Etude de quelques équations de la chaleur par la méthode des séries de Fourier, de la transformée de Fourier et de la transformée de Laplace

A. Lesfari
E. mail : Lesfariahmed@yahoo.fr
http://lesfari.com

1) (<u>*Etude de l'équation de la chaleur par la méthode des séries de Fourier*</u>). Soit une plaque carrée dont les côtés ont la longueur π et telle que : ses faces sont isolées, trois de ses côtés sont maintenus à la température zéro, le quatrième côté est maintenu à la température T_0. La température au point $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ et à l'instant $t \quad 0$ est représentée par une fonction $u(x, y)$ satisfaisant (dans $]0, \pi[\times]0, \pi[\times]0, \infty[$) à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

où $C \neq 0$ est une constante. Le problème consiste à déterminer la température d'état stationnaire ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$) en tout point de la plaque. Dans ce cas, l'équation aux dérivées partielles précédente devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Cette équation s'appelle équation de Laplace en deux variables. Les conditions aux limites s'expriment par

$$u(0, y) = u(x, 0) = u(\pi, y) = 0, \quad u(x, \pi) = T_0.$$

Résoudre l'équation (1), par la méthode de séparation des variables et les séries de Fourier.

<u>*Solution*</u> : On cherche des solutions particulières de (1) sous forme d'un produit de deux fonctions dépendant chacune d'une seule variable;

$$u(x, y) = f(x)g(y).$$

En substituant cette expression dans (1), on obtient

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0,$$

d'où

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)}.$$

Le membre de gauche de cette égalité est une fonction de x et celui de droite est une fonction de y. Comme ils sont égaux, ils ne dépendent ni de x ni de y et sont donc égaux à une constante que l'on désigne par $-\lambda^2$. On a donc

$$\begin{aligned} f''(x) + \lambda^2 f(x) &= 0, \\ g''(x) - \lambda^2 g(x) &= 0. \end{aligned}$$

En résolvant ces deux équations, on trouve

$$\begin{aligned} f(x) &= a\cos\lambda x + b\sin\lambda x, \\ g(x) &= c\coth\lambda y + d\sinh\lambda y. \end{aligned}$$

D'où

$$u(x,y) = (a\cos\lambda x + b\sin\lambda x)(c\coth\lambda y + d\sinh\lambda y).$$

Les conditions aux limites $u(0,y)=0$ et $u(x,0)=0$ entrainent respectivement $a=0$ et $c=0$, et la condition $u(\pi,y)=0$ donne $bd\sin\lambda\pi\sinh\lambda y=0$. Pour obtenir une solution non triviale, i.e., $b\neq 0$ et $d\neq 0$, il faut choisir $\lambda=k$ où $k=1,2,...$ Dès lors

$$u_k(x,y) = A_k \sin kx.\sinh ky.$$

Pour satisfaire à la dernière condition : $u(x,\pi)=T_0$, on utilise d'abord le principe de superposition pour obtenir la solution générale :

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx.\sinh ky. \tag{2}$$

Puis en se basant sur la condition aux limites

$$u(x,\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sinh k\pi \sin kx = T_0, \tag{3}$$

on détermine les coefficients A_k de la manière suivante : L'équation (3) représente le développement en série de Fourier de la constante T_0 dans l'intervalle $[0,\pi[$. En posant $u(x,\pi)=-T_0$ pour $x\in[-\pi,0[$, la fonction $u(x,\pi)$ est définie dans l'intervalle $[-\pi,\pi[$, et comme il s'agit d'une fonction impaire, on a pour son développement en série de Fourier :

$$u(x,\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = T_0, \tag{4}$$

où

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,\pi)\sin kx dx, \\ &= \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx dx, \\ &= \frac{2T_0(1-\cos k\pi)}{\pi k}. \end{aligned}$$

En comparant (3) et (4), on obtient

$$A_k = \frac{2T_0(1-\cos k\pi)}{\pi k \sinh k\pi}.$$

Finalement, en portant ces valeurs dans (2), on obtient la solution :

$$u(x,y) = \frac{2T_0}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-\cos k\pi)}{\pi k \sinh k\pi}\sin kx.\sinh ky.$$

2) (<u>*Etude de l'équation de la chaleur par la méthode des séries de Fourier*</u>). On considère l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0$$

où $u : [0,L]\times[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, (x,t)\longmapsto u(x,t)$ est une fonction continue sur $[0,L]\times[0,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,L[\times]0,+\infty[$. On suppose satisfaites les conditions aux limites :

$$u(x,t) = u(L,t) = 0, \quad L > 0$$

ainsi que les conditions initiales :

$$u(x,0) = \varphi(x),$$

où $\varphi : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction $2L$-périodique, impaire et de classe $\mathcal{C}^4$. Déterminer $u(x,t)$, $0 \leq x \leq L$, à l'aide des séries de Fourier.

<u>*Indication*</u> : Comme dans le problème précédent, on utilise la méthode de séparation des variables en posant : $u(x,t) = f(x)g(t)$, on détermine f, g et on applique le principe de superposition. Ensuite, on prolonge la fonction φ sur $[-L,0]$ de manière impaire et on la décompose en série de Fourier.

