# Équations différentielles

SMA5, 2012-2013

**A. Lesfari**

*Département de Mathématiques*
*Faculté des Sciences*
*Université Chouaïb Doukkali*
*B.P. 20, El-Jadida, Maroc.*
*E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr*
*Site Web : http://lesfari.com*

# Table des matières

# 1 Généralités

Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

une fonction continue. Considérons l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \qquad {}' \equiv \frac{d}{dt}.$$

**Définition 1** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide. Une solution de l'équation ci-dessus est une fonction dérivable*

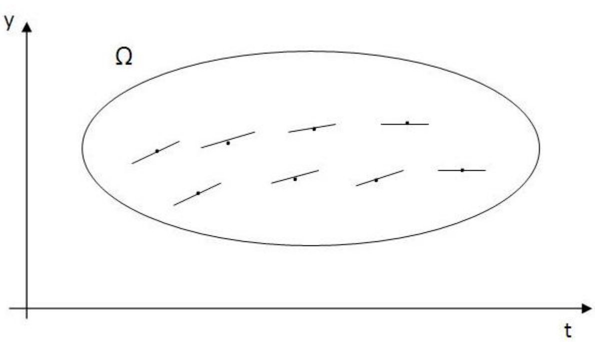
$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

*telle que : $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in \Omega$ et*

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = f(t, y(t)).$$

Si $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une solution de l'équation différentielle ci-dessus, alors la trajectoire de $\varphi$ est définie par l'ensemble $\{(t, \varphi(t)) : t \in I\} \subseteq \Omega$. L'ensemble $\{\varphi(t) : t \in I\}$ s'appelle l'orbite de la solution. Géométriquement, l'équation différentielle ci-dessus peut s'interpréter comme un champ de vecteurs sur $\Omega$.

Comme $\varphi'(t) = f(t, y)$, alors en chaque point de $\Omega$, la courbe d'équation $y = \varphi(t)$ (une telle courbe est dite courbe intégrale) possède une tangente de pente $f(t, y)$. La fonction $f$ définit un champ de vecteurs sur $\Omega$ : à chaque point $(t, y)$ de la courbe, on associe le vecteur de coordonnées $(1, f(t, y))$. Ce vecteur est tangent à la courbe. La trajectoire d'une solution $\varphi$ est donc une courbe attirée par ce champ de vecteurs. Autrement dit, en chacun de ses points cette courbe est tangente au vecteur correspondant du champ.



Posons $y = (y_1, ..., y_n)$ et $f = (f_1, ..., f_n)$. Avec un abus d'écriture, l'équation différentielle ci-dessus s'écrit

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, ..., y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_1(t, y_1, ..., y_n), \end{aligned}$$

Une solution de ce système est un système de $n$ fonctions $y_1, ..., y_n$. L'équation différentielle ci-dessus est dite sous forme normale (ou résolu en $y'$).

**Définition 2** *Étant donné un point $(t_0, y_0) \in \Omega$, le problème de Cauchy (ou problème à valeur initiale) pour l'équation*

$$y'(t) = f(t, y),$$

*consiste à chercher une solution $y(t)$ sur un intervalle $I$ contenant $t_0$ telle que : $y(t_0) = y_0$*

**Définition 3** *On dit que la fonction $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle du $n^{\text{ème}}$ ordre :*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

*si elle est dérivable $n$ fois et si $\forall t \in I$, $(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)(t)} \in \Omega$ et*

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), ..., y^{(n-1)}(t)).$$

Étant donné $(t_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in \Omega$, le problème de Cauchy concernant cette équation consiste à trouver une solution telle que :

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

L'équation ci-dessus est dite sous forme normale (ou résolu en $y^{(n)}$).

**Proposition 4** *Toute équation différentielle d'ordre $n$ sous forme normale peut se ramener à un système de $n$ équations du premier ordre sous forme normale.*

**Proposition 5** *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $y : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction dont le graphe est inclus dans $\Omega$. Alors la fonction $y$ est solution du problème de Cauchy*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

*si et seulement si elle est continue et vérifie l'équation intégrale*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau)) d\tau, \quad \forall t \in I.$$

**Théorème 6** *Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $T : E \longrightarrow E$ une application contractante (c-à-d. il existe un nombre réel $k$, $0 < k < 1$ tel que : $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$, $\forall x, y \in E$). Alors $T$ possède un et un seul point fixe (c-à-d. un unique point $x$ tel que : $Tx = x$).*

Le théorème ci-dessus montre l'existence et l'unicité de la solution de l'équation : $Tx = x$. En outre, il fournit une méthode effective de calcul approché de cette solution (méthode dite des approximations successives) ; pour déterminer cette solution, il suffit de partir d'un point quelconque $x_0 \in E$ et de calculer la limite de la suite $x_{n+1} = Tx_n$, $0 \leq n < \infty$.

**Corollaire 7** *Si $T^p = ToTo...oT$ est contractante, alors $T$ admet un unique point fixe dans $E$.*

**Remarque 8** *Notons que le fait que $T^p$ est une contraction n'implique pas que $T$ en soit une.*

## 2 Théorème local d'existence et d'unicité

**Définition 9** *a) Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \longmapsto f(t, y)$ où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On dit que $f$ est lipschitzienne par rapport à $y$ s'il existe une constante $k$ telle que :*

$$\forall (t, y_1) \in \Omega, \quad \forall (t, y_2) \in \Omega, \quad \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|.$$

*Lorsque $k < 1$, la fonction $f$ est contractante.*

*b) On dit que $f$ est localement lipschitzienne par rapport à $y$ si tout point $(t, y) \in \Omega$, possède un voisinage appartenant à $\Omega$ et dans lequel $f$ est lipschitzienne par rapport à $y$.*

**Propriété 10** *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \longmapsto f(t, y)$ où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*

*a) Si $f(t, y)$ est lipschitzienne par rapport à $y$, alors elle est uniformément continue par rapport à $y$.*

*b) Si $f(t, y)$ est localement lipschitzienne par rapport à $y$, alors elle est continue par rapport à $y$.*

*c) Si $f(t, y)$ possède des dérivées partielles premières continues par rapport à $y$, alors elle est localement lipschitzienne dans $\Omega$.*

*d) Si $\Omega$ est connexe et si $f(t, y)$ possède des dérivées partielles en $y$ continues, alors elle est lipschitzienne si et seulement si ses dérivées sont bornées.*

*e) Si $f(t, y)$ est continue et localement lipschitzienne sur un compact, alors elle est lipschitzienne sur ce compact.*

Soit

$$S = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq l, \|y - y_0\| \leq r\} \subset \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

un cylindre de demi-axe $l$ (placé le long de l'axe des $t$) et de rayon $r$, $r$ et $l$ étant finis.

**Lemme 11** *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, y) \longmapsto f(t, y)$ une fonction localement lipschitzienne par rapport à $y$. Alors que pour tout cylindre fermé $S \subset \Omega$, $f$ est lipschitzienne par rapport à $y$ sur $S$.*

Le théorème de Cauchy (ou théorème de Cauchy-Lipschitz, ou encore théorème de Picard-Lindelöf chez les anglophones) affirme sous certaines conditions à préciser, que le problème de Cauchy (relatif à l'équation différentielle $y' = f(t, y)$) avec donnée initiale $(t_0, y_0)$ admet une unique solution. Plus précisément, on a

**Théorème 12** *(Existence et unicité locale). Soit*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

*où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On suppose que $f$ est continue en $(t, y)$ et localement lipschitzienne par rapport à $y$. Alors*

*a) Pour tout point $(t_0, y_0) \in \Omega$, il existe un intervalle fermé $I$ centré en $t_0$ et une solution locale $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ avec condition initiale $y(t_0) = y_0$.*

*b) En outre $y \in \mathcal{C}^1$ et cette solution est unique (c-à-d. si $z : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $J \subset I$, $t_0 \in J$ avec $z(t_0) = y_0$, alors $\forall t \in J$, $z(t) = y(t)$).*

**Remarques 13** *a) Lorsque $f$ est seulement supposée continue (et non lipschitzienne) et si l'espace est de dimension infinie, on ne peut rien dire sur l'existence et l'unicité de la solution. Par contre si l'espace est de dimension finie, nous verrons (voir plus loin : section 4, théorème 25) que la seule continuité de la fonction $f$ suffit à assurer l'existence d'au moins une solution locale de l'équation différentielle en question. Par contre, la seule continuité de $f$ ne suffit pas à assurer l'unicité en général. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'exemple suivant : $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$. On montre qu'il n'y a pas unicité de la solution du problème de Cauchy pour les conditions initiales : $(t_0, y_0) = (t_0, 0)$. En effet, la solution s'obtient aisément, on trouve $y(t) = (t - t_0 + \sqrt[3]{y_0})^3$ ainsi que $y(t) \equiv 0$. Donc pour $y_0 = 0$ et $t_0$ quelconque, le problème de Cauchy a plusieurs solutions. Par exemple, pour $t_1 \geq t_0$, la fonction $\varphi(t) = 0$ si $t \leq t_1$ et $(t - t_1)^3$ si $t > t_1$, en est une solution. Un autre exemple qui montre que si la fonction $f$ n'est pas lipschitzienne la solution n'est pas unique en général, est* *fournie par l'équation :* $y' = 2\sqrt{|y|}$. *Les fonctions* $y(t) = 0$ *et* $y(t) = t^2$ *sont deux solutions du problème de Cauchy correspondant.*

*b) D'après la propriété 4,c), on sait que si* $f(t, y)$ *possède des dérivées partielles premières continues par rapport à* $y$, *alors elle est localement lipschitzienne dans* $\Omega$. *On pourra donc remplacer (comme le font certains auteurs) dans l'énoncé, la condition localement lipschitzienne par rapport à* $y$ *par celle-ci :* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *existe et est continue sur* $\Omega$. *Mais tout de même ces hypoyhèes sont trop fortes car il peut y avoir unicité dans d'autres cas comme le montre l'exemple suivant :* $y' = |y|$. *Ces hypothèses ne sont pas satisfaites et pourtant il y'a unicité. Les solutions sont* $y = y_0 e^{t-t_0}$ *si* $y_0 > 0$, $y = 0$ *si* $y_0 = 0$ *et* $y = y_0 e^{-(t-t_0)}$ *si* $y_0 < 0$.

**Corollaire 14** *Le problème de Cauchy lié à l'équation différentielle du* $n^{\text{ème}}$ *ordre :*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) &= y_0^{(n-1)}, \end{aligned}$$

*où* $f$ *est continue en* $(t, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *et localement lipschitzienne en* $(y, y', ..., y^{(n-1)})$, *admet localement une solution unique,*

**Proposition 15** *On considère la suite* $x(t) = y_0, x_1(t), ..., x_k(t), ...$ *définie par*

$$x_k(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{k-1}(\tau))d\tau.$$

*Si les hypothèses du théorème de Cauchy sont satisfaites, alors, la suite* $(x_k(t))$ *converge uniformément sur* $[t_0 - l, t_0 + l]$ *vers l'unique solution* $y(t)$ *de l'équation* $y' = f(t, y)$ *avec condition initiale* $y(t_0) = y_0$. *En outre, pour tout* $k$,

$$\|x_k(t) - y(t)\|_\infty \leq \frac{(ML)^k}{k!} r.$$

**Exemple 16** *Le problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} 2yy' + 5t &= 0, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

*possède la solution* $y(t) = \sqrt{1 - \frac{5}{2}t^2}$, $|t| < \sqrt{\frac{2}{5}}$.

**Exemple 17** *Le problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} yy' - y^2 - 3 = 0 &= 0, \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

*n'a pas de solution car sinon on aurait* $0y'(0) = 3$*, ce qui est absurde.*

**Exemple 18** *Le problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} y' &= e^{-t^2} + y^2, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

*admet une solution unique.*

**Exemple 19** *Le problème de Cauchy*

$$\begin{aligned} x'' &= \sin x \\ x(0) &= \frac{\pi}{4} \\ x'(0) &= 0 \end{aligned}$$

*admet une solution unique.*

# 3 Théorème global d'existence et d'unicité

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, y) \longmapsto f(t, y)$ et

$$y' = f(t, y),$$

une équation différentielle.

**Définition 20** *a) Une solution* $y : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est un prolongement d'une solution* $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *si* $I \subseteq J$ *et* $\forall t \in I$, $x(t) = y(t)$.

*b) Une solution maximale est une solution qui n'a pas de prolongement strict. Autrement dit, une solution* $y$ *définie sur* $I$ *est maximale s'il n'existe pas de solution définie sur un intervalle* $J$ *contenant strictement* $I$ *(c-à-d.* $I \subseteq J$, $I \neq J$*) dont la restriction à* $I$ *soit égale à* $y$.

**Théorème 21** *Toute solution se prolonge en une solution maximale mais pas nécessairement unique.*

**Définition 22** *Soit* $y : ]\alpha, \beta[ \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, une solution de l'équation différentielle*

$$y' = f(t, y).$$

*On appelle bout gauche de* $y$*, tout point d'accumulation du graphe de la solution de la forme* $(\alpha, b)$*. Autrement dit, c'est l'ensemble des points d'adhérence de la trajectoire de* $y$ *quand* $t \to \alpha$*,* $t > \alpha$*. En d'autres termes, un point* $(\alpha, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *est un bout gauche s'il existe une suite* $(t_k)$ *dans* $]\alpha, \beta[$ *convergeant vers* $\alpha$*,* $t_k > \alpha$ *telle que la suite* $y(t_k)$ *converge vers* $b$*. On définit de manière analogue un bout droit.*

**Exemple 23** *On considère l'équation différentielle*

$$y' = \frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t}, \quad \Omega = ]0, \infty[ \times \mathbb{R}$$

*On montre que tout point de la forme* $(0, b)$ *avec* $b \in [-1, 1]$ *est un bout gauche.*

Le théorème global d'existence et d'unicité s'énonce comme suit :

**Théorème 24** *Soit*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

*une fonction continue en (t,y) et localement lipschitzienne en y sur l'ouvert* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. Soit* $(t_0, y_0) \in \Omega$*. Alors, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy*

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0$$

*Si les bouts droits et gauches existent, alors ils sont inclus dans le bord de* $\Omega$*.*

# 4 Autres critères d'existence et d'unicité

Comme nous l'avons déjà signalé, la seule continuité de la fonction $f$ suffit à assurer l'existence d'une solution du problème de Cauchy. Plus précisément, on a

**Théorème 25** *Soit*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

*où* $\Omega$ *est un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. Si* $f$ *est continue, alors pour tout point* $(t_0, y_0) \in \Omega$*, il existe un intervalle fermé* $I$ *centré en* $t_0$ *et une solution locale* $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de l'équation différentielle* $y' = f(t, y)$ *avec condition initiale* $y(t_0) = y_0$*.*

Par ailleurs, le critère suivant assure sous certaines conditions l'unicité de la solution.

