, \mathcal{O}(\mathcal{L}^k) = \left\{ \theta : \theta(z + e_\alpha) = \theta(z), \theta(z + \lambda_{z + \lambda_{n+\alpha}}) = e^{-2\pi i k (z_\alpha + \frac{Z_{\alpha\alpha}}{2})}.\theta(z) \right\}.$$

Si θ est la fonction thêta de Riemann sur $\mathcal{L}$, alors

$$\Theta_\mu(z) = \theta(z+\mu)\theta(z-\mu) \in H^0(T^n, \mathcal{O}(\mathcal{L}^2)), \quad \forall \mu \in T^n.$$

Pour tout z, on peut choisir μ tel que : $\Theta_\mu(z) \neq 0$ ou précisément de façon que $\theta(z \pm \mu) \neq 0$, i.e., de façon que les $z \pm \mu$ n'appartiennent pas à la variété $V \neq \emptyset$ des zéros de θ ou ce qui revient au même que $\mu \notin V - z$ et $\mu \notin z - V$. La fonction θ étant holomorphe et non identiquement nulle, alors la variété V n'a pas de point intérieur et il en est de même des fermés $V - z$ et $z - V$. Dès lors, la réunion de ces derniers n'a pas de point intérieur et il suffit de choisir μ dans leur complèmentaire qui est un ouvert dense. Il en résulte que l'espace $H^0(T^n, \mathcal{O}(\mathcal{L}^2))$ n'a pas de points de base et on a une application

$$\psi_{\mathcal{L}^2} : T^n \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}).$$

Aussi, pour toute base $(\theta_0, ..., \theta_N)$ de l'espace $H^0(T^n, \mathcal{O}(\mathcal{L}^3))$, les θ_α n'ont pas de zéro commun et l'application $z \longmapsto (\theta_\alpha(z))$ définit une application

$$\psi_{\mathcal{L}^3} : T^n \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}).$$

Montrons que celle-ci est un plongement. On commence tout d'abord par montrer que l'application est de rang maximum, i.e.,

$$r \equiv \text{rang} \begin{pmatrix} \theta_0(z) & \theta_1(z) & ... & \theta_N(z) \\ \frac{\partial \theta_0}{\partial z_1}(z) & \frac{\partial \theta_1}{\partial z_1}(z) & ... & \frac{\partial \theta_N}{\partial z_1}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \theta_0}{\partial z_n}(z) & \frac{\partial \theta_1}{\partial z_n}(z) & ... & \frac{\partial \theta_N}{\partial z_n}(z) \end{pmatrix} = n+1,$$

sur $\mathbb{C}^n$ ou encore que les vecteurs

$$\overrightarrow{u} = (\theta_0, ..., \theta_N)(z),$$

et

$$\overrightarrow{v}_\alpha = \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial z_\alpha}, ..., \frac{\partial \theta_N}{\partial z_\alpha} \right)(z), \quad \alpha = 1, ..., n$$

sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants et donc que l'application $\psi_{\mathcal{L}^3}$ est une immersion. Supposons que $r < n+1$ en $z_0 \in \mathbb{C}^n$, fixé. Autrement dit, une relation linéaire entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overline{v}_\alpha$ s'écrit

$$a_0 \overrightarrow{u} = \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \overrightarrow{v}_\alpha, \tag{9}$$

ou encore

$$a_0 \theta_\beta(z_0) = \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha \frac{\partial \theta_\beta}{\partial z_\alpha}(z_0), \quad \beta = 1, ..., n \tag{10}$$

Dès lors, pour toute $\Theta \in H^0(T^n, \mathcal{O}(\mathcal{L}^3))$, on a aussi

$$a_0\Theta(z_0) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial z_\alpha}(z_0).$$

Soit

$$\Theta(z, \mu, \nu) = \theta(z+\mu)\theta(z+\nu)\theta(z-\mu-\nu) \in H^0(T^n, \mathcal{O}(\mathcal{L}^3)), \qquad (11)$$

le produit de translatées de la fonction thêta de Riemann. D'où, pour tous μ, ν, on a

$$a_0\Theta(z_0, \mu, \nu) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial z_\alpha}(z_0, \mu, \nu), \quad z_0 \text{ fixé.}$$

Définissons la fonction méromorphe

$$\varphi(z) = \sum a_\alpha \frac{\partial \log \theta(z)}{\partial z_\alpha},$$

d'où, pour z_0 fixé et tous μ, ν,

$$\begin{aligned}
\varphi(z_0+\mu) + \varphi(z_0+\nu) + \varphi(z_0-\mu-\nu) &= \sum a_\alpha \frac{\partial \log \theta(z_0+\nu)}{\partial z_\alpha} \\
&\quad + \sum a_\alpha \frac{\partial \log \theta(z_0+\nu)}{\partial z_\alpha} \\
&\quad\quad + \sum a_\alpha \frac{\partial \log \theta(z_0-\nu-\nu)}{\partial z_\alpha}, \\
&= \sum a_\alpha \frac{\partial \log \Theta}{\partial z_\alpha}(z_0, \mu, \nu), \\
&= \frac{1}{\Theta(z_0, \mu, \nu)} \sum a_\alpha \frac{\partial \Theta}{\partial z_\alpha}(z_0, \mu, \nu), \\
&= \frac{1}{\Theta(z_0, \mu, \nu)} . a_0\Theta(z_0, \mu, \nu), \\
&= a_0.
\end{aligned}$$

