Université Chouaib Doukkali — *A. Lesfari*
Faculté des Sciences — lesfariahmed@yahoo.fr
Département de Mathématiques — http://lesfari.com
El Jadida

EXERCICES SUR LES DISTRIBUTIONS

Exercice 1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{D}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}$, alors $f\varphi \in \mathcal{D}$.

Exercice 3. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

une fonction de $\mathcal{D}$ et soit, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\varrho_k(x) = \frac{\varphi(kx)}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(kx)\, dx}.$$

On appelle fonction "porte" la fonction $\Pi(x)$ définie par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de la fonction $\Pi(x)$.
b) Trouver une relation simple entre $\varrho_k(x)$ et la fonction $\Pi(x)$.
c) Prouver que $\varrho_k(x) \in \mathcal{D}$ et préciser le support de $\varrho_k(x)$.
d) Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_k(x)\, dx.$$

e) Représenter sur un même graphique les fonctions ϱ_k correspondant à $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.

Exercice 4. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on pose

$$\varphi = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) + x^{n+1}\theta(x), \qquad x \in \mathbb{R}^*,$$

et

$$\varphi^{(n+1)}(0) = (n+1)!\theta(0).$$

a) Montrer que la fonction θ est continue sur $\mathbb{R}$.
b) on suppose que *supp* $\varphi \subset [-c, c]$, $c > 0$. Montrer que

$$\sup |\theta(x)| \leq A \sup_{x\in[-c,c]} \left|\varphi^{(n+1)}(x)\right|,$$

où $A > 0$, est une constante.

Exercice 5. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, on considére une application sur $\mathcal{D}$, en posant

$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{1}{k}\right) - n\varphi(0) - \varphi'(0)\, Log\ n \right\}.$$

Montrer que cette application détermine une distribution sur $\mathbb{R}$. Quel est son ordre ?

Exercice 6. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $\varepsilon > 0$, on définit une application sur $\mathcal{D}$, appelée valeur principale de Cauchy, en posant

$$\left\langle vp\ \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Montrer que cette application est une distribution et déterminer son ordre.

Exercice 7. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \{a\} \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

la fonction caractéristique de $\{a\}$ et soit f la distribution associée à cette fonction. Déterminer *supp* $f(x)$ et *supp* f. Conclusion ?

Exercice 8. Démontrer que le support de la distribution $vp\ \frac{1}{x}$ est

$$supp\ vp\ \frac{1}{x} = \mathbb{R}.$$

Exercice 9. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, on pose

$$\overset{\vee}{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Une distribution T est dite paire si

$$\left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle = \langle T, \varphi \rangle,$$

et impaire si

$$\left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle = -\langle T, \varphi \rangle.$$

a) T étant une distribution, étudier la parité des distributions U, V définies par

$$\mathcal{D} \ni \varphi \longmapsto \langle U, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle,$$

$$\mathcal{D} \ni \varphi \longmapsto \langle V, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \left\langle T, \overset{\vee}{\varphi} \right\rangle.$$

b) En déduire que toute distribution T est la somme d'une distribution paire et d'une distribution impaire.
c) Etudier la parité des distributions δ et $vp\ \dfrac{1}{x}$.

Exercice 10. Soit $G(x)$ une fonction de la variable x jouissant des propriétés suivantes :

a) Elle est nulle pour $x < -1$ et $x > 1$.

b) Elle est indéfiniment dérivable dans chacun des intervalles, $-1 < x < \xi$, $\xi < x < 1$, avec $\xi \in]-1, 1[$.

c) $G(x)$ et ses dérivées présentent des discontinuités de première espèce aux points $x = -1$, $x = \xi$, $x = 1$.