**Théorème 26** *(Critère de Nagumo). On suppose que $f(t,y)$ est continue dans un cylindre et qu'en outre*

$$|t-t_0|.\|f(t,y_2)-f(t,y_1)\| \leq \|y_2-y_1\|.$$

*Alors, il existe une unique solution au problème de Cauchy*

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0$$

**Exercice 4.1** *Soit l'équation différentielle*

$$ty' + (1-t)y = \frac{t\exp t}{t^2+1},$$

*a) Résoudre cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.*

*b) Montrer qu'il existe une solution de cette équation et une seule définie sur $\mathbb{R}$.*

## 5 Continuité et différentiabilité des solutions

**Lemme 27** *(Lemme de Gronwall). Soient $t_0 < t_1$ et $f, g : [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions continues. Si pour tout $t \in [t_0, t_1]$, $f(t) \geq 0$, $g(t) \geq 0$ et*

$$f(t) \leq a + b\int_{t_0}^t f(\tau)g(\tau)d\tau,$$

*où $a > 0$ et $b > 0$. Alors,*

$$f(t) \leq ae^{b\int_{t_0}^t g(\tau)d\tau}, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

**Théorème 28** *(Continuité en fonction des données initiales). Soit*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t,y) \longmapsto f(t,y),$$

*où $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et*

$$y' = f(t,y),$$

*l'équation différentielle qui lui est associée. Supposons que $f$ est lipschitzienne en $y$ et continue. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$, alors la solution $y(t; t_0, y_0)$ de l'équation ci-dessus (exprimée en fonction des conditions initiales) est continue en les trois variables.*

**Théorème 29** *(Continuité par rapport à un paramètre). Soient $\lambda \in \mathbb{R}^k$ un paramètre, $\Delta$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ et*

$$f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y, \lambda) \longmapsto f(t, y, \lambda),$$

*une fonction localement lipschitzienne en $(y, \lambda)$ et continue. Soit $y(t; t_0, y_0, \lambda)$ la solution de l'équation différentielle*

$$y' = f(t, y, \lambda),$$

*passant par le point $(t_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Alors $y(t; t_0, y_0, \lambda)$ est continue.*

**Théorème 30** *(Différentiabilité par rapport aux données de Cauchy). Soient $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

*une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. La solution de l'équation différentielle*

$$y' = f(t, y),$$

*passant par le point $(t_0, y_0) \in \Omega$ est une fonction $y(t; t_0, y_0)$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à $(t_0, y_0)$ et de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à $t$.*

# 6 Quelques équations résolubles

**Equation à variables séparables :**

C'est une équation de la forme

$$y' = \frac{f(t)}{g(y)},$$

ou sous forme symétrique

$$g(y)dy - f(t)dt = 0.$$

On a

$$\int g(y)dy - \int f(t)dt = 0,$$

d'où

$$G(y) - F(t) = \text{constante}.$$

($G$ et $F$ étant des primitives de $g$ et $f$ respectivement).

**Equation linéaire du 1er ordre :**

C'est une équation de la forme

$$y' + a(t)y = b(t),$$

avec $a$, $b$ deux fonctions continues sur un intervalle. Cette équation est dite linéaire ; les fonctions $y$ et $y'$ sont de degré 1 et ne sont pas multipliées l'une par l'autre.

(i) La solution générale de l'équation non-homogène est la somme de la solution générale de l'équation homogène

$$y' + a(t)y = 0,$$

et d'une solution particulière de l'équation non-homogène.

(ii) L'équation homogène est à variables séparées et sa solution générale est

$$y = Ce^{-\int a(t)dt}, \qquad C = \text{constante}$$

(iii) Pour déterminer une solution particulière de l'équation non-homogène, on remplace la constante $C$ par la fonction inconnue $C(t)$ et enfin substituer $y = C(t)e^{-\int a(t)dt}$ dans l'équation non-homogène pour trouver la fonction $C(t)$ (méthode de la variation de la constante). On obtient

$$C(t) = \int b(t)e^{\int a(t)dt}dt + \text{constante}.$$

Par conséquent,

$$y = e^{-\int a(t)dt}\left(\int b(t)e^{\int a(t)dt}dt + \text{constante}\right),$$

est la solution générale de l'équation non-homogène.

(iv) Selon une méthode de Bernoulli, on pose

$$y = uv,$$

où $u$ et $v$ sont deux fonctions inconnues (dont l'une peut être choisie de façon arbitraire). L'équation non-homogène devient

$$u'v + u(v' + av) = b(t).$$

Notons que $v' + av = 0$ car $v$ peut être choisie de façon arbitraire. Donc on prend pour solution $v$ une solution particulière de $v' + av = 0$, par exemple $v = e^{-\int a(t)dt}$. Dès lors, $u'v = b(t)$, d'où $u = \int b(t)e^{\int a(t)dt}dt + \text{constante}$. Par conséquent,

$$y = uv = e^{-\int a(t)dt}\left(\int b(t)e^{\int a(t)dt}dt + \text{constante}\right).$$

**Exercice 6.1** *Résoudre l'équation suivante :*

$$y' + \frac{t}{1-t^2}y = \arcsin t + t.$$

<u>*Réponse*</u> : $y = (\frac{1}{2}\arcsin^2 t - \sqrt{1-t^2} + C)\sqrt{1-t^2}$.

**Remarque 31** *Certaines équations deviennent linéaires lorsqu'on permute la fonction cherchée et la variable indépendante comme le montre l'exemple suivant :* $(2t+y^3)y' - y = 0$ *où* $y$ *est fonction de* $t$*, n'est pas linéaire. Ecrivons-la autrement,*

$$(2t+y^3)dy = ydt,$$

*ou*

$$yt' - 2t = y^3, \quad t' \equiv \frac{dt}{dy},$$

*et il suffit d'appliquer la méthode ci-dessus. On obtient* $t = (y+C)y^2$.

**Equation linéaire à coefficients constants :**

C'est une équation de la forme

$$a_0y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}y'(t) + a_ny(t) = b(t),$$

où $a_i \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$. On associe à cette équation, l'équation homogène

$$a_0y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}y'(t) + a_ny(t) = 0,$$

dont l'équation caractéristique est

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0.$$

Rappelons que la solution générale de l'équation non-homogène est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation non-homogène. Indiquons diverses méthodes de résolution de l'équation non-homogène :

(i) On peut utiliser la méthode de la variation de la constante (vue précédemment), à condition que l'on connaisse la solution générale de l'équation homogène.

(ii) Lorsque le second membre $b(t)$ est de la forme

$$b(t) = e^{\alpha t}P_m(t),$$

où $P_m(t)$ est un polynôme de degré $m$, alors on cherche la solution particulière de l'équation non-homogène sous la forme

$$y(t) = t^se^{\alpha t}Q_m(t),$$

où $Q_m(t)$ est un polynôme de degré $m$ et

$$s = \begin{cases} 0, \text{ si } \alpha \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique.} \\ \text{ordre de multiplicité de la racine } \alpha \text{ de l'équation caractéristique, sinon.} \end{cases}$$

Lorsque le second membre $b(t)$ est de la forme

$$b(t) = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t),$$

où $P(t)$ et $Q(t)$ sont des polynômes, alors on cherche la solution particulière de l'équation non-homogène sous la forme

$$y(t) = t^s e^{\alpha t}(R_m(t)\cos\beta t + T_m(t)\sin\beta t),$$

où $R_m(t)$ et $T_m(t)$ sont des polynômes de degré $m$ égal au plus grand degré des polynômes $P$, $Q$ et

$$s = \begin{cases} 0, \text{ si } \alpha + i\beta \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique.} \\ \text{ordre de multiplicité de la racine } \alpha + i\beta \text{ de l'équation caractéristique, sinon.} \end{cases}$$

Pour la résolution de telles équations, on peut aussi utiliser la transformée de Laplace, le produit de convolution, etc. (voir par exemple [12]).

**Equation linéaire à coefficients variables :**

C'est une équation de la forme

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = b(t).$$

Contrairement aux équations linéaires à coefficients constants, lorsque les coefficients sont variables il n'est en général plus possible d'exprimer les solutions en termes d'un nombre fini de fonctions élémentaires. Par ailleurs, la résolution de ces équations peut sous certaines conditions, se faire à l'aide des séries entières convergentes. Prenons le cas des équations homogènes d'ordre 2 (pour de plus amples informations, voir par exemple [7]) :

<u>Problème 1</u> : Considérons l'équation différentielle

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0,$$

où $P_1$ et $P_2$ sont des fonctions analytiques sur $]x_0 - r, x_0 + r[$. On montre que dans ce cas toute solution de l'équation ci-dessus est analytique sur ce même intervalle.

**Exemple 32** *On considère l'équation différentielle*

$$xy'' + (1-x)y' - y = 0,$$

*où $y$ est une fonction de la variable réelle $x$. Supposons qu'il existe une série entière, de rayon de convergence $r > 0$,*

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

*qui soit solution de cette équation et telle que : $y(0) = 1$. On montre que*

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}, \quad r = +\infty,$$

*et*

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

**Exemple 33** *Etudier l'équation de Legendre :*

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

*où $n$ est un nombre réel.*

Problème 2 : Considérons l'équation différentielle

$$(x-x_0)^2 y'' + (x-x_0])P_1(x)y' + P_2(x)y = 0,$$

où $P_1$ et $P_2$ sont des fonctions analytiques sur $]x_0 - r, x_0 + r[$. On cherche à satisfaire l'équation ci-dessus par une relation dy type

$$y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k,$$

et il s'agira de déterminer $\alpha$ ainsi que les coefficients $a_k$.

**Exemple 34** *Etudier l'équation de Bessel :*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**Système linéaire à coefficients constants :**

(voir plus loin).

**Equation homogène :**

Il s'agit d'une équation de la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right), \quad t \neq 0$$

ou encore

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0,$$

où $P(t,y)$ et $Q(t,y)$ sont des fonctions homogènes de même ordre. Rappelons qu'une fonction $P(t,y)$ est dite homogène de degré $n$ si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(\lambda t, \lambda y) = \lambda^n P(t,y)$, $n > 0$). Pour résoudre une équation homogène, on peut substituer $y = tu$ et obtenir ainsi une équation à variables séparables.

**Exercice 6.2** *Résoudre l'équation suivante :*

$$ty' = t + y.$$

*Réponse* : $y = t(\ln|t| + C)$.

**Equation de la forme :**

$$y' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 y + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2}\right).$$

(i) Si

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

alors on pose

$$\begin{cases} t & = \tau + \alpha \\ y & = \tau + \beta \end{cases}$$

où $(\alpha, \beta)$ est la solution du système algébrique

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 y + c_1 & = 0 \\ a_2 t + b_2 y + c_2 & = 0 \end{cases}$$

(ii) Si

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0,$$

alors on pose

$$a_1 t + b_1 y = u,$$

et l'équation en question se ramène à une équation à variables séparables.

**Exercice 6.3** *Résoudre l'équation suivante :*

$$(t+2y-1)y' + (2t+y+1).$$

<u>*Réponse*</u> : $y^2 + t^2 + ty + t - y = C$.

**Exercice 6.4** *Résoudre l'équation suivante :*

$$(2t+2y-1)y' + (t+y+2).$$

<u>*Réponse*</u> : $t + 2y + 5\ln|t+y-3| = C$.

**Equation de Bernoulli :**

C'est une équation non linéaire de la forme

$$y' + a(t)y = b(t)y^n, \quad (n \neq 0, 1)$$

En divisant cette équation par $y^n$ $(n \neq 0)$, on obtient

$$\frac{y'}{y^n} + a(t)\frac{1}{y^{n-1}} = b(t).$$

Posons $u = \frac{1}{y^{n-1}}$, d'où

$$\frac{1}{1-n}u' + a(t)u = b(t),$$

une équation linéaire.

**Exercice 6.5** *Résoudre l'équation suivante :*

$$y' - 2ty = -ty^2.$$

<u>*Réponse*</u> : $y = \frac{1}{Ce^{-t^2}+\frac{1}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$, $C =$ constante.

**Equation de Riccati :**

C'est une équation non linéaire de la forme

$$y' + a(t)y + b(t)y^2 = c(t).$$

Cette équation ne peut pas être résolue en général. La méthode de résolution de cette équation nécessite la connaissance d'une solution particulière. Si on connait une solution particulière $y_1$, on ramène, en posant $y(t) = y_1(t) + u(t)$, l'équation de Riccati à l'équation de Bernoulli :

$$u' + (a + 2by_1)u = -bu^2.$$

**Equation exacte :**

Soit l'équation
$$P(t,y)+Q(t,y)y'=0,$$
ou
$$P(t,y)dt+Q(t,y)dy=0,$$
avec $P$ et $Q$ sonr définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $D$. Rappelons que la forme différentielle de degré 1, $Pdt+Qdy$, est fermée si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial t}$. Elle est dite exacte si et seulement si il existe une fonction $f$ telle que : $P=\frac{\partial f}{\partial t}$ et $Q=\frac{\partial f}{\partial y}$ ou ce qui revient au même $df=Pdt+Qdy$. Dès lors, en écrivant l'équation en question sous la forme $df=0$, alors sa solution générale sera donnée par $f(t,y)=$ constante. Rappelons aussi que toute forme différentielle exacte est fermée. La réciproque est vraie si l'ouvert $D$ esr étoilé (ou simplement connexe). Dans certains cas, même si $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial t}$, on peut rendre exacte une équation qui ne l'est pas, en la multipliant par un facteur intégrant c-à-d. une fonction $h(t,y)\neq 0$ telle que : $\frac{\partial P}{\partial t}=h.P$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=h.Q$, ou ce qui revient au même que $hPdt+hQdy$ soit exacte. Pour déterminer un facteur intégrant $h$, on procède comme suit :

(i) Si $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial t}}{Q}=\alpha(t)$, alors $h=e^{\int\alpha(t)dt}$, est un facteur intégrant.

(ii) Si $\frac{\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=\beta(y)$, alors $h=e^{\int\beta(y)dy}$, est un facteur intégrant.

(iii) On peut trouver un facteur intégrant dépendant des deux variables $t$ et $y$.

**Exercice 6.6** *Résoudre l'équation suivante :*
$$2t+3t^2y+(t^3-3y^2)y'=0.$$

*Réponse* : $t^2+t^3y-y^3=C$.

**Exercice 6.7** *Résoudre l'équation suivante :*
$$2y+t(2+y)y'=0.$$

*Réponse* : $2tye^{\frac{y}{2}}=C$.

**Equation de Lagrange :**

Il s'agit d'une équation de la forme
$$y=tf(y')+g(y').$$

En dérivant cette équation et en posant $u = y'$, on obtient

$$u = f(u) + tu'f'(u) + u'g'(u).$$

Introduisons la notation

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{du}} = \frac{1}{t'}.$$

D'où,

$$(u - f(u))t' - f'(u)t = g'(u).$$

Cette équation est linéaire par rapport à $t$ en tant que fonction de $u$ et sa solution s'obtient aisément. En désignant sa solution par $t = F(u)$, alors la solution générale de l'équation de Lagrange sera de la forme :

$$\begin{cases} t = F(u) \\ y = tf(u) + g(u) = F(u)f(u) + g(u) \end{cases}$$

**Exercice 6.8** *Résoudre l'équation suivante :*

$$y = (t+1)y'^2.$$

Réponse : La solution générale est $t = \frac{C}{(1-u)^2} - 1$, $y = \frac{Cu^2}{(1-u)^2}$, $C =$ constante et $y = 0$ est la solution singulière.

**Equation de Clairaut :**

C'est une équation de la forme

$$y = ty' + g(y'),$$

qui est un cas particulier de l'équation de Lagrange. En dérivant cette équation, on obtient

$$y''(t + g'(y')) = 0.$$

Posons $u = y'$, d'où

$$u'(t + g'(u)) = 0.$$

(i) $u' = 0$, d'où $u = y' = C$ et $y = Ct + g(C)$ (solution générale : une famille de droites dans le plan).

