Université Chouaib Doukkali *Année Universitaire 2012-13*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida
(Prof. Lesfari, lesfariahmed@yahoo.fr, http://lesfari.com)

Equations différentielles **Devoir** **SMA5**

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle quelconque. On considère le systèmes différentiel linéaire suivant :

$$y' = A(t)y + b(t).$$

où $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $a_{ij}, b_j : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

1) Démontrer que si A et b sont continues sur I, alors le système linéaire non-homogène ci-dessus possède pour tout $t_0 \in I$, une solution maximale unique y vérifiant la condition initiale : $y(t_0) = y_0$.

2) Démontrer que l'ensemble des solutions du système linéaire homogène

$$y' = A(t)y.$$

est un espace vectoriel de dimension n.

D'après la question 1), on sait que pour toute donnée de Cauchy $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique définie sur tout I. On notera cette solution $y(t; t_0, y_0)$. L'application qui à y solution maximale associe $y(t_0)$, est un isomorphisme linéaire. Dès lors, l'application $y_0 \longmapsto y(t; t_0, y_0)$ étant linéaire, on peut la représenter dans une base par une matrice $R(t, t_0)$ d'ordre n, dont les éléments sont fonctions de t et t_0. Rappelons que la résolvante est l'application $R : I \times I \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$, définie par

$$\forall t, s \in I, \quad \frac{dR}{dt}(t, s) = A(t)R(t, s), \quad R(s, s) = Id.$$

Autrement dit, la matrice résolvante $R(t, t_0)$ du système est définie par la relation

$$y(t; t_0, y_0) = R(t, t_0).y_0, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}^n$$

3) Démontrer les propriétés suivantes :

$$R(t, s).R(s, r) = R(t, r), \qquad R^{-1}(t, s) = R(s, t).$$

4) On appelle système fondamental de solutions du système linéaire homogène, toute base (v_j) de l'espace vectoriel des solutions de ce système. Montrer qu'un ensemble $(v_1, ..., v_n)$ de n solutions du système linéaire homogène est un système fondamental si et seulement si $\forall t \in I$, $(v_1(t), ..., v_n(t))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ ou encore si et seulement si pour un $t_0 \in I$, $(v_1(t_0), ..., v_n(t_0))$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

5) Une matrice fondamentale est une matrice $V(t)$ dont les colonnes sont les vecteurs $(v_1(t), ..., v_n(t))$ d'une base de l'espace des solutions du système linéaire homogène. Montrer que :

$$R(t,s) = V(t).V^{-1}(s).$$

6) Etablir l'équation de Jacobi-Liouville :

$$\det R(t;t_0) = e^{\int_{t_0}^t trA(\tau)d\tau},$$

ou pour toute matrice fondamentale $V(t)$,

$$\det V(t) = \det V(t_0) e^{\int_{t_0}^t trA(\tau)d\tau}.$$

Ici $trA(\tau)$ désigne la trace de la matrice $A(\tau)$.

7) Supposons que $A(t)$ et $A(s)$ commutent $\forall t, s \in I$. Montrer que

$$R(t;t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau}.$$

8) Montrer que la solution générale du système linéaire non-homogène est la somme de la solution générale du système homogène et d'une solution particulière du système linéaire non-homogène. Interpréter ce résultat.

9) Montrer que la solution du système :

$$y' = A(t)y + b(t),$$

satisfaisant $y(t_0) = y_0$ est donnée par

$$y(t) = R(t;t_0)y_0 + \int_{t_0}^t R(t;\tau)b(\tau)d\tau,$$

où $R(t;\tau)$ est la matrice résolvante du sytème homogène.

10) On considère le systèmes différentiel suivant :

$$\begin{aligned}(1+t^2)y_1' - ty_1 - y_2 &= 2t^2 - 1,\\ (1+t^2)y_2' + y_1 - ty_2 &= 3t.\end{aligned}$$

a) Montrer que $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, sont deux solutions linéairement indépendantes du système homogène associé au système différentiel ci-dessus.

b) Chercher une solution particulière et en déduire la solution générale du système différentiel en question.