1°) Calculer au sens des distributions,

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \omega^2 G\ , \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

en fonction des dérivées usuelles de $G(x)$.
2°) Est-il possible de déterminer G et les constantes α et β pour que l'on ait

$$\frac{d^2G}{dx^2} + \omega^2 G = \delta_\xi + \alpha\delta_{-1} + \beta\delta_1, \tag{1}$$

δ_a désignant la distribution de Dirac au point a ? Montrer que, sauf si ω est de la forme $k\frac{\pi}{2}$, où k est un entier, le problème admet une solution unique. Calculer alors G ainsi que les constantes α et β.
3°) Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, une fonction inconnue, dont on sait qu'elle vérifie les relations

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \omega^2 \varphi = \Psi(x),$$

$$\varphi(-1) = L,\ \varphi(+1) = M,$$

la fonction $\Psi(x)$ et les constantes L et M étant connues. Montrer que la formule (1) permet de calculer $\varphi(\xi)$ pour tout $\xi \in]-1, 1[$, sauf pour les valeurs exceptionnelles de ω.

Exercice 11. Soit $u(x,t)$ la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,t) = \begin{cases} \alpha & \text{si } t^2 - x^2 \geq 0,\ t \geq 0, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

a) Montrer que $u(x,t)$ définit une distribution dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer son support.
b) Calculer, au sens des distributions, l'expression

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u,$$

où $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ est l'opérateur des ondes.
c) Déterminer α de façon que $u(x,t)$ soit solution de l'équation

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta,$$

où v est une constante positive et $\delta = \delta(x,t)$ la distribution de Dirac.

Exercice 12. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

l'opérateur de Cauchy-Riemann. Calculer, au sens des distributions, l'expression

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Exercice 13. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, une fonction quelconque. On considére une sphère S de centre 0, de rayon $\varphi = r$ et un volume V de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$0 < \varphi < r < a < \infty,$$

où a est choisi assez grand pour que φ et ses dérivées partielles soient nulles pour $r = a$. Désignons par n la normale (positive) à S dirigée vers l'intérieur de V, par dS un élément d'aire de S et par $\dfrac{\partial}{\partial n}$ la dérivée normale. Calculer dans $\mathbb{R}^3$, le Laplacien de la distribution f associée à la fonction

$$f(x,y,z) = \frac{1}{r}, \qquad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Indication : Montrer d'abord

$$\langle \Delta f, \varphi \rangle = \lim_{\rho \to 0} \int\int\int_{r \rangle \rho} f \Delta\varphi dxdydz,$$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \int\int_{r=\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0,$$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^2} \int\int_{r=\rho} \varphi dS = 4\pi \langle \delta, \varphi \rangle .$$

Montrer qu'en appliquant la formule de Green :

$$\int\int\int_{\rho \langle r \langle a} (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f)\, dV = \int\int_{r=\rho} \left(\varphi \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS,$$

il vient

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta.$$

<u>**Exercice**</u> **14.** On désigne par $H(x)$ la fonction échelon unité de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

et on pose

$$f(x) = H(x)\, Log\, |x| \,, \; x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que cette fonction détermine une distribution sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer au sens des distributions

$$(H(x)\, Log\; x)' .$$

c) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on pose

$$\left\langle Pf \; \frac{H(x)}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0)\, Log\varepsilon \right\}.$$

Trouver une relation simple entre $Pf \; \dfrac{H(x)}{x}$ et $(H(x)\, Log\; x)'$. L'application $Pf \; \dfrac{H(x)}{x}$ est-elle une distribution sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.
d) Etudier, au sens des distributions, l'équation

$$xT = H(x).$$

<u>**Exercice**</u> **15.** Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $\varepsilon\rangle 0$, on définit les distributions parties finies de $\frac{H}{x}$ et $\frac{H}{x^2}$ par

$$\begin{aligned}\left\langle Pf\ \frac{H}{x}, \varphi\right\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x}dx + \varphi(0)\,Log\varepsilon\right\},\\ \left\langle Pf\ \frac{H}{x^2}, \varphi\right\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^\infty \frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)\,Log\varepsilon\right\},\end{aligned}$$

où $H(x)$ est la fonction d'Heaviside nulle pour $x < 0$ et égale à 1 pour $x \geq 0$. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt & \text{si } x \geq 0,\\ 0 & \text{si } x < 0,\end{cases}$$

On sait que pour tout $x \neq 0$,

$$f''(x) + f(x) = \frac{H(x)}{x}.$$

Pour tout $\lambda > 0$, on pose

$$f_\lambda(x) = H(x)\int_0^\lambda \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt.$$

On désigne par T_λ la distribution régulière associée à la fonction f_λ et par T celle qui est associée à f.