La fonction méromorphe φ est telle que : $\varphi(z_0+\mu) + \varphi(z_0+\nu) + \varphi(z_0-\mu-\nu)$ est indépendante de μ et ν. Pour tout μ, on peut trouver ν tels que $z+\nu$ et $z-\mu-\nu$ n'appartiennent pas à l'ensemble des pôles de φ ; i.e., tels que : $\varphi(z_0+\nu) \neq \infty$ et $\varphi(z_0-\mu-\nu) \neq \infty$. Dès lors, $\varphi(z_0+\mu)$ est une fonction holomorphe pour tout μ. D'autre part, en utilisant les relations (7) et (8), on obtient immédiatemment $\varphi(z+e_\alpha) = \varphi(z)$, et

$$\varphi(z + \lambda_{n+\alpha}) = \varphi(z) - 2\pi i a_\alpha. \qquad (12)$$

Les fonctions holomorphes $\frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha}$ étant Λ-périodiques, elles sont donc bornées sur $\mathbb{C}^n$ et ce sont des constantes en vertu du théorème de Liouville. Ainsi, φ est linéaire

$$\varphi(z) = \sum_\alpha b_\alpha z_\alpha + C.$$

La fonction φ est holomorphe, linéaire et puisque $\varphi(z+e_\alpha)=\varphi(z)$, alors on en déduit que $b_\alpha=0$ pour tout α et

$$\varphi(z+\lambda_{n+\alpha})=\varphi(z)=\text{constante}.$$

Dès lors, on tire de (12) que $a_\alpha=0$ pour tout α et par conséquent la relation (10) est triviale montrant ainsi l'indépendance linéaire entre θ et ses dérivées et prouvant donc que $\psi_{\mathcal{L}^3}$ est une immersion. Nous allons maintenant montrer que l'application

$$\psi_{\mathcal{L}^3}: T^n \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \quad z \bmod \lambda \longmapsto [\theta_0(z):...:\theta_N(z)],$$

est injective. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$ avec

$$[\theta_0(z_1):...:\theta_N(z_1)]=[\theta_0(z_2):...:\theta_N(z_2)].$$

Il existe donc un $\rho\in\mathbb{C}$, $\rho\neq 0$ tel que :

$$\theta_\alpha(z_1)=\rho\theta_\alpha(z_2), \quad \alpha=1,...,N$$

ou encore

$$\Theta(z_1)=\rho\Theta(z_2), \quad \forall\Theta\in H^0(T^n,\mathcal{O}(\mathcal{L}^3)),$$

et il suffit de montrer que z_1 et z_2 représentent le même point sur T^n. De la relation (11), on tire

$$\frac{\Theta(z_1,\mu,\nu)}{\Theta(z_2,\mu,\nu)}=\frac{\theta(z_1+\mu)\theta(z_1+\nu)\theta(z_1-\mu-\nu)}{\theta(z_2+\mu)\theta(z_2+\nu)\theta(z_2-\mu-\nu)}=\rho. \tag{13}$$

Pour tout $\mu\in\mathbb{C}^n$, on peut choisir ν tel que les $z_1+\nu$, $z_2+\nu$, $z_1-\mu-\nu$, $z_2-\mu-\nu$ n'appartiennent pas à la variété des zéros de θ ; i.e., de façon que les $\theta(z_1+\nu)$, $\theta(z_2+\nu)$, $\theta(z_1-\mu-\nu)$, $\theta(z_2-\mu-\nu)$ sont sans zéro. D'après (13), la fonction

$$\mu\longmapsto\frac{\theta(z_1+\mu)}{\theta(z_2+\mu)},$$

est holomorphe et sans zéro. Dès lors,

$$\frac{\theta(z_1+\mu)}{\theta(z_2+\mu)}=e^{\varphi(\mu)},$$

i.e.,

$$\varphi(\mu)=\log\frac{\theta(z_1+\mu)}{\theta(z_2+\mu)}.$$

De la périodicité de θ, on tire les relations

$$\begin{aligned}\varphi(\mu+e_\alpha)&=\varphi(\mu)+2\pi n_\alpha, \quad n_\alpha\in\mathbb{Z} &(14)\\ \varphi(\mu+\lambda_{n+\alpha})&=\varphi(\mu)-2\pi i(z_1-z_2)_\alpha+2\pi i m_\alpha, \quad m_\alpha\in\mathbb{Z} &(15)\end{aligned}$$