Solution

1) Notons que le système en question peut s'écrire sous la forme

$$y' = f(t,y),$$

où $f(t,y) = A(t)y + b(t)$. (Rappelons le résultat du cours suivant : soit

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t,y) \longmapsto f(t,y),$$

une fonction continue en (t,y) et localement lipschitzienne en y sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy : $y' = f(t,y)$, $y(t_0) = y_0$. Si les bouts droits et gauches existent, alors ils sont inclus dans le bord de Ω). Ici f est continue sur $\Omega = I \times \mathbb{R}^n$. On montre aisément que f est localement lipschitzienne en y. Soit $[a,b] \subset I$ un compact. Comme les fonctions $a_{ij}(t)$, $t \in [a,b]$, sont bornées en module par un même nombre α, alors pour tout $y = (y_1, ..., y_n)^\top$, on a

$$\|A(t)y\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}(t)y_j\| \leq \alpha \sum_{j=1}^{n} \|y_j\| \leq \alpha n \max_j |y_j\| \leq \alpha n \|y\|.$$

Dès lors, pour tous y_1 et y_2 dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| = \|A(t)(y_1 - y_2)\| \leq \alpha n \|y_1 - y_2\|, \quad t \in [a,b]$$

et donc f est localement lipschitzienne en y. D'après le résultat ci-dessus, il existe une unique solution maximale passant par (t_0, y_0). Montrons maintenant que la solution y existe dans tout l'intervalle I. Pour démontrer cela, supposons d'abord que $I = [t_1, t_2]$ est un intervalle compact. D'après le théorème d'existence et d'unicité local (voir cours), pour tout cylindre $S = ([t_0 - l, t_0 + l] \cap I) \times \overline{B}(y_0, r)$ tel que : $l \leq \frac{r}{M}$ (où $M = \sup_{(t,y)\in S} \|f(t,y)\|$), la solution existe pour $t \in [t_0 - l, t_0 + l] \cap I$. Comme I est compact, la norme $\|A(t)\|$ est une fonction continue en $t \in I$ et admet une borne supérieure. Dès lors, pour tout r, il existe des nombres $\alpha = \sup_{t\in I} \|A(t)\|$, $\beta = \sup_{t\in I} \|b(t)\|$ tels que sur I, on ait $\|A(t)\| \leq \alpha$, $\|b(t)\| \leq \beta$ et sur S,

$$\|f(t,y)\| = \|A(t)y + b(t)\| \leq \alpha n r + \beta,$$

$$M = \sup_{(t,y)\in S} \|f(t,y)\| \leq \alpha n r + \beta, \qquad \frac{r}{M} \geq \frac{r}{\alpha n r + \beta}.$$

Rappelons que $l \leq \frac{r}{M}$ et comme r est arbitrairement grand, on peut donc choisir

$$l = \lim_{r\to\infty} \frac{r}{M} \geq \frac{1}{\alpha n}.$$

Il existe donc une solution autour de tout point dans un intervalle de longueur fixée. Il suffit dès lors de coller ensemble un nombre fini de ces solutions afin d'obtenir une solution sur I. Soit maintenant $I = [t_1, \infty[$ et supposons que la solution n'existe pas sur tout I. Donc il existe un t_3 en lequel la solution n'existe pas. Prenons $t_2 > t_3$, on a sur $[t_1, t_2]$ une équation linéaire dont la solution n'est pas définie partout ce qui est absurde. De même si $I = [t_1, t_2]$ et si la solution n'existe que sur $[t_1, t_3]$ avec $t_3 < t_2$ alors en choisissant un t_4 tel que : $t_3 < t_4 < t_2$, on aura une équation linéaire sur $[t_1, t_4]$ dont la solution n'existe pas partout.

2) Montrons d'abord que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel que l'on note E. Soient $y_1(t)$ et $y_2(t)$ deux solutions du système en question. On a, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t),$$

et

$$\begin{aligned}(\alpha y_1 + \beta y_2)'(t) &= \alpha y_1'(t) + \beta y_2'(t),\\ &= \alpha A(t) y_1(t) + \beta A(t) y_2(t),\\ &= A(t)(\alpha y_1 + \beta y_2)(t).\end{aligned}$$

Montrons que l'espace E est de dimension n. D'après 1), on sait que pour toute donnée de Cauchy $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique définie sur tout I. On notera cette solution $y(t; t_0, y_0)$. Soit $t_0 \in I$, fixé. D'après le théorème d'existence et d'unicité de la solution, l'application