1) Montrer que

$$\left\langle Pf\ \frac{H}{x}, \varphi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{H(x-\varepsilon)}{x} + \delta(x)\,Log\varepsilon\right\}.$$

2) Résoudre l'équation :

$$xT = Pf\ \frac{H}{x}.$$

3) Calculer

$$T''_\lambda + T_\lambda.$$

4) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx + \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x}dx = \left\langle Pf\ \frac{H}{x}, \varphi\right\rangle.$$

5) Vérifier que

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-\lambda x}}{x}dx - Log\ \lambda = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt - \int_1^\lambda \frac{e^{-t}}{t}dt.$$

6) En déduire que dans $\mathcal{D}'$,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1-e^{-\lambda x}}{x}H(x)-\delta Log\ \lambda\right)=Pf\ \frac{H}{x}+a\delta,$$

où a est une constante.
7) Déduire des questions 3) et 6)

$$T''+T=Pf\ \frac{H}{x}+a\delta+\frac{\pi}{2}\delta'.$$

8) On pose

$$c=-\int_0^\infty e^{-x}Log\ xdx.$$

Ce nombre s'appelle constante d'Euler. Montrer que $a=c$.

<u>Exercice</u> 16. Calculer la distribution

$$x^m\delta^{(n)}\ ,\qquad (m,n\in\mathbb{N})\,,$$

où $\delta^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice</u> 17. Résoudre dans $\mathcal{D}'$, l'équation

$$xT=\sum_{k=o}^{p}c_k\delta^{(k)}\ ,\qquad c_k\in\mathbb{C}.$$

<u>Exercice</u> 18. Soit l'équation

$$x^mT=0\ ,\qquad m\in\mathbb{N}.$$

a) Montrer que les distributions vérifiant cette équation s'écrivent

$$T=\sum_{k=o}^{m-1}c_k\delta^{(k)}\ ,\qquad c_k\in\mathbb{C}.$$

b) En déduire l'expression générale des distributions T qui vérifient l'équation

$$x^mT=1\ ,\qquad m\in\mathbb{N}.$$

c) Trouver toutes les distributions T vérifiant

$$\left(x^2-\alpha^2\right)T=1\ ,\qquad \alpha\in\mathbb{R}^*.$$

<u>Exercice</u> 19. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ et $c > 0$ tel que : $Supp\, \varphi \subset [-c, c]$. On définit une application T sur $\mathcal{D}$ en posant

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0)\, Log\varepsilon \right\}.$$

a) Montrer que

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^c \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \varphi(0)\, Logc.$$

b) Prouver que T est une distribution sur $\mathbb{R}$, qu'on notera

$$T = Pf \frac{H(x)}{x},$$

où $H(x)$ est la fonction d'Heaviside.
c) Déterminer l'ordre de cette didtribution ainsi que son support.
d) Calculer au sens des distributions :

$$xT' + T.$$

e) Résoudre dans $\mathcal{D}'$, l'équation différentielle :

$$xS' + S = \delta.$$

f) Calculer au sens des distributions :

$$xPf \frac{H(x)\, Logx}{x},$$

où

$$\left\langle xPf \frac{H(x)\, Logx}{x}, \varphi \right\rangle = \int_0^c \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} Logx dx + \varphi(0) \frac{Logc}{c}.$$

g) Déterminer la solution générale dans $\mathcal{D}'$ de l'équation différentielle :

$$xS' + S = Pf \frac{H(x)}{x}.$$

<u>Exercice</u> 20. Déterminer la limite, quand $\alpha \to 0$, de la distribution définie par

$$T_\alpha = \frac{1}{2\alpha} \left(vp \frac{1}{x - \alpha} - vp \frac{1}{x + \alpha} \right).$$