(ii) $t + g'(u) = 0$ et l'équation en question s'écrit $y = -g'(u)u + g(u)$. Par conséquent

$$\begin{cases} t = -g'(u) \\ y = -g'(u)(u) + g(u) \end{cases}$$

(solution singulière : enveloppe d'une famille de droites définies par la solution générale).

**Exercice 6.9** *Résoudre l'équation suivante :*

$$y - ty' + e^{y'} = 0.$$

Réponse : $y = (\ln t - 1)t$.

**Equation d'Euler :**

C'est une équation de la forme

$$a_k(\alpha t+\beta)^k y^{(k)} + a_{k-1}(\alpha t+\beta)^{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_1(\alpha t+\beta)y' + a_0 y = 0,$$

où $a_0, ..., a_k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. La substitution $\alpha t + \beta = e^x$ transforme l'équation ci-dessus en une équation linéaire à coefficients constants.

**Exercice 6.10** *Résoudre l'équation suivante :*

$$(4t-1)^2 y'' - 2(4t-1)y' + 8y = 0.$$

Réponse : $y = C(4t-1) + K\sqrt{4t-1}$, $(C, K =$ constantes$)$.

**Equation de la forme :**

$$F\left(t, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0.$$

Notons que cette équation ne contient pas la fonction $y$ cherchée. On abaisse l'ordre de cette équation en posant $y^{(k)} = z$ et l'équation devient

$$F\left(t, z, z', ..., z^{(n-k)}\right) = 0.$$

**Exercice 6.11** *Résoudre l'équation suivante :*

$$ty'' - y'\ln y' + y'\ln t = 0.$$

Réponse : $y = \frac{t}{C}e^{Ct+1} - \frac{1}{C^2}e^{Ct+1} + K$, $(C, K =$ constantes$)$.

**Equation de la forme :**

$$F\left(y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0.$$

Cette équation ne contient pas la variable $t$ (c'est une équation autonome). On peut réduire cette équation à une équation d'ordre $n-1$ en posant $z = y' = \frac{dy}{dt}$, d'où $y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = z\frac{dz}{dy}$, $y^{(3)} = \frac{d^3y}{dt^3} = z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2z}{dy^2}$, etc.

**Exercice 6.12** *Résoudre l'équation suivante :*

$$yy'' - y'^2 - 1 = 0.$$

*Réponse* : $\frac{1}{\sqrt{C}} \ln(\sqrt{C}y + \sqrt{Cy^2 - 1}) = \pm t + K$, $(C, K = \text{constantes})$.

# 7 Systèmes différentiels linéaires, théorème d'existence

On considère le systèmes différentiel linéaire suivant :

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t), \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t), \end{aligned}$$

où $'$ désigne la dérivée par rapport à $t$ et

$$a_{ij}, b_j : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

On suppose que les $n^2$ fonctions $a_{ij}(t)$ et les $n$ fonctions $b_j(t)$ sont continues sur $I$. Posons

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Le système linéaire non-homogène ci-dessus s'écrit sous la forme matricielle :

$$y' = A(t)y + b(t).$$

Ce système est dit homogène si $b(t) = 0$, c-à-d. si

$$y' = A(t)y.$$

**Théorème 35** *(Cauchy). Si $A$ et $b$ sont continues sur $I \subset \mathbb{R}$, alors le système linéaire non-homogène ci-dessus possède pour tout $t_0 \in I$, une solution maximale unique $y$ vérifiant la condition initiale :*

$$y(t_0) = y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix}, \quad (\textit{vecteur donné}).$$

D'après le théorème précédent, on sait que pour toute donnée de Cauchy $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique définie sur tout $I$. On notera cette solution $y(t; t_0, y_0)$.

**Proposition 36** *L'ensemble des solutions du système linéaire homogène ci-dessus est un espace vectoriel de dimension $n$.*

L'application qui à $y$ solution maximale associe $y(t_0)$, est un isomorphisme linéaire. Dès lors, l'application $y_0 \longmapsto y(t; t_0, y_0)$ étant linéaire, on peut la représenter dans une base par une matrice $R(t, t_0)$ d'ordre $n$, dont les éléments sont fonctions de $t$ et $t_0$.

**Définition 37** *On appelle résolvante ("solution operator" en anglais), l'application*

$$R : I \times I \longrightarrow M_n(\mathbb{K}), \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ } ou \text{ } \mathbb{C}),$$

*définie par*

$$\forall t, s \in I, \quad \frac{dR}{dt}(t, s) = A(t)R(t, s), \quad R(s, s) = Id.$$

*Autrement dit, la matrice résolvante $R(t, t_0)$ du système est définie par la relation*

$$y(t; t_0, y_0) = R(t, t_0).y_0, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}^n$$

Si $(e_j)_{j=1,\dots,n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, la j-ème colonne de$R(t, t_0)$ est

$$R(t, t_0).e_j = R(t, t_0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

et représente la solution $y(t; t_0, e_j)$.

**Propriété 38** $R(t_0, t_0) = Id.$

**Propriété 39** $R(t, s).R(s, r) = R(t, r).$

**Propriété 40** *La matrice $R(t, s)$ est inversible et $R^{-1}(t, s) = R(s, t)$.*

**Définition 41** *On appelle système fondamental de solutions du système linéaire homogène, toute base $(v_j)$ de l'espace vectoriel des solutions de ce système.*

**Proposition 42** *Un ensemble $(v_1, ..., v_n)$ de $n$ solutions du système linéaire homogène est un système fondamental si et seulement si $\forall t \in I$, $(v_1(t), ..., v_n(t))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ ou encore si et seulement si pour un $t_0 \in I$, $(v_1(t_0), ..., v_n(t_0))$ est une base de $\mathbb{R}^n$*

**Définition 43** *Une matrice fondamentale est une matrice $V(t)$ dont les colonnes sont les vecteurs $(v_1(t), ..., v_n(t))$ d'une base de l'espace des solutions du système linéaire homogène.*

On a

$$\begin{aligned} V(t) &= (v_1(t), ..., v_n(t)), \\ &= (R(t,s)v_1(s), ..., R(t,s)v_n(s)), \\ &= R(t,s)V(s). \end{aligned}$$

Comme les colonnes de $V(t)$ sont linéairement indépendants, alors $V(t)$ est de rang maximum et on a

$$R(t,s) = V(t).V^{-1}(s).$$

En posant $s = t_0$ dans les deux expressions ci-dessus, on remarque que la connaissance de la matrice fondamentale $V(t)$ est équivalente à celle de la matrice résolvante $R(t, t_0)$.

**Proposition 44** *Pour le système de $n \times n$ équations différentielles linéaires*

$$R'(t, t_0) = A(t)R(t, t_0),$$

*avec condition initiale $R(t_0, t_0) = Id.$, l'unique fonction $I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ solution de ce système est la matrice résolvante $R(t, t_0)$.*

**Remarque 45** *La connaissance de $R(t, t_0)$ nous permet de déterminer la solution car $y = R(t, t_0)y_0$ est l'unique solution satisfaisant à la condition initiale. Or d'après la proposition précédente, $R(t, t_0)$ satisfait à une équation différentielle semblable à l'équation originale. Donc il est rare que l'on puisse calculer facilement la résolvante $R(t, t_0)$. Cette dernière est surtout d'un intérêt théorique. En général, on ne peut pas déterminer $R(t, t_0)$. Cependant, on connait son déterminant :*

**Proposition 46** *(Equation de Jacobi-Liouville). On a*

$$\det R(t; t_0) = e^{\int_{t_0}^t trA(\tau)d\tau},$$

*où $trA(\tau)$ désigne la trace de la matrice $A(\tau)$, ou pour toute matrice fondamentale $V(t)$,*

$$\det V(t) = \det V(t_0) e^{\int_{t_0}^t trA(\tau)d\tau}.$$

**Exercice 7.1** *Supposons que $A(t)$ et $A(s)$ commutent $\forall t, s \in I$. Montrer que*

$$R(t;t_0) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau}.$$

**Proposition 47** *La solution générale du système linéaire non-homogène est la somme de la solution générale du système homogène et d'une solution particulière du système linéaire non-homogène. Autrement dit, l'espace des solutions du système linéaire non-homogène est un sous-espace affine de dimension $n$ de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$, obtenu en faisant la somme de l'ensemble des solutions du système linéaire homogène et d'une solution quelconque du système linéaire non-homogène.*

**Proposition 48** *La solution du système :*

$$y' = A(t)y + b(t),$$

*satisfaisant $y(t_0) = y_0$ est donnée par*

$$y(t) = R(t;t_0)y_0 + \int_{t_0}^t R(t;\tau)b(\tau)d\tau,$$

*où $R(t;\tau)$ est la matrice résolvante du sytème homogène.*

*Résolution pratique* : Lorsqu'on connait la solution générale du système linéaire homogène, mais pas de solution particulière, on peut néamoins toujours trouver la solution générale du système non-homogène par la méthode de variation des constantes de Lagrange. On suppose que $y_1, ..., y_n$ sont des solutions linéairement indépendantes du système linéaire homogène. On cherche alors $y$ solution du système linéaire non-homogène, avec

$$y(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t)y_j(t).$$

On a

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sum_{j=1}^n c_j'(t)y_j(t) + \sum_{j=1}^n c_j(t)y_j'(t), \\ &= \sum_{j=1}^n c_j'(t)y_j(t) + \sum_{j=1}^n c_j(t)A(t)y_j(t), \\ &= \sum_{j=1}^n c_j'(t)y_j(t) + A(t)y(t). \end{aligned}$$

Or
$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t),$$
donc $y$ vérifie cette équation si et seulement si
$$b(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)y_j(t).$$

Pour $t$ fixé, soit $P = (P_{ij}(t))$ la matrice de passage de la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ à la base $(y_1(t), ..., y_n(t))$ de $\mathbb{K}^n$. On a

$$\begin{aligned} b(t) &= \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\left(\sum_{i=1}^{n} P_{ij}e_i\right), \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_j'(t)P_{ij}e_i, \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)P_{ij}\right)e_i, \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)e_i, \end{aligned}$$

d'où
$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)P_{ij} = b_i(t),$$
ou sous forme matricielle
$$P(t).C'(t) = b(t), \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Par conséquent,
$$C'(t) = P^{-1}b(t).$$

La forme générale d'une équation linéaire d'ordre $n$ est
$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{(n-1)}(t)y' + a_n(t)y = b(t),$$
où les $a_0 \neq 0, a_1(t), ..., a_n(t), b(t)$ sont des fonctions continues définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

La résolution de cette équation peut se ramener à celle d'un système différentiel de $n$ équations linéaires du premier ordre.

**Proposition 49** *a) Pour chaque $t_0 \in I$ et chaque point $(u_0, u_1, ..., u_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique*

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto y(t),$$

*de l'équation différentielle ci-dessus définie sur $I$ et satisfaisant aux conditions initiales :*

$$y(t_0) = u_0, y'(t_0) = u_1, ..., y^{(n-1)}(t_0) = u_{(n-1)}.$$

*b) L'ensemble $S$ des solutions de l'équation linéaire homogène :*

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{(n-1)}(t)y' + a_n(t)y = 0,$$

*est un espace vectoriel de dimension $n$. Pour chaque $t_0 \in I$, la fonction associant à une solution $y$, le $n$-uple $(y(t_0), y'(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0))$ est une bijection linéaire de $S$ sur $\mathbb{R}^n$.*

Un système fondamental de solutions pour l'équation linéaire non-homogène ci-dessus est un ensemble de $n$ solutions $y_1, ..., y_n$ tels que les vecteurs $y_j(t)$, $y_j'(t)$,...,$y_j^{(n-1)}(t)$ soient linéairement indépendants pour tout $t$, c-à-d. tels que le wronskien

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

soit non nul.

Notons que tr $A = -\frac{a_1}{a_0}$ et l'équation de Jacobi-Liouville se réduit à

$$W(t) = \det V(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t_1} \frac{a_1}{a_0}(\tau)d\tau}.$$

## 8 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Considérons maintenant le système

$$y'(t) = Ay(t) + b(t),$$

où $A$ est ici une matrice constante (c-à-d. indépendante de $t$) d'ordre $n$. Le système homogène correspondant est

$$y'(t) = Ay(t).$$

Lorsque la matrice $A$ est diagonalisable, on obtient la solution en cherchant les valeurs propres de $A$ et les vecteurs propres associés. Lorsque $A$ n'est pas diagonalisable, on alors besoin en général de la notion d'exponentielle de matrice.

**Exercice 8.1** *L'exponentielle $e^A$ d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est définie par la série*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

*a) Montrer que cette série converge normalement.*
*b) Montrer que pour une matrice diagonale*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

*on a*

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

*c) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K}$. Montrer que si $A$ et $B$ commutent, alors*

$$e^A.e^B = e^{A+B} = e^B.e^A.$$

*d)Montrer que pour $A \in M_n(\mathbb{K}$ et $P \in GL_n(\mathbb{K}$, on a*

$$e^A = P^{-1}.e^{PAP^{-1}}.P$$

*e) Montrer que : $(e^{At})' = Ae^{At}$.*
*f) Montrer que : $\det e^A = e^{trA}$.*

**Exercice 8.2** *Déterminer $e^A$ où*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Réponse* :

$$e^A = \begin{pmatrix} e & e-e^2 & 0 & e-e^2 \\ 0 & e^2 & 0 & -e^{-1} \\ e-e^2 & e & e^2 & e+2e^2-2e^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}.$$

**Remarque 50** *Notons que si $A$ est une matrice constante, la résolvante du système homogène est $y'(t) = Ay(t)$ est donnée par*

$$R(t,s) = e^{(t-s)A}.$$

*De même si $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et $y$ est valeurs réelles, alors la résolvante (dans le cas scalaire) de l'équation $y'(t) = a(t)y(t)$ est donnée par*

$$R(t,s) = e^{\int_s^t a(\tau)d\tau}.$$

*On pourrait être tenté d'extrapoler ces résultats et vouloir les appliquer au cas général du système homogène et espèrer que la résultante $R(t,s)$ soit égale à $e^{\int_s^t A(\tau)d\tau}$. Or ceci n'est possible que si les matrices commutent car d'après l'exercice précédent, $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$ si $A$ et $B$ commutent.*

*Rappel d'analyse matricielle* : soit $A$ une matrice d'ordre $n$, à termes réels. Dans la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice $A$ peut être considérée comme une application linéaire

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \longmapsto Tx = \sum_{j=1}^n y_i e_u,$$

avec

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$y = Ax.$$

Dans une autre base $(e'_1, ..., e'_n)$, le même endomorphisme peut-être représenté par $P^{-1}AP$ où $P$ est la matrice de passage de la base $(e_1, ..., e_n)$ à $(e'_1, ..., e'_n)$ :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1j} \cdots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nj} \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \forall j, e'_j = \sum_{i=1}^n p_i e_j.$$

C'est une matrice inversible.

**Proposition 51** *Si $A$ est la matrice de $T$ dans $(e_1, ..., e_n)$, si $A'$ est la matrice de $T$ dans $(e'_1, ..., e'_n)$ et si $P$ est la matrice de passage de $(e_1, ..., e_n)$ dans $(e'_1, ..., e'_n)$, alors*

$$A' = P^{-1}AP.$$

*(Les matrices $A$ et $A'$ sont dites semblables).*

On dit que la matrice $A$ (ou $T$) est diagonalisable si et seulement si, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) constituée de vecteurs propres de $(v_1, ..., v_n)$ $A$ (ou $T$) :

$$Tv_j = \lambda_j v_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

Dans cette base, on a

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

où $P$ est la matrice de passage de la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $(v_1, ..., v_n)$.