En raisonnant comme précédemment, on montre que $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_\alpha}$ est constante et que

$$\varphi(\mu) = 2\pi i \sum_\alpha a_\alpha \mu_\alpha + C.$$

Dès lors, la relation (14) montre que $a_\alpha = n_\alpha \in \mathbb{Z}$ et

$$\varphi(\mu + \lambda_{n+\alpha}) - \varphi(\mu) = 2\pi i (z_1 - z_2)_\alpha + 2\pi i m_\alpha = 2\pi i \sum a_\alpha Z_{\alpha\beta}.$$

Comme φ est linéaire, alors

$$\varphi(\mu + \lambda_\alpha) - \varphi(\mu) = 2\pi i (z_1 - z_2)_\alpha + 2\pi i m_\alpha,$$

et en composant avec la relation (15), on obtient

$$\begin{aligned} -(z_1 - z_2)_\alpha + m_\alpha &= \sum a_\alpha Z_{\alpha\beta}, \\ z_1 - z_2 &= \sum m_\alpha e_\alpha - \sum a_\alpha \lambda_{n+\alpha}, \end{aligned}$$

ce qui montre que $z_1 - z_2 \in \Lambda$. Par conséquent,

$$\psi_{\mathcal{L}^3} : T^n \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}),$$

est un plongement. Finalement, pour tout fibré en droites $\mathcal{L} \longrightarrow T^n$ positif, on peut trouver une variété abélienne T'^n avec un fibré en droites $\mathcal{L}' \longrightarrow T'^n$ de polarisation principale de sorte que l'application $\pi' : T^n \longrightarrow T'^n$ est un revêtement à $\prod \delta_\alpha$ feuillets et $\pi'^*(\mathcal{L}') = \mathcal{L}$. Le raisonnement que nous avons utilisé précédemment pour $\mathcal{L}'$ s'étend sans difficulté à $\mathcal{L}$. En outre, le fait que $\psi_{\mathcal{L}^3}$ sépare les points dans $\pi^{-1}(p)$ pour tout $p \in T'^n$, découle de la construction explicite des fonctions thêta et la démonstration du théorème est complète. $\square$

Une polarisation du type $(\delta_1, ..., \delta_n)$ sur une variété abélienne est la classe de cohomologie $[\omega]$ d'une forme de Hodge sur cette variété. La polarisation est dite principale si $\delta_\alpha = 1$ pour tout α.

Exemple 8 *Le cas des surfaces de Riemann est particulièrement intéressant. Soit X une surface de Riemann de genre g et soit $Jac(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda$ sa variété jacobienne. Rappelons qu'ici Λ est le réseau engendré par les vecteurs colonnes de la matrice des périodes $\Omega = (I, Z)$, $Z = Z^\top$, $Im\ Z > 0$, de X (ou ce qui revient au même de $Jac(X)$). La variété jacobienne $Jac(X)$ est une variété abélienne de dimension g et la polarisation sur cette variété est principale avec donc $\omega = \sum_{\alpha=1}^g dx_\alpha \wedge dx_{n+\alpha}$.*

Nous avons déjà signalé que le fibré en droites associé à un diviseur sur une variété abélienne irréductible est toujours ample. En outre, le théorème de Lefschetz démontré précédemment affirme donc que si un fibré en droites

$\mathcal{L}$ est ample sur une variété abélienne, alors $\mathcal{L}^k$ est très ample pour $k \geq 3$. Par ailleurs, pour le cas d'une surface abélienne irréductible T^2 de type (δ_1, δ_2), un théorème de Ramanan [30] affirme que si $\mathcal{D}$ est un diviseur ample sur T^2 alors $\mathcal{D}$ est très ample si l'une des conditions suivantes est satisfaite : (i) $\delta_1 = 1$, $\delta_2 \geq 5$. (ii) $\delta_1 = 2$, $\delta_2 \geq 4$. (iii) $\delta_1 \geq 1$.

Nous verrons dans la section suivante lorsque nous abordons la notion de plongement projectivement normal, un résultat du à Koizumi et Mumford et dont le théorème de Lefschetz en est une conséquence.

Remarque 1 *Lors de l'étude de certaines surfaces abéliennes, il est parfois indispensable de connaître le nombre de sections paires et impaires d'un fibré en droites. Nous allons donner explicitemnt deux formules qui permettent de calculer le nombre de ces sections. Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur une surface abélienne T^2 de type (δ_1, δ_2). On suppose que $\mathcal{L}$ est symmétrique, i.e., $\sigma^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ où σ désigne l'involution " $-$ " sur T^2. L'involution σ apparaît dans $\mathcal{L}$ comme une involution $\widetilde{\sigma}$ agissant de deux manières différentes (selon le signe) et dès lors pour chaque section (fonction theta) $s \in H^0(T^2, \mathcal{L})$, on a $\widetilde{\sigma}s = \pm s$. Rappelons qu'une section $s \in H^0(T^2, \mathcal{L})$ est dite paire (resp. impaire) si $\widetilde{\sigma}s = +s$ (resp.$\widetilde{\sigma}s = -s$). Sous $\widetilde{\sigma}$ l'espace vectoriel $H^0(T^2, \mathcal{L})$ se décompose en deux sous espaces :*