<u>**Exercice**</u> **21.** *a*) Soient f une fonction de classe C^∞ et T un distribution. On suppose que $T*f$ existe. Montrer que $T*f \in C^\infty$ (au sens usuel) et

$$T*f(y) = \langle T_x\ ,\ f(y-x)\rangle\ ,\qquad y\in\mathbb{R}.$$

b) Soient S et T deux distributions. On suppose que $S*T$ existe. Calculer (en justifiant) l'expression $(S*T)'$ en fonction de S' et T'.
c) On suppose que $S*T'$ et $S'*T$ existent. Peut-on conclure que $S*T$ existe? Justifier votre réponse.

<u>**Exercice**</u> **22.** On considère l'équation de convolution

$$(\delta'' + \omega^2\delta) * X = B, \tag{2}$$

où B est une distribution connue, X une distribution inconnue et ω une constante.
a) Calculer

$$(\delta'' + \omega^2\delta) * H(x)\frac{\sin\omega x}{\omega},$$

où $H(x)$ est la fonction d'Heaviside.
b) En déduire une solution unique de l'équation (2).

<u>**Exercice**</u> **23.** **1)** On rappelle qu'une solution élémentaire d'un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$, $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, est une distribution E sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$P\frac{\partial}{\partial x}E = \delta,$$

où δ est la mesure de Dirac.

a) Trouver une solution élémentaire tempérée E_0 de l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$,

$$L\left(\frac{d}{dx}\right) \equiv \left(\frac{d}{dx^2}\right) - m^2,\ m\in\mathbb{R}^*.$$

b) Démontrer que E_0 est la seule solution élémentaire tempérée de $L\left(\frac{d}{dx}\right)$.

2) Toutes les distributions, dans cette question, sont définies sur $\mathbb{R}$. On note $\delta(k)$ la mesure de Dirac au point $x = k \in \mathbb{N}$.

a) Pour quelles suites de nombres réels (s_k) est-ce que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k\delta(k), \tag{3}$$

converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

b) Même question avec $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{S}'$.

c) Supposons que la série $(*)$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et soit T sa somme.

Prouver que T est une mesure. Calculer la puissance $N^{\text{ème}}$ de convolution de T

$$T^{*N} = \overbrace{T * \cdots * T}^{N}, \qquad (N = 0, 1, 2, \ldots).$$

d) On suppose encore que $(*)$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On suppose en outre que $s_0 \neq 0$. Montrer qu'il existe une distribution unique E sur $\mathbb{R}$, dont le support est contenu dans la demi-droite $x \geq 0$, qui vérifie

$$T * E = \delta.$$

3) *a*) On suppose que la série (3) converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et que $s_0 \neq 0$. L'unique distribution E sur $\mathbb{R}$, telle que

$$SuppE \subset [0, \infty[,$$

et que

$$T * E = \delta,$$

appartient-elle nécessairement à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$?

b) On considère l'espace vectoriel V des sommes de séries convergeant dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} s_p e^{2\pi i \langle p, x \rangle},$$

où $\mathbb{Z}^n$ est l'ensemble des n-uples $p = (p_1, \ldots, p_n)$ d'entiers positifs, négatifs ou nuls et où

$$\langle p, x \rangle = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n.$$

Est-ce que cet espace vectoriel est identique à celui des distributions périodique de périodes $(1, \ldots, 1)$ sur $\mathbb{R}^n$?

c) Notons $\mathcal{F}V$ l'image de V par la transformation de Fourier. Décrire $\mathcal{F}V$ et $V \cap \mathcal{F}V$.