Si $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes, alors $A$ est diagonalisable. On choisit

$$v_1 \in E_{\lambda_1} \backslash \{0\}, ..., v_n \in E_{\lambda_n} \backslash \{0\}$$

où $E_{\lambda_i} = \ker(T - \lambda_i I_d)$ est le sous-espace propre de $T$ associé à la valeur propre $\lambda_i$.

Si $A$ est symétrique ou anti-symétrique ou commute avec sa transposée, alors $A$ est diagonalisable.

Si $A$ admet $k$ $(< n)$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n$, alors $A$ est diagonalisable lorsque

$$\dim E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_k} = n.$$

Toute matrice peut être mise sous forme de Jordan : il existe une matrice $P$ de changement de base telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_n \end{pmatrix}.$$

Ici chaque matrice carrée $J_k$ est un bloc de Jordan et elle est de la forme

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}$$

Le nombre de blocs dans la matrice est égal à la dimension de l'espace propre et il est aussi égal au nombre de vecteurs linéairement indépendants.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non diagonalisable. Pour calculer l'exponentielle $e^{tA}$, on peut donc commencer par ramener la matrice $A$ à sa forme de Jordan par le changement de base $P$, puis prendre l'exponentielle et enfin revenir à la base de départ par $P^{-1}$. Il reste à calculer l'exponentielle d'une matrice sous forme normale de Jordan. Or, dans chaque puissance de la matrice, les blocs se multiplient séparément sans se mélanger et il suffit donc de calculer $e^{tJ_\lambda}$ où $J_\lambda$ est un bloc de Jordan (dordre $m$) :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Théorème 52** *La solution générale du système homogène à coefficients constants : $y' = Ay$ est donnée par*

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}^n,$$

*et c'est l'unique solution satisfaisant à la condition initiale : $y(t_0) = y_0$.*

**Proposition 53** *Reprenons le système homogène à coefficients constants : $y' = Ay$.*

*a) On suppose que la matrice $A$ est diagonalisable. Soit $(v_1, ..., vV_n)$ une base de vecteurs propres pour $A$ et soit $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres associées. Alors l'ensemble $(e^{\lambda_1 t}v_1, ..., e^{\lambda_n t}v_n)$ forme un système fondamental de solutions. Autrement dit, on a*

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}v_n.$$

*C'est l'unique solution satisfaisant à la condition initiale : $y(0) = y_0$.*

*b) Si la matrice $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$, il suffit dans la famille génératrice des solutions de remplacer, pour les valeurs non réelles, $\alpha e^{\lambda t}v + \beta e^{\overline{\lambda t}}\overline{v}$ par $aRe(e^{\lambda t}v) + bIm(e^{\lambda t}v)$.*

**Exercice 8.3** *Que peut-on dire si la matrice $A$ est triangularisable ou réduite sous forme de Jordan ?*

**Les valeurs propres de la matrice $A$ (d'ordre $n$) sont distinctes :** La solution générale du système homogène est

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}v_n,$$

où $v_1, ..., v_n$ sont les vecteurs propres correspondants respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

**Exercice 8.4** *Intégrer le système différentiel*

$$\begin{cases} y_1{}' &= y_1 + 5y_2 \\ y_2{}' &= y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

<u>*Réponse*</u> :
$y_1 = 5C_1e^{2t} - C_2e^{-4t}$,
$y_2 = C_1e^{2t} + C_2e^{-4t}$.

**Exercice 8.5** *Intégrer le système différentiel*

$$\begin{cases} y_1{}' &= 6y_1 - 12y_2 - y_3 \\ y_2{}' &= y_1 - 3y_1 - y_3 \\ y_3{}' &= -4y_1 + 12y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

<u>*Réponse*</u> :
$y_1 = 2C_1e^{t} + \frac{7}{3}C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}$,
$y_2 = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$,
$y_3 = -2C_1e^{t} - \frac{8}{3}C_2e^{2t} - 3C_3e^{3t}$.

**Exercice 8.6** *Résoudre matriciellement le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y_1{}' &= y_1 + y_2 \\ y_2{}' &= y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 0.$$

<u>*Réponse*</u> :
$y_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t} + \frac{2-\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}t}$,
$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}t}$.

**Les valeurs propres de la matrice $A$ (d'ordre $n$) ne sontpas distinctes :**

Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$ avec ordre de multiplicité $m$, alors la solution correspondante est

$$y_1 = P_1(t)e^{\lambda t}, ..., y_n = P_n(t)e^{\lambda t}$$

où $P_1(t), ..., P_n(t)$ sont des polynômes de degré $\leq m - 1$.

**Exercice 8.7** *Intégrer le système différentiel*

$$\begin{cases} y_1{}' &= 5y_1 - y_2 \\ y_2{}' &= y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

*Réponse* :
$y_1 = (C_1 + C_2 t)e^{4t}$,
$y_2 = (C_1 - C_2 + C_2 t)e^{4t}$.

**Exercice 8.8** *Intégrer le système différentiel*

$$\begin{cases} y_1^{'} &= 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2^{'} &= -2y_1 - y_3 \\ y_3^{'} &= 2y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

*Réponse* :
$y_1 = C_3 e^{2t} - C_2 e^t$,
$y_2 = -2C_3 e^{2t} + (C_2 t + C_1)e^t$,
$y_3 = 2C_3 e^{2t} + (-C_2 t + C_2 - C_1)e^t$.

**Les valeurs propres de la matrice $A$ (d'ordre $n$) sont imaginaires conjuguées :**

**Exercice 8.9** *Intégrer le système différentiel*

$$\begin{cases} y_1^{'} &= 4y_1 - 3y_2 \\ y_2^{'} &= 3y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

*Réponse* :
$y_1 = (\alpha \cos 3t + \beta \sin 3t)e^{4t}$,
$y_1 = (-\alpha \sin 3t + \beta \cos 3t)e^{4t}$.

**Exercice 8.10** *Intégrer le système différentiel*

$$\begin{cases} y_1^{'} &= y_1 - y_3 \\ y_2^{'} &= y_1 \\ y_3^{'} &= y_1 - y_2 \end{cases}$$

*Réponse* :
$y_1 = ae^t + b\cos t + c\sin t$,
$y_2 = ae^t + b\cos t - c\sin t$,
$y_3 = b(\cos t + \sin t) + c(\sin t - \cos t)$.

La solution générale du système non-homogène est la somme de la solution générale du système homogène et d'une solution particulière du système non-homogène. On a

$$y'(t) = Ay(t) + b(t),$$

où $A$ est diagonalisable et $b(t)$ est continue sur $I$. Posons $y = Px$) ($P$ étant la matrice de passage), d'où

$$Px' = APx + b, \quad (P \text{ constant})$$

$$x' = P^{-1}APx + P^{-1}b = Dx + P^{-1}b,$$

où $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est une matrice diagonale. En posant

$$P^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix},$$

le système ci-dessus devient

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1 + c_1(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= \lambda_n x_n + c_n(t). \end{aligned}$$

On cherche une solution particulière de chaque équation et $y = Px$ permet de conclure. Ici on a besoin de $P^{-1}$ pour calculer $P^{-1}b$. Mais lorsque la dimension est petite et le second membre est simple (exemple : polynôme, exponentielle,...), on peut ne pas calculer $P^{-1}$ et chercher directement une solution particulière.

Pour déterminer une solution particulière du système non-homogène, on peut procéder comme pour une équation linéaire à coefficients constants à la seule différence suivante : si

$$b_i(t) = e^{\alpha t} P_{m_i}(t),$$

où $P_{m_i}(t)$ sont des polynômes de degré $m_i$, on cherche une solution particulière sous la forme

$$y_i = e^{\alpha t} Q^i_{m+s}(t), \quad i = 1, 2, ..., n$$

où $Q^i_{m+s}(t)$ sont des polynômes de degré $m + s$ ave $m = \max m_i$ et $s = 0$ si $\alpha$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$ et $s =$ à l'ordre de multiplicité de la racine $\alpha$ de l'équation $\det(A - \lambda I) = 0$ (ou plus exactement, $s$ est d'une unité plus grand que le degré supérieur des polynômes qui dans la solution générale du système homogène sont multiples par $e^{\alpha t}$).

Les coefficients inconnus des polynômes se déterminent par introduction des expressions $y_i = e^{\alpha t} Q^i_{m+s}(t)$ dans le système non-homogène et par identification des coefficients des termes semblables.

Les polynômes se déterminent de façon analogue même si les $b_i(t)$ contiennent $e^{\alpha t}\cos\beta t$ et $e^{\alpha t}\sin\beta t$ et que le nombre $\alpha + i\beta$ soit racine de l'équation : $\det(A - \lambda I) = 0$. Plus précisément, si

$$b_i(t) = e^{\alpha t}(P_{m_i}(t)\cos\beta t + Q_{m_i}(t)\sin\beta t),$$

on cherchera la solution sous la forme

$$y_i = e^{\alpha t}(R_{m+s}(t)\cos\beta t + T_{m+s}(t)\sin\beta t).$$

($R_{m+s}$, $T_{m+s}$ étant des polynômes à déterminer).

La solution du système non-homogène peut être obtenue par la méthode de la variation des constantes, si on connaît la solution générale du système homogène.

**Exercice 8.11** *Intégrer le système différentiel*

$$\begin{cases} y_1{}' &= y_2 - 5\cos t \\ y_2{}' &= 2y_1 + y_2 \end{cases}$$

**Exercice 8.12** *Intégrer le système différentiel*

$$\begin{cases} y_1{}' &= 4y_1 - y_2 + e^{3t}(t + \sin t) \\ y_2{}' &= y_1 + 2y_2 + xe^{3t}\cos t \end{cases}$$

**Exercice 8.13** *Intégrer le système différentiel*

$$\begin{cases} y_1{}' &= 4(y_1 + y_2) \\ y_2{}' &= y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

*et trouver la solution particulière telle que :* $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$.

# 9 Flot défini par une équation différentielle

Toutes les questions liées à cette section seront étudiées de manière approfondie dans le cours de Géométrie (SMA6) où on aura à notre disposition des éléments de variétés différentiables, espaces tangents, fibrés tangents, etc. On se contente de donner ici quelques informations sur cet aspect important des équations différentielles.

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et considérons le problème de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x(t_0) = x_0$$

où $f$ est une fonction définie sur $\Omega$ et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$. On a vu que si $f$ est continue et localement lipschitzienne, alors pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$, le système ci-dessus admet une unique solution maximale sur un intervalle ouvert $I$. Dès lors, l'application $(t,t_0,x_0) \mapsto x(t;t_0,x_0)$ est bien définie sur l'ouvert $U = \{(t,t_0,x_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Omega; t \in I\}$.

On appelle flot de l'équation différentielle ci-dessus, l'application

$$V \equiv \{(t,x_0) \in \mathbb{R}\times\Omega; t\in I\} \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (t,x_0) \longmapsto g_t(x_0) = x(t;0,x_0).$$

Cette application est continue et vérifie

$$\frac{d}{dt}g_t(x_0) = f(g_t(x_0)), \quad g_0(x_0) = x_0.$$

Notons que $g_t$ est une application indépendante de $t_0$ :

$$\forall (t,t_0,x_0) \in U, \quad (t-t_0,x_0) \in V, \quad x(t;t_0,x_0) = g_{t-t_0}(x_0).$$

Une définition similaire peut-être obtenue pour un système non-autonome.

Notons que le flot $g_t$ (pour le système différentiel linéaire vu précédemment) n'est rien d'autre que la résolvante $R(t,t_0)$.

**Exemple 54** *Soit $\frac{dx}{dt} = Ax$, une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Le flot de cette équation est $g_t(x) = e^{tA}x$.*

Supposons maintenant que $\Omega = \mathbb{R}^m$ (on pourrait aussi considérer une sphère, un tore ou généralement un espace topologique muni d'une structure de variété différentiable) et que $f$ est globalement lipschitzienne. Le flot sera défini sur tout $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ (et $V = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$). L'application $t \longmapsto g_t$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des difféomorphismes de $\mathbb{R}^m$ dans lui-même.

Un champ de vecteurs sur $M$ est une application, notée $X$, qui à tout point $x \in M$ associe un vecteur tangent $X_x \in T_xM$.

Soit $(x_1,...,x_m)$ un système de coordonnées locales dans un voisinage $\Omega$. Dans ce système le champ de vecteurs $X$ s'écrit sous la forme

$$X = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}, \ x \in \Omega,$$

où les fonctions

$$f_1,\ldots,f_m : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

sont les composantes de $X$ par rapport à $(x_1,...,x_m)$. Un champ de vecteurs $X$ est différentiable si ses composantes $f_k(x)$ sont des fonctions différentiables. Cette définition de différentiabilité ne dépend pas évidemment du choix du système de coordonnées locales. En effet, si $(y_1,...,y_m)$ est un autre système de coordonnées locales dans $\Omega$, alors

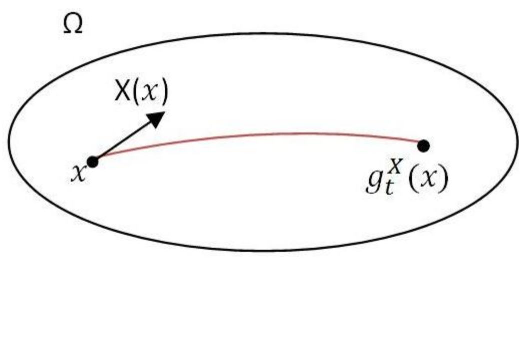
$$X = \sum_{k=1}^{m} h_k(x)\frac{\partial}{\partial y_k}, \ x \in \Omega,$$

où
$$h_1, \ldots, h_m : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$
sont les composantes de $X$ par rapport à $(y_1, ..., y_m)$ et le résultat découle du fait que
$$h_k(x) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial y_k}{\partial x_l} f_l(x), \;\; x \in \Omega.$$
Au champ de vecteurs $X$ correspond un système d'équations différentielles
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, ..., x_m), \\ &\vdots \\ \frac{dx_m}{dt} &= f_m(x_1, ..., x_m). \end{aligned} \tag{9.1}$$
Un champ de vecteurs différentiable $X$ sur $\Omega$ s'appelle système dynamique. Un champ de vecteurs s'écrit localement sous la forme (9.1). Une courbe intégrale (ou trajectoire) du champ de vecteurs $X$ est une courbe différentiable
$$\gamma : I \longrightarrow \Omega, \quad t \longmapsto \gamma(t),$$
telle que :
$$\forall t \in I, \; \frac{d\gamma(t)}{dt} = X(\gamma(t)),$$
où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si
$$\sum_{k=1}^{m} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k},$$
est l'expression locale de $X$, alors les courbes intégrales (ou trajectoires) de $X$ sont les solutions $\gamma(t) = \{x_k(t)\}$ de (9.1).

On suppose dans la suite que le champ de vecteurs $X$ est différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) et à support compact (c-à-d., $X$ est nul en dehors d'un compact de $\Omega$).

Etant donné un point $x \in \Omega$, intuitivement le flot $g_t^X(x)$ (ou tout simplement $g_t(x)$) désigne la position de $x$ après un déplacement d'une durée $t \in \mathbb{R}$.