$$H^0(T^2, \mathcal{L}) = H^0(T^2, \mathcal{L})^{paire} \oplus H^0(T^2, \mathcal{L})^{impaire},$$

où $H^0(T^2, \mathcal{L})^{paire}$ contient toutes les sections paires et $\mathcal{H}^0(T^2, \mathcal{L})^{impaire}$ toutes les sections impaires. En utilisant la formule d'inversion [20, p.331], on montre que

$$\dim H^0(T^2, \mathcal{L})^{paire} = \begin{cases} \frac{\delta_1\delta_2}{2} + 2\left(1 + [\frac{\delta_2}{2}] - \frac{\delta_2}{2}\right) & pour \quad \delta_1 \quad paire \\ \\ \frac{\delta_1\delta_2}{2} + \left(1 + [\frac{\delta_2}{2}] - \frac{\delta_2}{2}\right) & pour \quad \delta_1 \quad impaire \end{cases}$$

et

$$\dim H^0(T^2, \mathcal{L})^{odd} = \begin{cases} \frac{\delta_1\delta_2}{2} - 2\left(1 + [\frac{\delta_2}{2}] - \frac{\delta_2}{2}\right) & pour \quad \delta_1 \quad paire \\ \\ \frac{\delta_1\delta_2}{2} - \left(1 + [\frac{\delta_2}{2}] - \frac{\delta_2}{2}\right) & pour \quad \delta_1 \quad impaire \end{cases}$$

6 Variétés abéliennes duales, variétés de Prym et plongement projectivement normal

Soient M une variété abélienne et $Pic(M)$ le groupe de Picard de M, i.e., le groupe des diviseurs de M à équivalence linéaire près, ou encore, le groupe des faisceaux inversibles à isomorphisme près. Si pour tout $a \in M$,

$$\tau_a : M \longrightarrow M, \quad z \longmapsto z + a,$$

est l'opérateur de translation par a sur M, alors pour tout fibré en droites $\mathcal{L}$ sur M, le fibré en droites $\mathcal{L}^{-1} \otimes \tau_a^* \mathcal{L}$ est algébriquement trivial et l'application

$$\varphi_{\mathcal{L}} : M \longrightarrow Pic(M), \quad a \longmapsto \mathcal{L}^{-1} \otimes \tau_a^* \mathcal{L},$$

est un morphisme de groupe (en vertu du théorème du carré qui dit que :

$$\mathcal{L} \otimes \tau_{a+b}^* \mathcal{L} \simeq \tau_a^* \mathcal{L} \otimes \tau_b^* \mathcal{L},$$

pour tout $a, b \in M$) car $\mathcal{L} \otimes \tau_a^* \mathcal{L} \otimes \tau_b^* \mathcal{L} \otimes \tau_{a+b}^* \mathcal{L}$ est trivial. On définit

$$Pic^0(M) = \{\mathcal{L} \in Pic(M) : \tau_a^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}, a \in M\},$$

i.e., le sous-groupe de $Pic(M)$ formé des classes de diviseurs invariants par translation, ou encore, c'est le sous-groupe de $Pic(M)$ constitué des classes d'isomorphie des fibrés algébriquement équivalents au fibré trivial. Dans le cas particulier où M est une courbe, alors $Pic^0(M)$ est le groupe des diviseurs de degré 0. Dans le cas général, ceci n'est plus vrai et il s'agit comme on vient de le voir de groupes des diviseurs algébriquement équivalents à zéro. Considérons la suite longue de cohomologie

$$\cdots \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}_M) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{c_1} H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathcal{O}_M) \rightarrow \cdots,$$

avec c_1 est la classe de Chern. On sait qu'à tout diviseur $\mathcal{D}$ sur M avec $c_1(\mathcal{D}) = [\omega]$ correspond un fibré en droites positive $\mathcal{L} \in H^1(M, \mathcal{O}_M^*)$, tel que :

$$c_1(\mathcal{L}) = [\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Dès lors, à une variété abélienne M est associée une variété abélienne duale de M que l'on note $M^\vee$ ou encore $Pic^0(M)$. Plus précisement, on a

$$M^\vee \equiv Pic^0(M) = H^1(M, \mathcal{O}_M) \ / \ H^1(M, \mathbb{Z}) \simeq H^1(M, \mathcal{O}_M^*),$$

i.e., le groupe des fibrés en droites holomorphes sur M dont la classe de Chern est nulle. Dans la définition de $Pic^0(M)$ ci-dessus, le fait que $\tau_a^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$, $a \in M$, signifie que $\varphi_{\mathcal{L}}$ est trivial ce qui entraine que $[\mathcal{L}] \in Pic^0(M)$ est réciproquement.

Soient M et N deux variétés abéliennes. On dit que $f : M \longrightarrow N$ est une isogénie si f est un morphisme surjectif et de noyau fini.

