Espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

A. Lesfari
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

L'espace projectif complexe

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) &= \{\text{droites dans } \mathbb{C}^{n+1}\},\\ &= \left\{[Z_0 : ... : Z_n] : (Z_0, ..., Z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}\right\},\end{aligned}$$

est l'ensemble des droites vectorielles complexes passant par l'origine de coordonnées dans $\mathbb{C}^{n+1}$ où $[Z_0 : ... : Z_n]$ désigne la droite engendrée par le vecteur. La topologie sur l'espace $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est la topologie quotient déterminée par la surjection

$$\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \quad (Z_0, ..., Z_n) \longmapsto [Z_0 : ... : Z_n].$$

L'espace topologique $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est séparé et compact. En outre, il est recouvert par $n+1$ ouverts $\mathcal{U}_0, ..., \mathcal{U}_n$ où

$$\mathcal{U}_i = \{[Z_0 : ... : Z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : Z_i \neq 0\},$$

l'ensemble des droites pour lesquelles $Z_i \neq 0$. Considérons, pour $i = 0, ..., n$, l'application (coordonnée locale dans $\mathcal{U}_i$),

$$\varphi_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad [Z_0 : ... : Z_n] \longmapsto \left(\frac{Z_0}{Z_i}, ..., \frac{Z_{i-1}}{Z_i}, \frac{Z_{i+1}}{Z_i}, ..., \frac{Z_n}{Z_i}\right) \equiv (z_1, ..., z_n),$$

avec

$$z_k = \begin{cases} \dfrac{Z_{k-1}}{Z_j} & \text{si } k \leq j \\ \dfrac{Z_k}{Z_i} & \text{si } k > j \end{cases} \tag{0.1}$$

où $1 \leq k \leq n$. Il est évident que $\varphi_i(\mathcal{U}_i) = \mathbb{C}^n$. L'application φ_i est un homéomorphisme ; l'homéomorphisme inverse étant donné par

$$(z_1, ..., z_n) \longmapsto [z_1, ...z_i, 1, z_{i+1}, ..., z_n].$$

Donc $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une variété topologique de dimension n et le couple $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$, $0 \leq i \leq n$, est une carte sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Comme

$$\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \{[Z_0 : ... : Z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : Z_i \neq 0 \text{ et } Z_j \neq 0\}, \quad i \neq j$$

alors (pour $j > i$),

$$\varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : z_j \neq 0\},$$

et

$$\varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) = \{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n : z_{i+1} \neq 0\}.$$

Les applications de transitions sont définies par

$$\varphi_{ji} \equiv \varphi_j \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \longrightarrow \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j),$$

$$(z_1, ..., z_n) \longmapsto \left(\frac{z_1}{z_j}, ..., \widehat{\frac{z_j}{z_j}}, ..., \frac{1}{z_j}, ..., \frac{z_n}{z_j}\right), z_j \neq 0$$

où le signe $\widehat{}$ signifie à omettre. Pour $\varphi_{ij} \equiv \varphi_i \varphi_j^{-1}$, il suffit de permuter les indices. On voit bien que les applications φ_{ji} et φ_{ij} sont analytiques. Les cartes $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$, $(\mathcal{U}_j, \varphi_j)$ sont donc deux à deux compatibles et comme $\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, elles forment un atlas. Par conséquent, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une variété analytique. Par exemple, pour $n = 1$, on obtient la droite projective complexe ou sphère de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. On a

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{U}_i & = & \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{\infty\} = \mathbb{C}, \\ \mathcal{U}_j & = & \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \\ \varphi_i & : & \mathcal{U}_i \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ application identique}, \\ \varphi_i & : & \mathcal{U}_j \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \varphi_j(z) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{z} & \text{si } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{si } z = \infty \end{array} \right. \end{array}$$

Les applications φ_i et φ_j sont des homéomorphismes. Notons que puisque $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_j$ sont connexes et que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, alors $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est aussi connexe et

$$\varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) = \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) = \mathbb{C}^*,$$

$$\varphi_j \varphi_i^{-1} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad z \longmapsto \frac{1}{z},$$

est une application biholomorphe. En utilisant la projection stréographique

$$S^2 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad (z_0, z_1, z_3) \longmapsto \left\{ \begin{array}{rl} \dfrac{z_0 + \sqrt{-1} z_2}{1 - z_3} & \text{si } z \neq 1 \\ \infty & \text{si } z_3 = 1 \end{array} \right.$$

où

$$S^2 = \{(z_0, z_1, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2\},$$

est la sphère unité de $\mathbb{C}^3$, tout en comparant avec les coordonnées locales étudiées précédemment, on montre que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est difféomorphe à S^2.

Une autre description de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ peut-être faite en le définissant comme l'ensemble quotient de $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ par la relation d'équivalence

$$[Z_0 : ... : Z_n] \sim [\lambda Z_0 : ... : \lambda Z_n], \quad \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

On écrit aussi

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \frac{\{[Z] \neq 0 \in \mathbb{C}^{n+1}\}}{[Z] \sim [\lambda Z]}.$$

Soit

$$H_i = \{[Z_0 : ... : Z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : Z_i = 0\},$$

l'hyperplan de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ d'équation $Z_i = 0$, $0 \leq i \leq n$. C'est un sous-espace projectif de dimension $n-1$. L'application

$$\varphi_i : \mathbb{P}^n(\mathbb{C})\backslash H_i \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad [Z_0 : ... : Z_n] \longmapsto \left(\frac{Z_0}{Z_i}, ..., \frac{Z_{i-1}}{Z_i}, \frac{Z_{i+1}}{Z_i}, ..., \frac{Z_n}{Z_i}\right),$$

montre que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\backslash H_i$est naturellement isomorphe à $\mathbb{C}^n$. Posons

$$\mathcal{U}_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})\backslash H_i = \{[Z_0 : ... : Z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : Z_i \neq 0\}.$$

Comme H_i est un fermé, alors son complémentaire $\mathcal{U}_i$ est un ouvert. On munit $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de la topologie quotient de celle de $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$, i.e., qu'un sous-ensemble de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est fermé ou ouvert si et seulement si son image inverse par la projection $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ l'est. En outre, l'application φ_i est un homéomorphisme. Dès lors, un ensemble explicite de cartes sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est fourni par $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$. Les coordonnées z_k (12.0.1) sont les coordonnées affines sur $\mathcal{U}_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})\backslash H_i$. Chaque H_i est isomorphe à $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ (il suffit d'omettre la i-ème coordonnée). On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) &= \{[Z_0 : ... : Z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : Z_i \neq 0\} \cup \{[Z_0 : ... : Z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) : Z_i = 0\}, \\
&= \mathcal{U}_i \cup H_i, \\
&= (\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\backslash H_i) \cup H_i, \\
&\simeq \mathbb{C}^n \cup H_i.
\end{aligned}$$

Notons que $\bigcap_{i=0}^n H_i = \emptyset$ car aucun point $[Z_0 : ... : Z_n]$ n'a toute ses coordonnées homogènes Z_i égales à zéro. Dès lors,

$$\bigcup_{i=0}^n \mathcal{U}_i = \bigcup_{i=0}^n (\mathbb{P}^n(\mathbb{C})\backslash H_i) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}).$$

(en effet, soit $\xi \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, si $Z_0, ..., Z_n$ est un système de coordonnées homogènes de ξ, alors il existe i tel que : $Z_i \neq 0$ et $\xi \in \mathcal{U}_i$). On a un ensemble explicite de cartes définissant $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ comme étant l'union de $(n+1)$ copies de $\mathbb{C}^n$.