On a ainsi une application $g_t^X : \Omega \longrightarrow \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, qui est un difféomorphisme, en vertu de la théorie des équations différentielles (voir théorème ci-dessous). Plus précisément, au champ de vecteurs $X$ est lié un groupe à un paramètre de difféomorphismes $g_t^X$ sur $\Omega$ c'est-à-dire une application différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) : $\Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega$, vérifiant une loi de groupe :

*i*) $\forall t \in \mathbb{R},\ g_t^X : \Omega \longrightarrow \Omega$ est un difféomorphisme de $\Omega$ sur $\Omega$.

*ii*) $\forall t, s \in \mathbb{R},\ g_{t+s}^X = g_t^X \circ g_s^X$.

La condition *ii*) signifie que la correspondance $t \longmapsto g_t^X$, est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe des difféomorphismes de $\Omega$ dans $\Omega$. Elle implique que

$$g_{-t}^X = \left(g_t^X\right)^{-1},$$

car $g_0^X = id_\Omega$ est la transformation identique qui laisse chaque point invariant.

Le groupe à un paramètre de difféomorphismes ou flot $g_t^X$ sur $\Omega$, que l'on vient de décrire admet le champ de vecteurs $X$ pour champ de vitesses

$$\frac{d}{dt} g_t^X(x) = X\left(g_t^X(x)\right),$$

avec la condition initiale

$$g_0^X(x) = x.$$

Evidemment

$$\left.\frac{d}{dt} g_t^X(x)\right|_{t=0} = X(x).$$

Donc par ces formules $g_t^X(x)$ est la courbe sur $\Omega$ qui passe par $x$ et telle que la tangente en chaque point est le vecteur $X\left(g_t^X(x)\right)$.

Nous allons maintenant voir comment construire le flot $g_t^X$ sur $\Omega$.

**Théorème 55** *Le champ de vecteurs $X$ est générateur d'un unique groupe à un paramètre de difféomorphismes de $\Omega$.*

*Démonstration* : *a*) Construction de $g_t^X$ pour $t$ assez petit. Pour $x$ fixé, l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} g_t^X(x) = X\left(g_t^X\right),$$

fonction de $t$ avec la condition initiale

$$g_0^X(x) = x,$$

admet une solution unique $g_t^X$ définie au voisinage du point $x_0$ et dépendant de façon $\mathcal{C}^\infty$ de la condition initiale. Donc $g_t^X$ est localement un difféomorphisme. Dès lors pour chaque point $x_0 \in \Omega$, on peut trouver un voisinage $U(x_0) \subset \Omega$, un nombre réel positif $\varepsilon \equiv \varepsilon(x_0)$ tels que pour tout $t \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$, l'équation différentielle en question avec sa condition initiale admet une solution unique $g_t^X(x)$ différentiable définie dans $U(x_0)$ et vérifiant la relation de groupe

$$g_{t+s}^X(x) = g_t^X \circ g_s^X(x),$$

avec $t, s, t+s \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$. En effet, posons

$$x_1 = g_t^X(x), \quad t \text{ fixé},$$

et considérons la solution de l'équation différentielle satisfaisant dans le voisinage du point $x_0$ à la condition initiale

$$g_{s=0}^X = x_1.$$

Cette solution vérifie la même équation différentielle et coincide en un point

$$g_t^X(x) = x_1,$$

avec la fonction $g_{t+s}^X$. Donc, par unicité de la solution de l'équation différentielle, les deux fonctions sont localement égales. Par conséquent, l'application $g_t^X$ est localement un difféomorphisme. Rappelons que le champ de vecteurs $X$ est supposé différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) et à support compact $K$. Du recouvrement de $K$ formé par des ouverts $U(x)$, on peut extraire un sous-recouvrement fini $(U_i)$, puisque $K$ est compact. Désignons par $\varepsilon_i$ les nombres $\varepsilon$ correspondants aux $U_i$ et posons

$$\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_i), \quad g_t^X(x) = x, \quad x \notin K.$$

Dès lors, l'équation en question admet une solution unique $g_t^X$ sur $\Omega \times \left]-\varepsilon_0, \varepsilon_0\right[$ vérifiant la relation du groupe

$$g_{t+s}^X = g_t^X \circ g_s^X,$$

l'inverse de $g_t^X$ étant $g_{-t}^X$ et donc $g_t^X$ est un difféomorphisme pour $t$ suffisamment petit.

*b*) Construction de $g_t^X$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après *a*), il suffit de construire $g_t^X$ pour $t \in \left]-\infty, -\varepsilon_0\right[ \cup \left]\varepsilon_0, \infty\right[$. Nous allons voir que les applications $g_t^X$ se définissent d'après la loi de multiplication du groupe. Notons que $t$ peut s'écrire sous la forme

$$t = k\frac{\varepsilon_0}{2} + r,$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \left[0, \frac{\varepsilon_0}{2}\right[$. Posons, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_t^X = \underbrace{g_{\frac{\varepsilon_0}{2}}^X \circ \cdots \circ g_{\frac{\varepsilon_0}{2}}^X}_{k-\text{fois}} \circ \ g_r^X,$$

et pour $t \in \mathbb{R}_-^*$,

$$g_t^X = \underbrace{g_{-\frac{\varepsilon_0}{2}}^X \circ \cdots \circ g_{-\frac{\varepsilon_0}{2}}^X}_{k-\text{fois}} \circ \ g_r^X.$$

Les difféomorphismes $g_{\pm\frac{\varepsilon_0}{2}}^X$ et $g_r^X$ ont été définis dans $a$), et on en déduit que pour tout réel $t$, $g_t^X$ est un difféomorphisme défini globalement sur $\Omega$.

**Corollaire 56** *Toute solution de l'équation différentielle*

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = X\,(x\,(t))\,,\ \ x \in \Omega,$$

*avec la condition initiale $x$ (pour $t = 0$), est indéfiniment prolongeable. La valeur de la solution $g_t^X(x)$ à l'instant $t$ est différentiable par rapport à $t$ et à la condition initiale $x$.*

Avec un léger abus de notation, on peut écrire l'équation précédente sous la forme du système d'équations différentielles (9.1) avec les conditions initiales $x_1, ..., x_m$ pour $t = 0$.

Au champ de vecteurs $X$ est lié l'opérateur différentiel $L_X$ d'ordre 1. Il s'agit de la différentiation des fonctions suivant la direction du champ de vecteurs $X$. On a

$$L_X : \mathcal{C}^\infty\,(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty\,(\Omega)\,,\ \ F \longmapsto L_X F,$$

où

$$L_X F(x) = \left.\frac{d}{dt}F\left(g_t^X(x)\right)\right|_{t=0},\ \ x \in \Omega.$$

Ici $\mathcal{C}^\infty\,(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'opérateur $L_X$ est linéaire

$$L_X\,(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) = \alpha_1 L_X F_1 + \alpha_2 L_X F_2,\ \ (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})\,,$$

et satisfait à la formule de Leibniz

$$L_X\,(F_1 F_2) = F_1 L_X F_2 + F_2 L_X F_1.$$

Comme $L_X F(x)$ ne dépend que des valeurs de $F$ au voisinage de $x$, on peut donc appliquer l'opérateur $L_X$ à des fonctions définies seulement au voisinage d'un point, sans avoir besoin de les prolonger à tout $\Omega$. Soit $(x_1, ..., x_m)$ un système de coordonnées locales sur $\Omega$. Dans ce système le champ de vecteurs $X$ a pour composantes $f_1, \ldots, f_m$ et le flot $g_t^X$ est défini par le système d'équations différentielles (9.1). Donc la dérivée de $F = F\,(x_1, ..., x_m)$ suivant la direction de $X$ s'écrit

$$L_X F = f_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + f_m \frac{\partial F}{\partial x_m}.$$

Autrement dit, dans les coordonnées $(x_1, ..., x_m)$ l'opérateur $L_X$ s'écrit

$$L_X = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_m \frac{\partial}{\partial x_m},$$

ceci n'est autre que la forme générale de l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre.

## 10 Equations aux dérivées partielles du 1er ordre

Soit $f$ une fonction de $n$ variables $x_1, x_2, ..., x_n$, continue et partiellement dérivable sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$.

*Une équation aux dérivées partielles du 1er ordre est une relation de la forme*

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 0,$$

*entre les variables $x_1, x_2, ..., x_n$, la fonction $f$ et ses dérivées partielles du 1er ordre.*

Dans le cas de deux variables $x$, $y$, on a

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0.$$

**Exemple 57**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Longleftrightarrow f(x, y) = \varphi(y).$$

**Exemple 58**

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow f(x, y) = \varphi(x).$$

**Exemple 59**

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x).$$

*Si $g$ est intégrable et si $G$ est l'une de ses primitives, alors*

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) - G(x)) = 0,$$

*d'où*

$$f(x, y) = G(x) + \varphi(y).$$

*La solution générale d'une équation aux dérivées partielles du 1er ordre dépend d'une fonction arbitraire.*

Soit le système différentiel

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= \varphi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\ &\vdots\\ \frac{dy_n}{dx} &= \varphi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n),\end{aligned}$$

de solution générale

$$\begin{aligned}y_1 &= f_1(x, c_1, c_2, ..., c_n),\\ &\vdots\\ y_n &= f_n(x, c_1, c_2, ..., c_n).\end{aligned}$$

Si ces équations peuvent être résolues par rapport à $c_1, c_2, ..., c_n$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) &= c_1,\\ &\vdots\\ \Phi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) &= c_n.\end{aligned}$$

Les fonctions $\Phi_1, ..., \Phi_n$, constantes si l'on remplace $y_1, ..., y_n$, par les solutions du sytème sont dites intégrales premières du système.

*En général, on appelle intégrale première d'un système différentiel toute fonction de $x, y_1, ..., y_n$ qui se réduit à une constante si l'on remplace $y_1, ..., y_n$ par une solution du système.* Si $\Phi$ est une telle intégrale première, on a donc

$$\Phi(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) = \text{constante}.$$

**Exercice 10.1** *Déterminer deux intégrales premières du système*

$$\begin{cases} y_1' &= y_3 - y_2\\ y_2' &= y_1 - y_3\\ y_3' &= y_2 - y_1\end{cases}$$

Réponse :
$\Phi_1 = y_1 + y_2 + y_3$,
$\Phi_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

**Exercice 10.2** *Même question pour le système*

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}.$$

*Si le système différentiel*

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= \varphi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\ &\vdots\\ \frac{dy_n}{dx} &= \varphi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n),\end{aligned}$$

*admet $n$ intégrales premières indépendantes, alors la solution générale est définie implicitement en égalant ces intégrales premières à $n$ constantes arbitraires.*

Soit le système différentiel

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z),\\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z).\end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\Phi$ soit une intégrale première de ce système est

$$\Phi(x, y(x), z(x)) = \text{constante},$$

donc

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}.\frac{dy}{dx} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}.\frac{dz}{dx} = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}.f_1(x, y, z) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}.f_2(x, y, z) = 0,$$

c'est l'équation aux dérivées partielles associée au système différentiel. Par conséquent, *une fonction $\Phi(x, y, z)$ est une intégrale première d'un système différentiel si et seulement si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles associée.*

*Soit $f$ une fonction de deux variables. Une équation aux dérivées partielles linéaire du 1er ordre est une relation de la forme*

$$P(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} = R(x, y, z),$$

*où $P$, $Q$, $R$ sont des fonctions de $x$, $y$, $z$ définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.*

Soit $z = f(x, y)$ une solution de l'équation précédente. Posons

$$\Phi(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x},\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y},\\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} &= -1.\end{aligned}$$

L'équation précédente s'écrit

$$P(x,y,z)\frac{\partial \Phi}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial \Phi}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0,$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\frac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)}\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\frac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)}\frac{\partial \Phi}{\partial z}=0.$$

Cette équation aux dérivées partielles peut être considérée d'après ce qui précéde, comme associée au système différentiel

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)},\\ \frac{dz}{dx} &= \frac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)},\end{aligned}$$

ou sous forme plus symétrique

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Ce système est appelé système caractéristique de l'équation aux dérivées partielles. Dès lors,

*Les solutions de l'équation aux dérivées partielles :*

$$P(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y}=R(x,y,z),$$

*sont définies par*

$$\Phi(x,y,z)=0,$$

*où* $\Phi$ *représente l'intégrale première la plus générale du système caractéristique :*

$$\frac{dx}{P(x,y,z)}=\frac{dy}{Q(x,y,z)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Comme $\Phi$ s'exprime au moyen de deux intégrales premières indépendantes $\Phi_1$ et $\Phi_2$, donc l'intégration de l'équation aux dérivées partielles se trouve ramenée à la recherche de deux intégrales premières de son système caractéristique.

**Exercice 10.3** *Trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

*Interprétation géométrique ?*

*Réponse* : $\Phi(x^2+y^2,z)=0$.

**Exercice 10.4** *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=z.$$

*Réponse* : $\Phi(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0$.

**Exercice 10.5** *Intégrer*

$$(x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial x}+2xy\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

*Réponse* : $\Phi(\frac{y}{x^2-y^2},z)=0$.

**Exercice 10.6** *Soit $z=f(x,y)$. Déterminer la surface vérifiant l'équation*

$$yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy,$$

*et passant par la circonférence*

$$\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ z=3 \end{cases}$$

*Réponse* : $x^2+y^2+z^2=25$ (sphère).

**Exercice 10.7** *Déterminer la surface générale de l'équation*

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=-xy,$$

*et la surface intégrale passant par la courbe*

$$\begin{cases} y=x^2 \\ z=x^3 \end{cases}$$

*Réponse* : $\left(\frac{y}{x}\right)^3+\left(\frac{y}{x}\right)^6=xy+z^2$.

**Exercice 10.8** *Déterminer la surface vérifiant l'équation*

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=4,$$

*et passant par la parabole*

$$\begin{cases} y^2=z \\ x=0 \end{cases}$$

*Réponse* : $z = x^2 + y^2$ (paraboloïde de révolution).

On utilise les mêmes méthodes pour étudier une équation de la forme

$$a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = b,$$

où $a_1, ..., a_n, b$ sont fonctions de $x_1, ..., x_n, z$. Le système caractéristique est

$$\frac{dx_1}{a_1} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b}.$$

On détermine $n$ intégrales premières indépendantes :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, ..., x_n, z) &= c_1, \\ &\vdots \\ \varphi_n(x_1, ..., x_n, z) &= c_n, \end{aligned}$$

et la solution générale de l'équation ci-dessus s'écrit sous la forme

$$\Phi(\varphi_1, ..., \varphi_n) = 0,$$

où $\Phi$ est une fonction dérivable arbitraire.

## 11 Equations aux dérivées partielles du 2ème ordre

Soit $f$ une fonction de deux variables $x$ et $y$. On appelle équation aux dérivées partielles du 2ème ordre, une relation de la forme

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0,$$

faisant intervenir $f$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2. Cette équation s'écrit encore sous la forme

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0.$$

**Exemple 60**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = g(y),$$

*d'où*

$$f(x, y) = xg(y) + h(y),$$

*où $g$ et $h$ sont des fonctions arbitraires.*

**Exemple 61**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \varphi(x),$$

*d'où*

$$f(x,y) = \Phi(x) + \Psi(y),$$

*où* $\Phi$ *et* $\Psi$ *sont des fonctions arbitraires.*

*La solution d'une équation aux dérivées partielles du 2ème ordre dépend de deux fonctions arbitraires.*

Considérons une équation aux dérivées patielles du second ordre de la forme

$$a(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad (11.1)$$

où $z = f(x,y)$ est la fonction inconnue et $a$, $b$, $c$, $F$ sont des fonctions données dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$.