Exemple 9 *L'application*

$$k_M : M \longrightarrow M, \quad a \longmapsto ka = a + ... + a, \quad k \in \mathbb{N}$$

détermine une isogénie. S'il existe une isogénie $f : M \longrightarrow N$*, alors il existe aussi une isogénie* $g : N \longrightarrow M$ *avec* $fg = k_N$ *et* $gf = k_M$*.*

Proposition 11 *Soit* $f : M \longrightarrow N$*, un morphisme de variétés abéliennes* M *et* N*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) f *est une isogénie.*
(ii) $\dim M = \dim N$ *et* f *est surjective.*
(iii) $\dim M = \dim N$ *et* $\ker f$ *est fini.*

Démonstration : Rappelons que la dimension de la fibre $f^{-1}(y)$, $y \in N$ s'exprime en fonction des dimensions de M et N à l'aide de la formule :

$$\dim f^{-1}(y) = \dim M - \dim N, \quad \forall y \in N,$$

(en vertu du théorème sur la dimension des fibres [9, 27]). Montrons tout d'abord que $(i) \Longrightarrow (ii)$. On a f est surjectif et $\dim M - \dim N = \dim \ker f = 0$. Pour l'implication $(ii) \Longrightarrow (iii)$, on a $\dim M = \dim N$ et comme f est surjective, alors $\dim \ker f = 0$ et donc $\ker f$ est fini. Montrons enfin que : $(iii) \Longrightarrow (i)$. Notons que $f(M)$ est irréductible puisque l'image continue d'un ensemble irréductible est encore irréductible. Comme $\dim f(M) = \dim M = \dim N$, on en déduit que : $f(M) = N$ ce qui achève la démonstration. $\square$

En général M et $M^\vee$ ne sont pas isomorphes. Mais on montre que M et $M^\vee$ sont isogènes. Si (Δ_δ, Z), (avec $Z^\top = Z$, $\mathrm{Im} Z > 0$, $\delta_\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\delta_\alpha | \delta_{\alpha+1}$) est la matrice des périodes de la variété abélienne M, alors celle de la variété abélienne duale $M^\vee$ est $\left(\delta_n \Delta_\delta^{-1},\ \delta_n \Delta_\delta^{-1} Z \Delta_\delta^{-1}\right)$ avec

$$\Delta_\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix}.$$

Signalons que dans le cas d'une variété jacobienne $Jac(X)$ et sa variété duale $Jac^\vee(X)$ où X est une surface de Riemann compacte, alors ces deux variétés sont non seulement isogènes mais isomorphes.

Nous avons déjà défini ce qu'est une polarisation sur une variété abélienne M. C'est une classe d'équivalence algébrique de fibrés en droites $\mathcal{L}$ amples sur M. Autrement dit, une polarisation de M est une isogénie $\varphi : M \longrightarrow M^\vee$ qui s'écrit sous la forme

$$\varphi_{\mathcal{L}} : M \longrightarrow M^\vee, \quad a \longmapsto \mathcal{L}^{-1} \otimes \tau_a^* \mathcal{L},$$

où τ_a est la translation par a. Dans ce cas, les fibrés en droites $\mathcal{L}'$ tel que : $\varphi = \varphi_{\mathcal{L}'}$ ne sont autres que les translatés $\tau_a^* \mathcal{L}$, $a \in M$. Les classes de ces fibrés dans $Pic(M)$ forment un translaté de $M^\vee$ et l'entier positif $\dim \mathcal{L} = \dim \tau_a^* \mathcal{L}$ s'appelle le degré de la polarisation φ. Ce degré peut-être déterminé à l'aide du théorème 6 et en plus $H^j(M, \mathcal{L}) = 0$ pour tout $j \geq 1$. Les variétés M et $M^\vee$ ont même dimension et

$$\deg \mathcal{L} = (\dim M)! \dim H^0(M, \mathcal{L}) = (\dim M^\vee)! \dim H^0(M, \mathcal{L}).$$

Si la polarisation $\varphi = \varphi_{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme ou de degré 1 ou encore $\dim \mathcal{L} = 1$, alors on obtient une polarisation principale.

Dans [18], nous avons consacré une partie considérable à l'étude explicite d'un aspect important de la géométrie analytique algébrique complexe à travers la théorie des tores complexes et des variétés de Prym. Celles-ci apparaissent comme sous-variétés de certaines variétés jacobiennes et rentrent dans une classe générale de variétés abéliennes. La théorie des variétés de Prym joue un rôle crucial dans plusieurs recherches actuelles (problème de Schottky [32], systèmes intégrables,...), leur géométrie se révèle très riche et un des intérêts d'avoir une description explicite des variétés de Prym est la possibilité de les appliquer à la théorie moderne des systèmes dynamiques algébriquement intégrables [1, 2, 8, 15, 17, 18]. On considère deux courbes algébriques complexes lisses $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_0$ et une involution σ sur $\mathcal{C}$ échangeant les feuillets d'un revêtement $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_0$ double ramifié le long de $\mathcal{C}_0$ et tel que φ identifie $\mathcal{C}_0$ au quotient $\mathcal{C}/\sigma$. L'involution σ induit une involution sur la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$ et on montre que modulo un sous-groupe discret, la variété $Jac(\mathcal{C})$ se décompose en deux parties : une partie paire qui est $Jac(\mathcal{C}_0)$ et une partie impaire qui n'est autre que la variété de Prym $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$. Les matrices des périodes associées à $Jac(\mathcal{C}_0)$, $Jac(\mathcal{C})$, $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ ainsi qu'au dual $Prym^{\vee}(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ sont données explicitement ci-dessous. La polarisation principale de la variété $Jac(\mathcal{C})$ induit sur la variété $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$, le double d'une polarisation principale. Notons aussi qu'en genre 2, principalement polarisé équivaut à hyperelliptique ce qui montre que toute surface abélienne est isogène à une jacobienne hyperelliptique.