3) (<u>*Etude de l'équation de la chaleur par la méthode de la transformée de Fourier*</u>). En utilisant la transformée de Fourier, déterminer la solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0$$

avec la condition initiale : $u(x,0) = \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est la température à l'instant $t = 0$.

<u>*Solution*</u> : Pour résoudre l'équation ci-dessus, on considère la transformée de Fourier par rapport à la variable x seulement. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-2\pi i\omega x}dx = a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-2\pi i\omega x}dx.$$

Comme

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{u(x,t)\} &= \widehat{u}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-2\pi i\omega x}dx,\\
\mathcal{F}\{\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\} &= \widehat{\frac{\partial u}{\partial \omega}}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)e^{-2\pi i\omega x}dx = 2\pi i\omega\widehat{u}(\omega,t),\\
\mathcal{F}\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\} &= \widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2}}(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-2\pi i\omega x}dx = -4\pi^2\omega^2\widehat{u}(\omega,t),
\end{aligned}$$

alors l'équation précédente, s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\omega,t) = -4a\pi^2\omega^2\widehat{u}(\omega,t).$$

En intégrant cette équation en l'inconnue $\widehat{u}(\omega,t)$ de la variable t, on obtient

$$\widehat{u}(\omega,t) = Ce^{-4a\pi^2\omega^2 t}.$$

Or

$$\widehat{u}(\omega,0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-2\pi i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-2\pi i\omega x}dx,$$

donc

$$\widehat{u}(\omega,t) = e^{-4a\pi^2\omega^2 t}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-2\pi i\omega x}dx = e^{-4a\pi^2\omega^2 t}\widehat{\varphi}(\omega),$$

i.e.,

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = e^{-4a\pi^2\omega^2 t}\mathcal{F}\{\varphi(x)\}.$$

Comme $\mathcal{F}\{f*g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}$, on peut poser

$$u(x,t) = f*g,$$

avec $f=\varphi(x)$ donnée et g telle que : $\mathcal{F}\{g\} = \widehat{g}(\omega) = e^{-4a\pi^2\omega^2 t}$. On montre que :

$$g = \frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}}e^{-\frac{x^2}{16a\pi^2 t}}.$$

Finalement, on obtient la solution

$$u(x,t) = \varphi * \frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}}e^{-\frac{x^2}{16a\pi^2 t}} = \frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{16a\pi^2 t}}dy.$$

4) (*Etude de l'équation de la chaleur par la méthode de la transformée de Laplace*). Déterminer la solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

qui satisfait aux conditions suivantes : pour $x = 0$, on a

$$u(0,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ f(t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ g(t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

où f et g sont deux fonctions données, définies pour $t > 0$. On pourra admettre la légitimité des calculs. On représentera u par une intégrale de la forme

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x) e^{-a^2\omega^2 t} d\omega,$$

où $A(\omega)$ est une fonction paire et $B(\omega)$ est une fonction impaire et l'on se ramène à un problème de transformée de Laplace en posant $p = a^2\omega^2$.

<u>*Solution*</u> : On a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega A(\omega)\sin\omega x + \omega B(\omega)\cos\omega x) e^{-a^2\omega^2 t} d\omega,$$

et

$$\begin{aligned} u(0,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-a^2\omega^2 t} d\omega = f(t), \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega B(\omega) e^{-a^2\omega^2 t} d\omega = g(t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

Par hypothèse, $A(\omega)$ est une fonction paire et $B(\omega)$ est une fonction impaire, donc $A(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}$ et $B(\omega)e^{-a^2\omega^2 t}$ sont des fonctions paires. Dès lors,

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\int_0^{\infty} A(\omega) e^{-a^2\omega^2 t} d\omega, \\ g(t) &= 2\int_0^{\infty} \omega B(\omega) e^{-a^2\omega^2 t} d\omega. \end{aligned}$$

En posant $p = a^2\omega^2$, on obtient (en désignant par $\mathcal{L}$ la transformée de Laplace),

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^{\infty} \frac{A\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a\sqrt{p}} e^{-pt} dp = \mathcal{L}\left\{\frac{A\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a\sqrt{p}}\right\}, \\ g(t) &= \int_0^{\infty} \frac{B\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a^2} e^{-pt} dp = \mathcal{L}\left\{\frac{B\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a^2}\right\}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{A\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a\sqrt{p}} &= \mathcal{L}^{-1}\{f(t)\} \equiv F(p), \\ \frac{B\left(\frac{\sqrt{p}}{a}\right)}{a^2} &= \mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} \equiv G(p), \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} A(\omega) &= a^2\omega F(a^2\omega^2), \\ B(\omega) &= a^2\mathcal{L}^{-1}\{g(t)\} \equiv G(a^2\omega^2), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$u(x,t) = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(a^2\omega^2)\omega \cos\omega x + G(a^2\omega^2)\sin\omega x\right) e^{-a^2\omega^2 t} d\omega.$$

References

[1] Lesfari, A. : Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace (Cours et exercices), 380 pages, ISBN : 978-2-7298-7629-6 , éditions Ellipses, Paris, Octobre 2012.