On cherche une solution $z$ de l'équation ci-dessus en supposant que la valeur de $z$ sur une courbe $\gamma$ ainsi que celle de ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont connues. Autrement dit, on cherche une solution $z$ de cette équation connaissant $z$ et la dérivée normale $\frac{\partial z}{\partial n}$ sur $\gamma$ (*problème de Cauchy*).

Une caractéristique (Monge) pour l'équation ci-dessus est une courbe dans $D$ satisfaisant à l'équation différentielle :

$$a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + c = 0. \qquad (11.2)$$

L'équation (11.1) est dite du type :

**(i)** *hyperbolique* dans $D$ si en tout point de $D$, $b^2 - ac > 0$. Dans ce cas, on peut résoudre l'équation (11.2) localement ce qui montre que par tout point passent deux caractéristiques réelles. On montre que la transformation

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} x + y, \\ \eta &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} x + y, \end{aligned}$$

où $a \neq 0$, ramène l'équation (11.1) à une équation du type

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right),$$

et s'appelle forme canonique de type hyperbolique.

**Exemple 62** *L'équation des cordes vibrantes :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

*où $z(x,t)$ est le déplacement du point d'abcisse $x$ à l'instant $t$. C'est une équation hyperbolique ($a = 1$, $b = 0$, $c = -k^2$). Elle se généralise à trois dimensions spaciales en l'équation des ondes :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

**(ii)** *parabolique* si $b^2 - ac = 0$. Dans ce cas, les deux caractéristiques sont confondues. Supposons que $a \neq 0$ et posons

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{b}{a}x + y, \\ \eta &= \frac{-b}{a}x + y. \end{aligned}$$

L'équation (11.1) s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right),$$

et s'appelle forme canonique de type parabolique.

**Exemple 63** *L'équation de la chaleur :*

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

*où $t$ est le temps, $z$ est la température d'un corps et $\alpha$ une constante. C'est une équation parabolique ($a = \alpha^2$, $b = c = 0$).*

**(iii)** *elliptique* si $b^2 - ac < 0$. Dans ce cas, les caractéristiques sont imaginaires. Si $a \neq 0$, la transformation

$$\begin{aligned} \xi &= -\frac{b}{a}x + y, \\ \eta &= \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}x. \end{aligned}$$

permet d'écrire l'équation (11.1) sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right),$$

et s'appelle forme canonique de type elliptique.

**Exemple 64** *L'équation des fonctions harmoniques (ou équation de Laplace à deux variables) :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

*est elliptique ($a = c = 1$, $b = 0$). En dimension trois, l'équation de Laplace (ou équation du potentiel) s'écrit*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

**Exercice 11.1** *Montrer que toute solution de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation des cordes vibrantes :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

*est de la forme*

$$z = g(x - t) + h(x + t),$$

*où $g$ et $h$ sont des fonctions quelconques de classe $\mathcal{C}^2$.*

**Exercice 11.2** *Etant données deux fonctions $u \in \mathcal{C}^2[a, b]$ et $v \in \mathcal{C}^2[a, b]$, trouver une solution $z(x, t)$ de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

*telle que pour $t = 0$ et $x \in [a, b]$,*

$$z(x, 0) = u(x), \qquad \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) = v(x).$$

**Exercice 11.3** *Intégrer l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x + y,$$

<u>*Réponse*</u> : $z = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 y}{2} + g_1(y)x + g_2(y)$ où $g_1$ et $g_2$ sont des fonctions arbitraires de $y$.

**Exercice 11.4** *Déterminer la solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (1 + y^2)z,$$

*vérifiant les conditions initiales suivantes :*

$$z(0, y) = y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(0, y) = 0.$$

<u>*Réponse*</u> : $z = y \cosh\left(x\sqrt{1+y^2}\right)$.

**Exercice 11.5** *Réduire à la forme canonique l'équation aux dérivées partielles :*

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

<u>*Réponse*</u> : $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{1}{2\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}$.

**Exercice 11.6** *Réduire à la forme canonique l'équation :*

$$\sin^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y\sin x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

<u>*Réponse*</u> : $\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial z}{\partial\xi}$.

**Exercice 11.7** *Réduire à la forme canonique l'équation :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

<u>*Réponse*</u> : $\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2} = 0$.

**Exercice 11.8** *On considère l'équation aux dérivées partielles de fonction inconnue $z(x,y)$ :*

$$x^4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

*a) Déterminer ses caractéristiques.*
*b) Former l'intégrale générale de cette équation.*
*c) Déterminer des solutions élémentaires de cette équation par la méthode de séparation des variables.*

<u>*Réponse*</u> :
a) $y = \frac{1}{x} + C_1$ et $y = \frac{1}{x} + C_2$, ($C_1$, $C_2$ : constantes).
b) $z(x,y) = \frac{x}{2}(g(\frac{1}{x}+y) + h(-\frac{1}{x}+y))$, ($g$, $h$ : fonctions arbitraires).
c) Si $\lambda > 0$, alors $z(x,y) = x(Ae^{-\sqrt{\lambda}y} + Be^{\sqrt{\lambda}y})(Ce^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{x}} + De^{\frac{\sqrt{\lambda}}{x}y})$. Si $\lambda = 0$, alors $z(x,y) = (A+By)(Cx+D)$. Si $\lambda < 0$, alors $z(x,y) = x(A\cos(-\sqrt{\lambda}y) + B\sin\sqrt{\lambda}y)(C\cos(-\frac{\sqrt{\lambda}}{x}) + D\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{x}y)$. ($A$, $B$, $C$, $D$ : constantes).

**Exercice 11.9** *Déterminer la solution de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \sin(\alpha x - \omega t),$$

*qui satisfait aux conditions initiales*

$$z(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = 0.$$

*Réponse* :
$z(x,t) = \frac{1}{2\alpha(\alpha-\lambda)}\sin\alpha(x-kt) + \frac{1}{2\alpha(\alpha+\lambda)}\sin\alpha(x+kt) + \frac{1}{\lambda^2-\alpha^2}\sin(\alpha x-\omega t)$, $\lambda = \frac{\omega}{k}$.

**Exercice 11.10** *Résoudre l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - 6\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0.$$

*Réponse* : $z(x,y) = f(x) + g(2x+y) + h(-3x+y)$, ($f$, $g$, $h$ : fonctions arbitraires).

**Exercice 11.11** *(Problème de Dirichlet). Etant donné un domaine $D$ dont le bord $\partial D$ est une courbe et $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ une fonction continuen, chercher une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\overline{D}) \cap \mathcal{C}^2(D)$ telle que :*

$$\Delta f = 0 \text{ sur } D, \qquad f|_{\partial D} = \varphi.$$

**Exercice 11.12** *(Problème de Neumann). Sous les mêmes hypothèses (exercice précédent) sur $D$ et étant donnée une fonction continue $\psi : \partial D \longrightarrow \mathbb{R}$, chercher une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\overline{D}) \cap \mathcal{C}^2(D)$ telle que :*

$$\Delta f = 0 \text{ sur } D, \qquad \partial_\nu f|_{\partial D} = \psi.$$

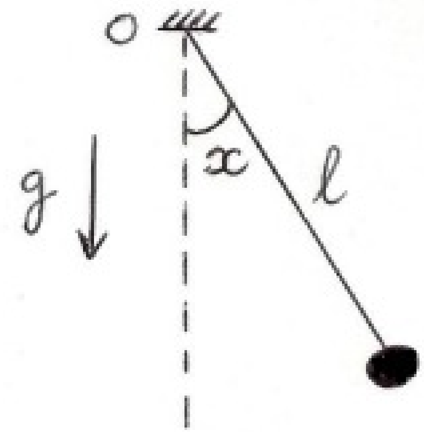
*($\partial_\nu$ représente la dérivation suivant le vecteur unitaire normal extérieur).*

## 12 Compléments : Résolution de quelques équations différentielles non linéaires

**Le pendule simple :**

La résolution de l'équation différentielle du mouvement du pendule simple n'est étudiée ordinairement que dans le cas de petites oscillations car la résolution dans le cas général n'est pas aisée. Nous allons voir que dans le cas général cette équation est résoluble sous forme explicite au moyen d'intégrales elliptiques, donc sa solution s'obtient à l'aide de fonctions elliptiques. Ces dernières sont des fonctions méromorphes doublement périodiques (pour de plus amples informations sur les fonctions et intégrales elliptiques, on pourra consulter avec profit notre article [9]).

Le pendule simple est constitué par un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil (ou une tige théoriquement sans masse) astreint à se mouvoir sans frottement sur un cercle vertical. On désigne par $l$ la longueur du fil (c-à-d., le rayon du cercle), $g$ l'accélération de la pesanteur et $x$ l'angle instantané du fil avec la verticale.




L'équation du mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin x = 0. \tag{12.1}$$

Posons

$$\theta = \frac{dx}{dt},$$

l'équation (12.1) s'écrit

$$\theta d\theta + \frac{g}{l} \sin x dx = 0.$$

En intégrant, on obtient

$$\frac{\theta^2}{2} = \frac{g}{l} \cos x + C,$$

où $C$ est une constante. Lorsque $t = 0$, $x = x_0$ (angle initial), alors $\theta = 0$ (la vitesse est nulle), d'où

$$C = -\frac{g}{l} \cos x_0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{l}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= \frac{l}{2g}\theta^2, \\ &= \cos x - \cos x_0. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Nous allons étudier plusieurs cas :

*a)* Considérons le cas d'un mouvement oscillatoire, i.e., le cas où la masse passe de $x = x_0$ (le plus grand angle atteint par le pendule ; il y correspond une vitesse $\theta = 0$) à $x = 0$ (vitesse maximale). Comme

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2},$$

alors l'équation (12.2) devient

$$\frac{l}{4g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \sin^2\frac{x_0}{2} - \sin^2\frac{x}{2}. \tag{12.3}$$

Posons

$$\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x_0}{2}\sin\varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \sin\frac{x_0}{2}\cos\varphi d\varphi,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}dx = \sin\frac{x_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}d\varphi,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{x_0}{2}\sin^2\varphi}dx = \sin\frac{x_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}d\varphi,$$

et donc

$$dx = \frac{2\sin\frac{x_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{x_0}{2}\sin^2\varphi}}d\varphi.$$

Par substitution dans (12.3), on obtient

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\left(1-k^2\sin^2\varphi\right),$$

où $k = \sin\dfrac{x_0}{2}$ est le module et $\dfrac{x_0}{2}$ l'angle modulaire. Notons que pour $x = 0$ on a $\varphi = 0$ et dès lors

$$t = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

D'après la théorie des fonctions et intégrales elliptiques, on a donc

$$\varphi = \pm\mathbf{am}\sqrt{\frac{g}{l}}t, \qquad \sin\varphi = \pm\sin\mathbf{am}\sqrt{\frac{g}{l}}t = \pm\mathbf{sn}\sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

où $\mathbf{am}\sqrt{\frac{g}{l}}t$ est l'amplitude de $\sqrt{\frac{g}{l}}t$ et $\mathbf{sn}\sqrt{\frac{g}{l}}t$ est la fonction elliptique de Jacobi (pour les définitions et propriétés concernant ces fonctions, voir par exemple [9]). Par conséquent

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sin\frac{x_0}{2}\mathbf{sn}\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

*b)* Considérons le cas d'un mouvement circulaire. On écrit l'équation (12.2) sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{l}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= 1-2\sin^2\frac{x}{2}-\cos x_0,\\ &= (1-\cos x_0)\left(1-k^2\sin^2\frac{x}{2}\right),\end{aligned}$$

où

$$k^2=\frac{2}{1-\cos x_0},$$

avec $0<k<1$. En tenant compte de la condition initiale $x(0)=0$, on obtient

$$dt=\pm\sqrt{\frac{2l}{g(1-\cos x_0)}}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad \varphi=\frac{x}{2}.$$

Donc

$$\varphi=\pm\mathbf{am}\sqrt{\frac{g(1-\cos x_0)}{2l}}t,$$

et

$$x=\pm 2\mathbf{am}\sqrt{\frac{g(1-\cos x_0)}{2l}}t.$$

*c)* Considérons enfin le cas d'un mouvement asymptotique. C'est le cas où $x_0=\pm\pi$ et l'équation (12.2) s'écrit

$$\frac{l}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\cos x+1=2\cos^2\frac{x}{2}.$$

D'où

$$t=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^x\frac{dx}{\cos\frac{x}{2}}=\pm\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\tan\left(\frac{x}{\pi}+\frac{\pi}{4}\right),$$

et

$$x=4\arctan e^{\pm\sqrt{\frac{g}{l}}t}-\pi.$$

On vérifie que $x\to\pm\pi$ quand $t\to\infty$.

**Remarque 65** *Pour des petites oscillations, on peut approcher* $\sin x$ *par* $x$ *et l'équation (12.1) se ramène à une équation linéaire,*

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}x=0,$$

*dont la solution générale est immédiate :*

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2\sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

*où*

$$C_1 = x(0), \qquad C_2 = \frac{dx}{dt}(0).$$

*Pour des petites oscillations la période $T$ du pendule (le temps nécessité pour une oscillation complète ; un aller-retour) est*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

*Par contre, dans le cas des oscillations qui ne sont pas nécessairement petites, la période vaut*

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},$$

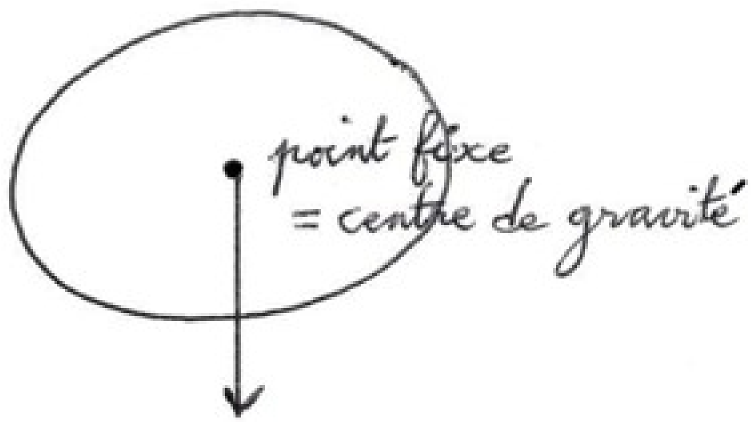
*avec* $k = \sin\frac{x_0}{2}$.

**Le corps solide d'Euler :**

Les équations du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe s'écrivent, dans le cas d'Euler, sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dm_1}{dt} &= (\lambda_3-\lambda_2)\, m_2m_3, \\ \frac{dm_2}{dt} &= (\lambda_1-\lambda_3)\, m_1m_3, \\ \frac{dm_3}{dt} &= (\lambda_2-\lambda_1)\, m_1m_2, \end{aligned} \tag{12.4}$$

où $m_1, m_2, m_3$ sont les composantes du moment angulaire du solide et $\lambda_i \equiv I_i^{-1}$ avec $I_1, I_2, I_3$ les moments d'inertie du solide. Ici le point fixe est le centre de gravité du solide.