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow E, \quad y_0 \longmapsto y(t; t_0, y_0),$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En effet, cette application est linéaire (pour chaque t et t_0) car si y_0 et z_0 sont deux données initiales, alors la fonction $\alpha y(t; t_0, y_0) + \beta y(t; t_0, z_0)$ est une solution du système homogène et au point t_0 sa valeur est $\alpha y_0 + \beta z_0$. L'unicité de la solution de ce système montre que l'on a

$$y(t; t_0, \alpha y_0 + \beta z_0) = \alpha y(t; t_0, y_0) + \beta y(t; t_0, z_0).$$

En outre, l'application ci-dessus est bijective en vertu du théorème d'existence et d'unicité de la solution. Plus précisément, elle est surjective d'après le théorème d'existence car toute solution y dans E s'écrit $y(t; t_0, y_0)$ avec $y_0 = y(0)$ et elle est est bijective car

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t; t_0, y_0) = 0 \Longrightarrow y_0 = 0.$$

Par suite, $\dim E = n$. (Remarque : E est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$).

3) La formule $R(t,s).R(s,r) = R(t,r)$ découle du théorème d'unicité. En effet, soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_1(t) = R(t,r)y_0$ la solution du problème de Cauchy : $y_2' = A(t)y_2$, $y_2(s) = y_1(s)$ est y_1. Notons que

$$y_2(t) = R(t,s)y_1(s) = R(t,s).(R(s,r)y_0).$$

Dès lors, $y_1(s) = R(s,r)y_0$ et

$$y_2(s) = R(s,s).(R(s,r)y_0) = R(s,r)y_0,$$

car $R(s,s) = Id$. On a donc $y_1(s) = y_2(s)$, d'où y_1 est identiquement égal à y_2 et la formule en question en découle quel que soit y_0. Concernant la formule $R^{-1}(t,s) = R(s,t)$, il suffit d'utiliser la propriété précédente. En effet, on a

$$R(t,s).R(s,t) = R(t,t) = Id.$$

ce qui montre que $R(t,s)$ est inversible et la formule ci-dessus en découle.

4) On a

$$v_j(t) = R(t,t_0).v_j(t_0).$$

Or $R(t,t_0)$ est inversible (d'après 3)), donc les vecteurs $v_j(t)$ sont linéairement indépendants si et seulement si les $v_j(t_0)$ le sont. En outre, on a montré (question 2)) qu'il y a isomorphisme linéaire entre l'espace des solutions et celui des conditions initiales en t_0.

5) On a

$$\begin{aligned} V(t) &= (v_1(t),...,v_n(t)), \\ &= (R(t,s)v_1(s),...,R(t,s)v_n(s)), \\ &= R(t,s)V(s). \end{aligned}$$

Comme les colonnes de $V(t)$ sont linéairement indépendantes, alors $V(t)$ est de rang maximum et on a

$$R(t,s) = V(t).V^{-1}(s).$$

6) Soit $F(t) = \det R(t,t_0)$. Pour démontrer la formule ci-dessus, on va utiliser le lemme suivant : pour $h \longrightarrow 0$, on a

$$\det(I+hA) = 1 + h \text{ tr } A + o(h^2).$$

En effet, $\det(I+hA)$ est égal au produit des valeurs propres de $I+hA$. Ces dernières étant égales à $1+h\lambda_k$ où λ_k sont les valeurs propres de A. Dès lors,

$$\det(I+hA) = \prod_{k=1}^{n}(1+h\lambda_k) = 1 + h\sum_{k=1}^{n}\lambda_k + o(h^2).$$

Ici, on a

$$\begin{aligned} F(t+h) &= \det R(t+h,t_0), \\ &= \det(R(t+h,t_0).R^{-1}(t,t_0).R(t,t_0)), \\ &= \det R(t,t_0).\det(R(t+h,t_0).R^{-1}(t,t_0)), \\ &= F(t).\det(R(t,t_0) + hR'(t,t_0) + o(h))R^{-1}(t,t_0)), \\ &= F(t).\det(R(t,t_0) + hR'(t,t_0) + o(h))R^{-1}(t,t_0)), \\ &= F(t).\det(I + hR'(t,t_0)R^{-1}(t,t_0) + o(h)), \\ &= F(t).\det(I + hA(t)R(t,t_0)R^{-1}(t,t_0) + o(h)), \\ &= F(t).\det(I + hA(t) + o(h)), \\ &= F(t).\det(I + h \text{ tr } A(t) + o(h)), \end{aligned}$$

en vertu du lemme ci-dessus. Par conséquent,

$$F'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = F(t) \text{ tr } A(t),$$

et

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \text{ tr } A(t).$$

Donc

$$F(t) = Ce^{\int_{t_0}^{t} \text{ tr } A(\tau)d\tau}.$$

Or

$$F(t_0) = \det R(t_0, t_0) = \det Id. = 1,$$

d'où $C = 1$ et le résultat en découle. Pour l'autre formule

$$\det V(t) = \det V(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} trA(\tau)d\tau},$$

il suffit d'utiliser le fait que : $R(t, s) = V(t).V^{-1}(s)$ (question 5)).