Théorème 12 *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_0$ deux courbes algébriques complexes lisses,*

$$\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_0,$$

un revêtement double étale et

$$\sigma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C},$$

l'involution échangeant les feuillets du revêtement φ tel que celui-ci identifie $\mathcal{C}_0$ au quotient $\mathcal{C}/\sigma$. On note encore σ l'automorphisme induit sur la variété jacobienne $Jac\,(\mathcal{C})$. Alors modulo un sous-groupe discret, la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$ se décompose en deux parties : une partie paire $Jac\,(\mathcal{C}_0)$ et une partie impaire notée $Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ avec

$$Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) = \left(H^0\left(\mathcal{C}, \Omega^1_{\mathcal{C}}\right)^-\right)^{\vee} / H_1\left(\mathcal{C}, \mathbb{Z}\right)^-,$$

où $\Omega^1_{\mathcal{C}}$ est le faisceau des 1-formes différentielles holomorphes sur $\mathcal{C}$, l'exposant $-$ désigne la partie fixe sous $-\sigma$ et $\vee$ le dual. Plus précisément, on a

$$Jac(\mathcal{C}) = Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) \oplus Jac\left(\mathcal{C}_0\right),$$

avec

$$\dim Jac\,(\mathcal{C}_0) = g_0 = genre\ de\ \mathcal{C}_0,$$

$$\dim Jac\,(\mathcal{C}) = g = 2g_0 + n - 1 = genre\ de\ \mathcal{C},$$

$$\dim Prym(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0) = g - g_0 = g_0 + n + 1,$$

où $2n$ *désigne le nombre de points de branchement. En outre si*

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F \\ G & H & I & J & K & L \end{pmatrix},$$

est la matrice des périodes de la variété jacobienne $Jac(\mathcal{C})$ *où* $A, \ldots, L$ *désignent les matrices en bloc suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} \int_{a_1} \omega_1 & \ldots & \int_{a_{g_0}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_1} \omega_{g_0+n-1} & \ldots & \int_{a_{g_0}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \int_{a_{g_0+1}} \omega_1 & \ldots & \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_{g_0+1}} \omega_{g_0+n-1} & \ldots & \int_{a_{g_0+n-1}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \int_{a_{g_0+n}} \omega_1 & \ldots & \int_{a_g} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_{g_0+n}} \omega_{g_0+n-1} & \ldots & \int_{a_g} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \int_{b_1} \omega_1 & \ldots & \int_{b_{g_0}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{b_1} \omega_{g_0+n-1} & \ldots & \int_{b_{g_0}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} \int_{b_{g_0+1}} \omega_1 & \ldots & \int_{b_{g_0+n-1}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{b_{g_0+1}} \omega_{g_0+n-1} & \ldots & \int_{b_{g_0+n-1}} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} \int_{b_{g_0+n}} \omega_1 & \ldots & \int_{b_g} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{b_{g_0+n}} \omega_{g_0+n-1} & \ldots & \int_{b_g} \omega_{g_0+n-1} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \int_{a_1} \omega_{g_0+n} & \ldots & \int_{a_{g_0}} \omega_{g_0+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{a_1} \omega_g & \ldots & \int_{a_{g_0}} \omega_g \end{pmatrix},$$

$$H=\begin{pmatrix}\int_{a_{g_0+1}}\omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{a_{g_0+n-1}}\omega_{g_0+n}\\ \vdots & & \vdots\\ \int_{a_{g_0+1}}\omega_{g} & \cdots & \int_{a_{g_0+n-1}}\omega_{g}\end{pmatrix},$$

$$I=\begin{pmatrix}\int_{a_{g_0+n}}\omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{a_{g}}\omega_{g_0+n}\\ \vdots & & \vdots\\ \int_{a_{g_0+n}}\omega_{g} & \cdots & \int_{a_{g}}\omega_{g}\end{pmatrix},$$

$$J=\begin{pmatrix}\int_{b_1}\omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{b_{g_0}}\omega_{g_0+n}\\ \vdots & & \vdots\\ \int_{b_1}\omega_{g} & \cdots & \int_{b_{g_0}}\omega_{g}\end{pmatrix},$$

$$K=\begin{pmatrix}\int_{b_{g_0+1}}\omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{b_{g_0+n-1}}\omega_{g_0+n}\\ \vdots & & \vdots\\ \int_{b_{g_0+1}}\omega_{g} & \cdots & \int_{b_{g_0+n-1}}\omega_{g}\end{pmatrix},$$