Nous allons résoudre explicitement ce problème. Notons d'abord que que les équations admettent deux intégrales premières quadratiques :

$$H_1 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2\right),$$

et

$$H_2 = \frac{1}{2}\left(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2\right).$$

Nous supposerons que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont tous différents de zero[1]. Dans ces conditions, $H_1 = 0$ entraine $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ et donc $H_2 = 0$; le solide est au repos. Nous écartons ce cas trivial et supposons dorénavant que $H_1 \neq 0$ et $H_2 \neq 0$. Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, les équations (12.4) montrent évidemment que $m_1$, $m_2$ et $m_3$ sont des constantes. Supposons par exemple que $\lambda_1 = \lambda_2$, les équations (12.4) s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
\frac{dm_1}{dt} &= (\lambda_3 - \lambda_1)\, m_2 m_3, \\
\frac{dm_2}{dt} &= (\lambda_1 - \lambda_3)\, m_1 m_3, \\
\frac{dm_3}{dt} &= 0.
\end{aligned}$$

On déduit alors que $m_3 = \text{constante} \equiv A$ et

$$\begin{aligned}
\frac{dm_1}{dt} &= A\,(\lambda_3 - \lambda_1)\, m_2, \\
\frac{dm_2}{dt} &= A\,(\lambda_1 - \lambda_3)\, m_1.
\end{aligned}$$

[1] C'est-à-dire que le solide n'est pas réduit à un point et n'est pas non plus concentré sur une droite.

Notons que

$$\frac{d}{dt}(m_1 + im_2) = iA(\lambda_1 - \lambda_3)(m_1 + im_2),$$

on obtient

$$m_1 + im_2 = Ce^{iA(\lambda_1 - \lambda_3)t},$$

où $C$ est une constante et donc

$$\begin{aligned} m_1 &= C\cos A(\lambda_1 - \lambda_3)t, \\ m_2 &= C\sin A(\lambda_1 - \lambda_3)t, \end{aligned}$$

L'intégration des équations d'Euler est délicate dans le cas général où $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont tous différents ; les solutions s'expriment à l'aide de fonctions elliptiques. Dans la suite nous supposerons que $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_3$ sont tous différents et nous écartons les autres cas triviaux qui ne posent aucune difficulté pour la résolution des équations en question. Pour fixer les idées nous supposerons dans la suite que : $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Géométriquement, les équations

$$\lambda_1 m_1^2 + \lambda_2 m_2^2 + \lambda_3 m_3^2 = 2H_1, \tag{12.5}$$

et

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 2H_2 \equiv r^2, \tag{12.6}$$

représentent respectivement les équations de la surface d'un ellipsoide de demi-axes : $\sqrt{\frac{2H_1}{\lambda_1}}$ (demi grand axe),$\sqrt{\frac{2H_1}{\lambda_2}}$(demi axe moyen),$\sqrt{\frac{2H_1}{\lambda_3}}$(demi petit axe), et d'une sphère de rayon r. Donc le mouvement du solide s'effectue sur l'intersection d'un ellipsoide avec une sphère. Cette intersection a un sens car en comparant (12.5) à (12.6), on voit que $\frac{2H_1}{\lambda_1} < r^2 < \frac{2H_1}{\lambda_3}$, ce qui signifie géométriquement que le rayon de la sphère (12.6) est compris entre le plus petit et le plus grand des demi-axes de l'ellipsoïde (12.5). Pour étudier l'allure des courbes d'intersection de l'ellipsoïde (12.5) avec la sphère (12.6), fixons $H_1 > 0$ et faisons varier le rayon r. Comme $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, les demi-axes de l'ellipsoïde seront $\frac{2H_1}{\lambda_1} > \frac{2H_1}{\lambda_2} > \frac{2H_1}{\lambda_3}$. Si le rayon r de la sphère est inférieur au demi petit axe $\frac{2H_1}{\lambda_3}$ ou supérieur au demi grand axe $\frac{2H_1}{\lambda_1}$, alors l'intersection en question est vide ( et aucum mouvement réel ne correspond à ces valeurs de $H_1$ et r). Lorsque le rayon r est égal à $\frac{2H_1}{\lambda_3}$, alors l'intersection est composée de deux points. Lorsque le rayon $r$ augmente $\left(\frac{2H_1}{\lambda_3} < r < \frac{2H_1}{\lambda_2}\right)$, on obtient deux courbes autour des extrémités du demi petit axe. De même si $r = \frac{2H_1}{\lambda_1}$, on obtient les deux extrémités du demi grand axe et si $r$ est légérement inférieur à $\frac{2H_1}{\lambda_1}$, on obtient deux courbes fermées au voisinage de ces extrémités. Enfin, si $r = \frac{2H_1}{\lambda_2}$ alors l'intersection en question est constituée de deux cercles.

**Théorème 66** *Les équations différentielles (12.4) d'Euler, s'intégrent au moyen de fonctions elliptiques de Jacobi.*

*Démonstration* : A partir des intégrales premières (12.5) et (12.6), on exprime $m_1$ et $m_3$ en fonction de $m_2$. On introduit ensuite ces expressions dans la seconde équation du système (12.4) pour obtenir une équation différentielle en $m_2$ et $\frac{dm_2}{dt}$ seulement. De manière plus détaillée, on tire aisément de (12.5) et (12.6) les relations suivantes

$$m_1^2 = \frac{2H_1 - r^2\lambda_3 - (\lambda_2 - \lambda_3)\, m_2^2}{\lambda_1 - \lambda_3}, \tag{12.7}$$

$$m_3^2 = \frac{r^2\lambda_1 - 2H_1 - (\lambda_1 - \lambda_2)\, m_2^2}{\lambda_1 - \lambda_3}. \tag{12.8}$$

En substituant ces expressions dans la seconde équation du système (12.4), on obtient

$$\frac{dm_2}{dt} = \sqrt{(2H_1 - r^2\lambda_3 - (\lambda_2 - \lambda_3)\, m_2^2)(r^2\lambda_1 - 2H_1 - (\lambda_1 - \lambda_2)\, m_2^2)}.$$

En intégrant cette équation, on obtient une fonction $t(m_2)$ sous forme d'une intégrale elliptique. Pour réduire celle-ci à la forme standard, on peut supposer que $r^2 > \frac{2H_1}{\lambda_2}$ (sinon, il suffit d'intervertir les indices 1 et 3 dans toutes les formules précédentes). On réecrit l'équation précédente, sous la forme

$$\frac{dm_2}{\sqrt{(2H_1 - r^2\lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}dt} = \sqrt{(1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2H_1 - r^2\lambda_3}m_2^2)(1 - \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{r^2\lambda_1 - 2H_1}m_2^2)}.$$

En posant

$$\tau = t\sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)},$$

$$s = m_2\sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2H_1 - r^2\lambda_3}},$$

on obtient

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(2H_1 - r^2\lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}s^2)},$$

ce qui suggère de choisir comme module des fonctions elliptiques

$$k^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(2H_1 - r^2\lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(r^2\lambda_1 - 2H_1)}.$$

Les inégalités $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, $\frac{2H_1}{\lambda_1} < r^2 < \frac{2H_1}{\lambda_3}$ et $r^2 > \frac{2H_1}{\lambda_2}$ montrent qu'effectivement $0 < k^2 < 1$. On obtient donc

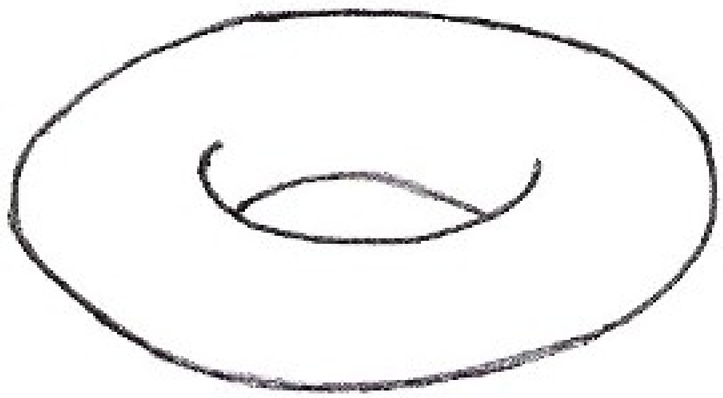
$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)}.$$

Cette équation admet la solution[2]

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

C'est l'intégrale d'une différentielle holomorphe sur une courbe elliptique

$$\mathcal{E} : w^2 = (1-s^2)(1-k^2s^2).$$



(Courbe elliptique)

La fonction inverse $s(\tau)$ constitue l'une des fonctions elliptiques de Jacobi : $s = \mathbf{sn}\tau$, qui détermine également $m_2$ en fonction du temps, c-à-d.,

$$m_2 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}} \cdot \mathbf{sn}\tau.$$

D'après les égalités (12.7) et (12.8), on sait que les fonctions $m_1$ et $m_3$ s'expriment algébriquement à l'aide de $m_2$, donc

$$m_1 = \sqrt{\frac{2H_1 - r^2\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}} \cdot \sqrt{1 - \mathbf{sn}^2\tau},$$

et

$$m_3 = \sqrt{\frac{r^2\lambda_1 - 2H_1}{\lambda_1 - \lambda_3}} \cdot \sqrt{1 - k^2\mathbf{sn}^2\tau}.$$

[2]On convient de choisir l'origine des temps telle que $m_2 = 0$ pour $t = 0$.

Compte tenu de la définition des deux autres fonctions elliptiques (voir [9])

$$\begin{aligned}\mathbf{cn}\tau &= \sqrt{1-\mathbf{sn}^2\tau},\\ \mathbf{dn}\tau &= \sqrt{1-k^2\mathbf{sn}^2\tau},\end{aligned}$$

et du fait que

$$\tau = t\sqrt{(\lambda_2-\lambda_3)(r^2\lambda_1-2H_1)},$$

on obtient finalement les formules explicites suivantes :

$$\begin{aligned}m_1 &= \sqrt{\frac{2H_1-r^2\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3}}\mathbf{cn}(t\sqrt{(\lambda_2-\lambda_3)(r^2\lambda_1-2H_1)}),\\ m_2 &= \sqrt{\frac{2H_1-r^2\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3}}\mathbf{sn}(t\sqrt{(\lambda_2-\lambda_3)(r^2\lambda_1-2H_1)}),\\ m_3 &= \sqrt{\frac{r^2\lambda_1-2H_1}{\lambda_1-\lambda_3}}\mathbf{dn}(t\sqrt{(\lambda_2-\lambda_3)(r^2\lambda_1-2H_1)}).\end{aligned} \tag{12.9}$$

Autrement dit, l'intégration des équations d'Euler s'effectue au moyen de fonctions elliptiques de Jacobi.

**Remarque 67** *Notons que pour $\lambda_1=\lambda_2$, on a $k^2=0$. Dans ce cas, les fonctions elliptiques $\mathbf{sn}\tau, \mathbf{cn}\tau, \mathbf{dn}\tau$ se réduisent respectivement aux fonctions $\sin\tau, \cos\tau, 1$. Dès lors de (12.9), on tire aisément que*

$$\begin{aligned}m_1 &= \sqrt{\frac{2H_1-r^2\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3}}\cos\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(r^2\lambda_1-2H_1)}t,\\ m_2 &= \sqrt{\frac{2H_1-r^2\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3}}\sin\sqrt{(\lambda_1-\lambda_3)(r^2\lambda_1-2H_1)}t,\\ m_3 &= \sqrt{\frac{r^2\lambda_1-2H_1}{\lambda_1-\lambda_3}}.\end{aligned}$$

*On retrouve les solutions établies précédemment avec*

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{\frac{r^2\lambda_1-2H_1}{\lambda_1-\lambda_3}},\\ C &= \sqrt{\frac{2H_1-r^2\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3}}.\end{aligned}$$

**Solutions méromorphes :**

Soit le système d'équations différentielles non-linéaires

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, ..., x_m), \\ &\vdots \\ \dot{x}_m &= f_m(t, x_1, ..., x_m), \end{aligned} \tag{12.10}$$

où $f_1, ..., f_m$ sont des fonctions de $m+1$ variables complexes $t, x_1, ..., x_m$ et qui appliquent un domaine de $\mathbb{C}^{m+1}$ dans $\mathbb{C}$. Le problème de Cauchy consiste en la recherche d'une solution $(x_1(t), ..., x_m(t))$ dans un voisinage d'un point $t_0$, passant par le point donné $(t_0, x_1^0, ..., x_m^0)$ c'est-à-dire satisfaisant aux conditions initiales $x_1(t_0) = x_1^0, ..., x_m(t_0) = x_m^0$. Le système (12.10) peut s'écrire sous forme vectorielle dans $\mathbb{C}^m$

$$\dot{x} = f(t, x(t)),$$

en posant $x = (x_1, ..., x_m)$ et $f = (f_1, ..., f_m)$. Dans ce cas, le problème de Cauchy consistera à déterminer la solution $x(t)$ telle que $x(t_0) = x_0 = (x_1^0, ..., x_m^0)$. On sait que lorsque les fonctions $f_1, ..., f_m$ sont holomorphes au voisinage du point $(t_0, x_1^0, ..., x_m^0)$ alors le problème de Cauchy admet une solution holomorphe et une seule. Une question se pose : le problème de Cauchy peut-il admettre quelque solution non holomorphe au voisinage du point $(t_0, x_1^0, ..., x_m^0)$? Lorsque les fonctions $f_1, ..., f_m$ sont holomorphes, la réponse est négative. D'autres circonstances peuvent se produire pour le problème de Cauchy relatif au système d'équations différentielles (12.10), lorsque l'hypothèse d'holomorphie relative aux fonctions $f_1, ..., f_m$ n'est plus satisfaite au voisinage d'un point. On constate dans une telle éventualité que les comportements des solutions peuvent revêtir les aspects les plus divers. En général, les singularités des solutions sont de deux types : mobiles ou fixes, suivant qu'elles dépendent ou non des conditions initiales. Des résultats importants ont été obtenus par Painlevé [15]. Supposons par exemple que le système (12.10) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{P_1(t, x_1, ..., x_m)}{Q_1(t, x_1, ..., x_m)}, \\ &\vdots \\ \dot{x}_m &= \frac{P_m(t, x_1, ..., x_m)}{Q_m(t, x_1, ..., x_m)}, \end{aligned}$$

avec

$$P_k(t, x_1, ..., x_m) = \sum_{0 \leq i_1, ..., i_m \leq p} A^{(k)}_{i_1, ..., i_m}(t)\, x_1^{i_1} ... x_m^{i_m},\ 1 \leq k \leq m,$$

$$Q_k(t, x_1, ..., x_m) = \sum_{0 \leq j_1, ..., j_m \leq q} B^{(k)}_{j_1,...,j_m}(t)\, x_1^{j_1}...x_m^{j_m},\ 1 \leq k \leq m,$$

des polynômes à plusieurs indéterminées $x_1, ..., x_m$ et à coefficients algébriques en $t$. On sait

$(i)$ que les singularités fixes sont constituées par quatre ensembles de points. Le premier est l'ensemble des points singuliers des coefficients $A^{(k)}_{i_1,...,i_m}(t)$, $B^{(k)}_{j_1,...,j_m}(t)$ intervenant dans les polynômes $P_k(t, x_1, ..., x_m)$ et $Q_k(t, x_1, ..., x_m)$. En général cet ensemble contient le point $t = \infty$. Le second ensemble est constitué des points $\alpha_j$ tels que : $Q_k(t, x_1, ..., x_m) = 0$, circonstance qui se produit si les coefficients $B^{(k)}_{j_1,...,j_m}(t)$ s'annulent tous pour $t = \alpha_j$. Le troisième est l'ensemble des points $\beta_l$ tels que pour certaines valeurs $(x_{1'}, ..., x_{m'})$ de $(x_1, ..., x_m)$, on ait $P_k(\beta_l, x_{1'}, ..., x_{m'}) = Q_k(\beta_l, x_{1'}, ..., x_{m'}) = 0$. Dès lors les seconds membres du système ci dessus se présentent sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ aux points $(\beta_l, x_{1'}, ..., x_{m'})$. Enfin, l'ensemble des points $\gamma_n$ tels qu'il existe des valeurs $u_1, ..., u_m$, pour lesquelles $R_k(\gamma_n, u_1, ..., u_m) = S_k(\gamma_n, u_1, ..., u_m) = 0$, où $R_k$ et $S_k$ sont des polynômes en $u_1, ..., u_m$ obtenus à partir de $P_k$ et $Q_k$ en posant $x_1 = \frac{1}{u_1}, \ldots, x_m = \frac{1}{u_m}$. Chacun de ces ensembles ne comporte qu'un nombre fini d'éléments. Les singularités fixes du système en question sont en nombre fini.