7) Soit $M(t) = e^{\int_{t_0}^{t} \text{ tr } A(\tau)d\tau}$ et montrons que M est la solution du problème

$$M'(t) = A(t)M(t), \quad M(t_0) = I.$$

Par hypothèse, $A(t)$ et $A(s)$ commutent, c-à-d., $A(t)A(s) = A(s)A(t)$, d'où $\int_a^b A(u)du$ et $\int_c^d A(u)du$ commutent,

$$\int_a^b A(u)du. \int_c^d A(u)du = \int_c^d A(u)du. \int_a^b A(u)du = \int_{[a,b]\times[c,d]} A(u)A(v)dudv.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} M(t+h) &= e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau + \int_t^{t+h} A(\tau)d\tau}, \\ &= e^{\int_t^{t+h} A(\tau)d\tau}.e^{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau}, \\ &= e^{\int_t^{t+h} A(\tau)d\tau}.M(t). \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que

$$\int_t^{t+h} A(\tau)d\tau = hA(t) + o(h^2),$$

on obtient

$$M(t+h) = (I + hA(t) + o(h^2))M(t) = M(t) + hA(t)M(t) + o(h^2).$$

Par conséquent,

$$M'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{M(t+h) - M(t)}{h} = A(t)M(t), \quad M(t_0) = I.$$

8) Soit y_p une solution particulière du système non homogène : $y' = A(t)y + b(t)$ et soit $y = y_p + u$, sa solution générale. On a

$$y_p' = A(t)y_p + b(t),$$

et

$$y' = y_p' + u'. \tag{1}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} y' &= A(t)y + b(t), \\ &= A(t)(y_p + u) + b(t), \\ &= y_p' + A(t)u. \end{aligned} \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on obtient

$$u' = A(t)u,$$

ce qui montre que u est solution de l'équation homogène et le résultat en découle.

Interprétation : On exprime ce résultat en disant que l'espace des solutions du système non homogène $y' = A(t)u + b(t)$ est un sous espace affine de dimension n de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$, obtenu en faisant la somme de l'ensemble des solutions du système homogène $y' = A(t)y$ et d'une solution quelconque du système non homogène.

9) Soit $y(t) = R(t, t_0)y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, la solution générale du système homogène. On remplace la constante y_0 par une fonction $X(t)$ et on cherche $y = R(t, t_0)X(t)$ solution du système non homogène telle que $X(t_0) = y_0$. On a

$$y'(t) = R'(t, t_0)X(t) + R(t, t_0)X'(t) = A(t)R(t, t_0)X(t) + b(t).$$

Or $R'(t, t_0) = A(t)R(t, t_0)$, d'où $R(t, t_0)X'(t) = b(t)$ et $X'(t) = R(t_0, t)b(t)$ (car $R(t, s)$ est inversible avec $R^{-1}(t, s) = R(s, t)$, voir question 3)). Dès lors,

$$X(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0, \tau)b(\tau)d\tau.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} y(t) &= R(t, t_0)X(t), \\ &= R(t, t_0)y_0 + R(t, t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0, \tau)b(\tau)d\tau, \\ &= R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, t_0)R(t_0, \tau)b(\tau)d\tau, \\ &= R(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau)b(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

car $R(t, s)R(s, r) = R(t, r)$ (d'après la question 3)).

10) a) Si y_1 et y_2 désignent ces solutions, alors leur wronskien $\det(y_1 \quad y_2)$ est non nul.

b) Soit $y(t) = \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t)$ une solution particulière. On a

$$y'(t) = \alpha'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} + \beta'(t)\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 - 1 \\ 3t \end{pmatrix}.$$

La résolution de ce sytème est immédiate, on trouve $\alpha'(t) = -1$, $\beta'(t) = 2t$ et par conséquent $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ s'obtiennent aisément. La solution générale du système est la somme des solutions obtenues.