$$L=\begin{pmatrix}\int_{b_{g_0+n}}\omega_{g_0+n} & \cdots & \int_{b_{g}}\omega_{g_0+n}\\ \vdots & & \vdots\\ \int_{b_{g_0+n}}\omega_{g} & \cdots & \int_{b_{g}}\omega_{g}\end{pmatrix},$$

alors les matrices des périodes de $Jac\,(\mathcal{C}_0)$ *, de* $Prym\,(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ *et du dual* $Prym^{\vee}\,(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ *de* $Prym\,(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ *, sont respectivement*

$$\Delta=(G\quad H),$$

$$\Gamma=(2A\quad B\quad 2D\quad E),$$

et

$$\Gamma^{\vee}=(A\quad B\quad D\quad E).$$

Remarque 2 *Soit* $\mathcal{L}$ *un fibré en droites sur une variété abélienne* T^n*. On suppose que* $\mathcal{L}$ *définit une polarisation du type* $(\delta_1,...,\delta_n)$ *sur* T^n*. Rappelons que la suite exacte exponentielle*

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow\mathcal{O}_{T^n}\overset{\exp}{\longrightarrow}\mathcal{O}^*_{T^n}\longrightarrow 0,$$

définit un morphisme c_1 *(première classe de Chern), qui associe à tout fibré en droites une classe de cohomologie dans* $H^2(M,\mathbb{Z})$*. Alors, la classe de Chern du fibré* $\mathcal{L}^k$ *est reliée à celle de* $\mathcal{L}$ *par la relation* $c_1(\mathcal{L}^k)=kc_1(\mathcal{L})$*. Dès lors,* $\mathcal{L}^k$ *définit une polarisation du type* $(k\delta_1,...,k\delta_n)$ *et d'après le théorème 10, on a*

$$\dim H^0(T^n,\mathcal{O}(\mathcal{L}^k))=k^n\prod_{\alpha=1}^{n}\delta_\alpha.$$

Soit $\mathcal{D}$ un diviseur très ample et considérons l'application suivante :

$$\mathcal{L}(D)^{\otimes k} \longrightarrow \mathcal{L}(kD).$$

Si cette application est surjective, alors on dit qu'un tel diviseur est projectivement normal, i.e., toute fonction de $\mathcal{L}(kD)$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de produit $k^{ème}$ des fonctions de $\mathcal{L}(D)$. D'après un critère de Koizumi [13] et Mumford [24], le plongement sera projectivement normal si et seulement s'il existe un diviseur ample D_0 tel que : $D = kD_0$, $k \geq 3$. On dira aussi qu'un plongement d'une variété abélienne M dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est projectivement normal si l'image de M dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est une variété projectivement normale ; i.e., si son anneau des coordonnées homogènes est intégralement clos.

Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites ample sur une variété abélienne M de dimension g et de type $(\delta_1, ..., \delta_g)$. L'application

$$\psi_{\mathcal{L}^k} : M \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C}),$$

associée au fibré $\mathcal{L}^k \equiv \mathcal{L}^{\otimes k}$, détermine un plongement projectivement normal pour tout $k \geq 3$ et aussi pour $k = 2$ lorsque les points de $K(\mathcal{L}^2))$ ne sont pas des points de base de $\mathcal{L}$ où le groupe

$$K(\mathcal{L}) = \ker f \simeq (\mathbb{Z}/\delta_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/\delta_g\mathbb{Z})^2,$$

est le noyau de l'isogénie

$$f : M \longrightarrow M^\vee = Pic^0(M), \quad p \longmapsto \tau_p^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1},$$

avec

$$\tau_p^* M \longrightarrow M, \quad x \longmapsto x + p,$$

la translation par p. Dans le cas où M est une surface abélienne, l'application rationnelle

$$\psi_{\mathcal{L}} : M \longrightarrow \mathbb{P}^{\delta_1\delta_2 - 1}(\mathbb{C}),$$

est un plongement projectivement normal si les conditions suivantes sont satisfaites : (i) [13, 3] Lorsque $\delta_1 \geq 3$, alors $\psi_{\mathcal{L}}$ est un plongement projectivement normal. (ii) [29, 3] Lorsque $\delta_1 = 2$, alors $\psi_{\mathcal{L}}$ est un plongement projectivement normal si et seulement si les points de $K(\mathcal{L}^2)$ ne sont pas des points de base de $\mathcal{L}$. (iii) [14, 6] Lorsque $\mathcal{L}$ est primitive, i.e., $(\delta_1, \delta_2) = (1, \delta_2)$ et $\delta_2 \geq 7$, alors $\psi_{\mathcal{L}}$ est un plongement projectivement normal si et seulement si $\mathcal{L}$ est très ample. (iv) [11] Lorsque $\mathcal{L}$ est primitive, $\delta_2 \geq 7$ et M générique, alors $\psi_{\mathcal{L}}$ est un plongement projectivement normal. Une condition nécessaire pour que $\psi_{\mathcal{L}}$ soit un plongement projectivement normal est que $\mathcal{L}$ est très ample. Il est à noter que lorsque $\delta_1\delta_2 \leq 4$, $\mathcal{L}$ n'est même pas très ample. De même, si $\delta_1\delta_2 \leq 7$, alors $\dim \mathrm{Sym}^2 H^2(M, \mathcal{L}) < \dim \mathrm{Sym}\ H^0(M, \mathcal{L}^2)$ et donc le plongement en question ne peut jamais être projectivement normal.