$(ii)$ que les singularités mobiles de solutions de ce système sont des singularités mobiles algébriques : pôles et (ou) points critiques algébriques. Il n'y a pas de points singuliers essentiels pour la solution $(x_1, ..., x_m)$.

Considérant le système d'équations différentielles (12.10), peut-on trouver des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de solutions méromorphes ? Nous établirons un théorème d'existence et d'unicité pour la solution du problème de Cauchy relatif au système d'équations différentielles (12.10), en faisant appel à la méthode des coefficients indéterminés. La solution sera explicitée sous la forme d'une série de Laurent. Il se posera dès lors le problème de la convergence. Celui-ci sera résolu par la méthode des fonctions majorantes (pour cette notion voir par exemple [6], [7]). Nombreux sont les problèmes, aussi bien théorique que pratique, ou apparaissent des équations différentielles dont le second membre n'est pas holomorphe.

Dans ce qui suivra, nous envisagerons le problème de Cauchy relatif au système normal (12.10) dans l'hypothèse où $f_1, ..., f_m$ ne dépendent pas explicitement de $t$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, ..., x_m), \\ &\vdots \\ \dot{x}_m &= f_m(x_1, ..., x_m). \end{aligned} \tag{12.11}$$

On suppose que $f_1, ..., f_m$ sont des fonctions rationnelles en $x_1, ..., x_m$ et que le système (12.11) est quasi-homogène, c'est-à-dire ils existent des entiers positifs

$s_1, ..., s_m$ telles que

$$f_i\left(\alpha^{s_1} x_1, ..., \alpha^{s_m} x_m\right) = \alpha^{s_i+1} f_i\left(x_1, ..., x_m\right), \quad 1 \leq i \leq m,$$

pour chaque constante non nulle $\alpha$. Autrement dit, le système (12.11) est invariant par la transformation

$$t \longrightarrow \alpha^{-1} t, \quad x_1 \longrightarrow \alpha^{s_1} x_1, \ldots, \quad x_m \longrightarrow \alpha^{s_m} x_m.$$

Notons que si le déterminant

$$\Delta \equiv \det\left(x_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_{ij} f_i\right)_{1\leq i,j\leq m},$$

est non identiquement nul, alors le choix des nombres $s_1, ..., s_m$ est unique.

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons, pour simplifier que $t_0 = x_0 = 0$, ce qui n'affecte pas la généralité des résultats.

**Théorème 68** *Supposons que*

$$x_i = \frac{1}{t^{s_i}} \sum_{k=0}^{\infty} c_i^{(k)} t^k, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{12.12}$$

*où $c^{(0)} \neq 0$, soit la solution formelle en séries de Laurent, obtenue par la méthode des coefficients indéterminés, du système quasi-homogène (12.11). Alors, les coefficients $c_i^{(0)}$ satisfont aux équations non-linéaires*

$$s_i c_i^{(0)} + f_i\left(c_1^{(0)}, ..., c_m^{(0)}\right) = 0, \tag{12.13}$$

*où $1 \leq i \leq m$, tandis que $c_i^{(1)}, c_i^{(2)}, ...$ satisfont chacun à un système d'équations linéaires de la forme*

$$\left(\mathcal{M} - k\mathcal{I}\right) c^{(k)} = \textit{polynôme en} \quad c_i^{(0)}, ..., c_i^{(k-1)}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad k \geq 1, \tag{12.14}$$

*où $c^{(k)} = \left(c_1^{(k)}, ..., c_m^{(k)}\right)^\top$ et*

$$\mathcal{M} \equiv \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(c_1^{(0)}, ..., c_m^{(0)}\right) + \delta_{ij} s_i\right)_{1\leq i,j\leq m},$$

*est la matrice jacobienne de (12.14). En outre, la série (12.13) est convergente.*

*Démonstration* : En substituant (12.13) dans (12.11), tout en tenant compte de la quasi-homogénéité du système, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty}(k-s_i)\,c_i^{(k)}t^{k-s_i-1}\\
&\qquad = f_i\left(\sum_{k=0}^{\infty}c_1^{(k)}t^{k-s_1},...,\sum_{k=0}^{\infty}c_m^{(k)}t^{k-s_m}\right),\\
&\qquad = f_i\left(t^{-s_1}\left(c_1^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}c_1^{(k)}t^k\right),...,t^{-s_m}\left(c_m^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}c_m^{(k)}t^k\right)\right),\\
&\qquad = t^{-s_i-1}f_i\left(c_1^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}c_1^{(k)}t^k,...,c_m^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}c_m^{(k)}t^k\right).
\end{aligned}$$

Ensuite, on développe le second membre comme suit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}(k-s_i)c_i^{(k)}t^k &= f_i\left(c_1^{(0)},...,c_n^{(0)}\right)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(c_1^{(0)},...,c_m^{(0)}\right)\sum_{k=1}^{\infty}c_j^{(k)}t^k\\
&\quad +\sum_{k=2}^{\infty}t^k\sum_{(\alpha,\tau)\in\Delta_k}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f_i}{\partial x^\alpha}\left(c_1^{(0)},...,c_m^{(0)}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(c_j^{(\tau_j)}\right)^{\alpha_j},
\end{aligned}$$

où $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_m)$, $\tau=(\tau_1,...,\tau_m)$, $|\alpha|=\sum_{j=1}^m\alpha_j$, $\alpha!=\prod_{j=1}^m\alpha_j!$,

$$\Delta_k=\left\{(\alpha,\tau):\tau_j>0,\forall j,|\alpha|>2,\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\tau_j=k\right\}.$$

En identifiant les termes ayant même puissance au premier et au second membre, on obtient successivement pour $k=0$ l'expression (12.14), pour $k=1$, $(\mathcal{M}-\mathcal{I})\,c^{(1)}=0$, et pour $k\geq 2$,

$$\left((\mathcal{M}-k\mathcal{I})\,c^{(k)}\right)_i=-\sum_{(\alpha,\tau)\in D_k}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f_i}{\partial x^\alpha}\left(c_1^{(0)},...,c_m^{(0)}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(c_j^{(\tau_j)}\right)^{\alpha_j},\qquad(12.15)$$

où $\tau_j>0$, $\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\tau_j=k$, ce qui conduit aux expressions explicites (12.15). La solution obtenue par la méthode des coefficients indéterminés est formelle du fait que nous l'obtenons en effectuant sur des séries, que nous supposons a priori convergentes, diverses opérations dont la validité reste à justifier. Le théorème se trouvera donc établi dès que nous aurons vérifié que ces séries sont convergentes. On utilise à cette fin la méthode des fonctions majorantes. Notons tout d'abord que des paramètres libres apparaissent soit dans le système (12.14) de $m$ équations à $m$ inconnues, lorsque celui-ci admet un ensemble continue de solutions, soit par le fait que $\lambda_i \equiv k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq m$, est une valeur propre de la matrice $\mathcal{M}$. Dès lors, les coefficients peuvent être vus comme étant des fonctions rationnelles sur une variété affine $V$, de fibre le lieu

$$\bigcap_{i=1}^{m} \left\{ s_i c_i^{(0)} + f_i \left( c_1^{(0)}, ..., c_m^{(0)} \right) = 0 \right\}.$$

Soit $m_0 \in V$ et soit $K$ un sous-ensemble compact de $V$, contenant un voisinage ouvert de $m_0$. Notons que $K$ peut-être muni de la topologie du plan complexe. Posons

$$A = 1 + \max \left\{ \left| c_i^{(\tau_i)}(m_0) \right| \right\}, \quad 1 \leq \tau_i \leq \lambda_m, \quad 1 \leq i \leq m,$$

où $\lambda_m$ désigne la plus grande valeur propre de la matrice $\mathcal{M}$. Soient $B$ et $C$ deux constantes avec $C > A$ telles que dans le compact $K$ on ait

$$\left| \frac{\partial^\alpha f_i}{\partial x^\alpha}(m_0) \right| \leq \alpha! B^{|\alpha|},$$

$$\left| (\mathcal{M}(m_0) - k\mathcal{I}_m)^{-1} \right| \leq C, \quad k \geq \lambda_m + 1.$$

De (12.16) on déduit que

$$\left| c_i^{(k)}(m_0) \right| \leq C \sum_{(\alpha,\tau)\in D} B^{|\alpha|} \prod_{j=1}^{m} \left| c_j^{(\tau_j)} \right|^{\alpha_j}, \quad k \geq \lambda_m + 1.$$

Considérons maintenant la série

$$\Phi(t) = At + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k t^k,$$

où $\beta_k$ sont des nombres réels définis inductivement par $\beta_1 \equiv A$ et

$$\beta_k \equiv C \sum_{(\alpha,\tau)\in D} B^{|\alpha|} \prod_{j=1}^{m} \beta_{\tau_j}^{\alpha_j}, \quad k \geq 2.$$

On vérifie aisément par récurrence que la série $\Phi(t)$ est une majorante pour

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_i^{(k)} t^k, \quad 1 \leq i \leq m.$$

En effet, on a $\left|c_i^{(1)}\right| \leq A$. Supposons que $\left|c_i^{(j)}\right| \leq \beta_j$, $j < k$, $\forall i$. Alors

$$\begin{aligned} \left|c_i^{(k)}(m_0)\right| &\leq C \sum_{(\alpha,\tau)\in D} B^{|\alpha|} \prod_{j=1}^{m} \left|c_j^{(\tau_j)}\right|^{\alpha_j}, \quad k \geq \lambda_m + 1, \\ &\leq C \sum_{(\alpha,\tau)\in D} B^{|\alpha|} \prod_{j=1}^{m} \left|\beta_{\tau_j}^{\alpha_j}\right|, \\ &= \beta_k. \end{aligned}$$

D'autre part, il résulte de la définition des nombres $\beta_k$ que

$$\Phi(t) = At + CB^2 \frac{(m\Phi(t))^2}{1 - Bm\Phi(z)}.$$

La racine

$$\Phi(t) = \frac{1 + mABt - \sqrt{(1 - 2mAB(1 + 2mBC)t + m^2A^2B^2t^2)}}{2mB(1 + mBC)},$$

fournit la majorante cherchée. D'où la possibilité d'un développement en série entière au voisinage de $t = 0$. Ceci achève la démonstration.

**Remarque 69** *La série (12.13) est l'unique solution méromorphe dans le sens où cette solution résulte de ce que les coefficients $c_i^{(k)}$ se trouvent déterminés de façon univoque avec la méthode de calcul adopté.*

**Exercice 12.1** *Montrer que le résultat du théorème précédent s'applique à l'équation différentielle quasi-homogène d'ordre $m$ suivante :*

$$x^{(m)} = f\left(x, \dot{x}, ..., x^{(m-1)}\right), \tag{12.16}$$

*où $f$ est une fonction rationnelle en $x, \dot{x}, ..., x^{(m-1)}$ et*

$$x(t_0) = x_1^0, \quad \dot{x}(t_0) = x_2^0, \quad ... \quad , x^{(m-1)}(t_0) = x_m^0.$$

<u>Solution</u> : En effet, l'équation (12.16) se ramène à un système de $m$ équations du premier ordre en posant

$$x(t) = x_1(t), \quad \dot{x}(t) = x_2(t), \quad ... \quad , x^{(m-1)}(t) = x_m(t).$$

On obtient ainsi

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad ... \quad , \dot{x}_{m-1} = x_m, \quad \dot{x}_m = f(x_1, x_2, ..., x_m).$$

Un tel système constitue un cas particulier du système normal (12.11).

**Exercice 12.2** *Etudier les équations non linéaires suivantes : ces équations sont difficiles et jouent un rôle important dans plusieurs domaines.*

*a) Equation de Korteweg et de Vries :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

*b) Equation de Kadomtsev-Petviashvili :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(4\frac{\partial u}{\partial t} - 12u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) = 0.$$

*c) Equation de Schrödinger non linéaire :*

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi|^2\psi = 0.$$

*d) Equation de Sine Gordon :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0.$$

*e) Equation de Boussinesq :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = 0.$$

*f) Equation de Camassa-Holm :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + 3u\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

*g) Le réseau de Toda décrit par un système :*

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= y_j, \\ \frac{dy_j}{dt} &= -e^{x_j - x_{j+1}} + e^{x_{j-1} - x_j}. \end{aligned}$$

# Références

[1] Arnold, V.I. : Ordinary differential equations. Springer-Textbook, 3rd ed. 1992.

[2] Arnold, V.I. : Mathematical methods in classical mechanics. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, 1978.

[3] Cartan, H. : Cours de calcul différentiel, 1997, Hermann.

[4] Coddington, E.A., Levinson, N. : Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.

[5] Dieudonné, J. : Éléments d'analyse, Tome 1, Fondements de l'analyse moderne, Gauthier-Villars, 3ème édition 1979 - tirage 1990.

[6] Hille, E. : Ordinary differential equations in the complex domain. Wiley-Interscience, New-York, 1976.

[7] Lesfari, A. : Eléments d'Analyse Mathématique. Cours et exercices. Sochepress Université, Casablanca, 252 pages (1991), épuisé.

[8] Lesfari, A. : Etude des solutions méromorphes d'équations différentielles. Ren. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino Vol.65, 4, pp.451-464 (2007).

[9] Lesfari, A. : Fonctions et Intégrales elliptiques. Surv. Math. Appl., 3, pp.27-65 (2008).

[10] Lesfari, A. : Fonctions différentiables. Quadrature, Paris, No. 84, pp.45-47 (2012).

[11] Lesfari, A. : Interversion des dérivées partielles. Quadrature, Paris, No. 91, pp. 41-43, (2014).

[12] Lesfari, A. : Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace (Cours et exercices), 380 pages, éditions Ellipses, Paris, 2012.

[13] Lesfari, A. : Géométrie complexe et Systèmes dynamiques. Accepté pour publication, 453 pages, Cassini éditions scientifiques, Paris.

[14] Mawhin, J. : Analyse. Fondements, techniques, évolution, 1997, De Boeck Université, Bruxelles.

[15] Painlevé, P. : Oeuvres : tomes 1,2,3. Edition du C.N.R.S. 1975.

[16] Rouche, N. et Mawhin, J. : Equations différentielles, tome 1, 1973, Masson.