d) La transformation $S * T$ entre une distribution $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ (càd. à support compact) et une distribution $T \in V$ est toujours définie. Montrer que cette convolotion appartient à V. Soient deux éléments de V,

$$A = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} a_p e^{2\pi i \langle p, x \rangle}, \ B = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} b_p e^{2\pi i \langle p, x \rangle}.$$

Posons

$$A \times B = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} a_p b_p e^{2\pi i \langle p, x \rangle}.$$

Montrer que $A \times B$ a les propriétés d'une convolution :

$$(A, B) \longmapsto A \times B,$$

est une application bilinéaire de $V \times V$ dans V; V muni de la loi de composition $A \times B$, devient une algèbre commutative, avec élément unité (préciser quel est cet élément unité). Montrer que pour dériver $A \times B$, il suffit de dériver l'un des facteurs :

$$P\frac{\partial}{\partial x}(A \times B) = A \times B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)B.$$

Plus généralement, prouver que si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, on a

$$S * (A \times B) = A \times (S * B) = (S * A) \times B.$$

Caratériser les éléments de V qui ont un inverse (pour la loi de composition$\times$).

<u>Exercice</u> 24. Calculer la transformée de Fourier de la distribution $vp\frac{1}{x}$. En déduire $\mathcal{F}H$ où $H(x)$ est la fonction de Heaviside.

<u>Exercice</u> 25. *a*) Montrer que toute solution de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4}$$

est de la forme

$$u = g(x-t) + h(x+t),$$

où g et h sont des fonctions quelconques de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Trouver pour l'équation (4) qui correspond aux conditions initiales :

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= v(x), \end{aligned}$$

où $u \in \mathcal{C}^2[a,b]$ et $v \in \mathcal{C}^1[a,b]$.

<u>Exercice</u> 26. Etudier l'équation au dérivées partielles suivante :

$$x^4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

<u>Exercice</u> 27. Résoudre, par la mêthode de la transformée de Fourier, le problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ (Equation de la chaleur)}, \\ u(x,0) &= f(x), \end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+^*$, a une constante et f une fonction connue.

<u>Exercice</u> 28. On considère dans $\mathbb{R}^3$, l'équation au dérivées partielles

$$\Delta u = -4\pi f, \tag{5}$$

où
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$
et $f(x, y, z)$ une fonction connue. Posons

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et supposons que $Supp f$ est borné. Montrer que la fonction

$$\frac{1}{r} * f,$$

est solution de l'équation (5). Déterminer la solution générale de l'équation

$$\Delta\delta * u = -4\pi f.$$

<u>Exercice</u> 29. On considère l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ et le cas particulier $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.
a) Montrer que $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach et que $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
b) Montrer que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$, $m \geq 1$.
c) Montrer que
$$H^m(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$
et que $H^m(\mathbb{R}^n)$ coincide avec l'espace des distributions tempérées u telles que :
$$\left(1 + |x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \mathcal{F}u \in L^2(\mathbb{R}^n).$$
Déterminer une norme sur $H^m(\mathbb{R}^n)$ qui soit équivalente à la norme primitive.

<u>Exercice</u> 30. Montrer que si $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ l'expression

$$f(x) - \int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_n)\, dt,$$

a un sens pour presque tout x et définit une fonction de $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, indépendante de x_1. On appelle cette fonction trace de f sur $x_1 = 0$ et on la note f_0. Montrer que
$$||f_0||_{\mathbb{R}^{n-1}} \leq ||f||_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

<u>Exercice</u> 31. Soit $a(u,v)$ la forme bilinéaire symétrique, continue sur $H^1(\Omega)$, elliptique si $\lambda > 0$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \lambda uv \right) dx.$$

a) Montrer que l'équation

$$a(u,v) = \int_\Omega f v dx = (f,v)_{L^2}\,, \ \forall v \in H^1(\Omega)\,,$$

possède une solution unique. (indication: appliquer le théorème de Lax-Milgram avec $V = H^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$).
b) Montrer que l'opérateur A (voir cours) est l'opérateur

$$-\Delta + \lambda,$$

et chercher son domaine.