Références

[1] Adler, M., van Moerbeke, P., *The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis*, Invent. Math., 97 (1989), 3-51.

[2] Adler, M., van Moerbeke, P., Vanhaecke, P., *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, A series of modern surveys in mathematics, Volume 47, Springer-Verlag, 2004.

[3] Birkenhake, CH. and Lange, H., *Complex abelian varieties*, Springer-Verlag, 1992.

[4] Debarre, O., *Tores et variétés abéliennes complexes*, Cours spécialisés 6, Société Mathématique de France, EDP Sciences, 1999.

[5] Debarre, O., *Introduction à la géométrie algébrique*, Cours de DEA, 1999/2000, et M2, 2007/2008.

[6] Garcia, L.F., *Projective normality of abelian surfaces of type (1,2d)*, arXiv : math. AG/0306058 v1(2003), 1-14.

[7] Griffiths, P.A., Harris,J., *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience 1978.

[8] Haine, L., *Geodesic flow on $SO(4)$ and Abelian surfaces*, Math. Ann., 263 (1983), 435-472.

[9] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[10] Huybrechts, D., *Complex geometry*, Springer, 2005.

[11] Iyer, J.N., *Projective normality of abelian surfaces given by primitive bundles*, Manuscr. Math., 98 (1999), 139-153.

[12] Kodaira, K., *On Kähler varieties of restricted type (an intrinstic characterisation of algebraic varieties)*, Ann. of Math. 60 (1954), 28-48.

[13] Koizumi, S., *Theta relations and projective normality of abelian varieties*, Am. J. of Math., 98 (1976), 865-889.

[14] Lazarsfeld, R., *Projectivité normale des surfaces abéliennes*, Rédigé par Debarre, O. *Prépublication* 14, Europroj-C.I.M.P.A., Nice (1990).

[15] Lesfari, A., *Abelian surfaces and Kowalewski's top*, Ann. Scient. École Norm. Sup., Paris, 4^e série, t.21 (1988), 193-223.

[16] Lesfari, A., *Le système différentiel de Hénon-Heiles et les variétés Prym*, Pacific J. Math., Vol.212, 1 (2003), 125-132.

[17] Lesfari, A., *Abelian varieties, surfaces of general type and integrable systems*, Beiträge Algebra Geom., Vol.48, 1 (2007), 95-114.

[18] Lesfari, A., *Prym varieties and algebraic completely integrable systems*, J. Geom. Phys., 58 (2008), 1063-1079.

[19] Moishezon, B.G., *On n-dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions*, Amer. Math. Soc. Transl., 63 (1967), 51-177.

[20] Mumford, D., *On the equations defining abelian varieties I*, Invent. Math., 1 (1966), 287-354.

[21] Mumford, D., *On the equations defining abelian varieties II*, Invent. Math., 3 (1967), 75-135.

[22] Mumford, D., *On the equations defining abelian varieties III*, Invent. Math., 3 (1967), 215-244.

[23] Mumford, D., *Prym varieties I*, in Contributions to Analysis (L.V. Ahlfors, I. Kra, B. Maskit, L. Niremberg, eds.), Academic Press, New-York, 325-350, 1974.

[24] Mumford, D., *Varieties defined by quadratic equations*, Questioni sulle varieta algebraiche. Corsi dal C.I.M.E. Edizioni Cremonese Roma, 1969.

[25] Mumford, D., *Abelian varieties*, Oxford University press, 1974.

[26] Mumford, D., *Curves and their Jacobians*, Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1975.

[27] Mumford, D., *Algebraic geometry I : complex projective varieties*, Springer-Verlag, 1975.

[28] Mumford, D., *Tata lectures on theta II*, Progress in Math., Birkhaüser, Boston, 1982.

[29] Ohbuchi, A., *A note on the projective normality of special line bundles on abelian varieties*, Tsukuba J. Math., 12, No.2 (1988), 341-352.

[30] Ramanan, S., *Ample divisors on abelian surfaces*, Proc. London Math. Soc., (3), 5(2), (1980) 609-629.

[31] Robert, A., *Introduction aux variétés abéliennes complexes*, Enseign. Math., (2), Sér.28 (1982), 281-293.

[32] Schottky, F., *Zur theorie der Abelschen Funktionen von vier Variabeln*, J. Reine Angew. Math., 102 (1888), 304-352.

[33] Siegel, C.L., *Meromorphic funktionen anf kompakten mannigfaltigkeiten*, Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Math.-Phys. Klasse, 4 (1955), 71-77.

[34] Weil, A., *Variétés kählériennes*, Hermann, Paris, 1971.