Université Chouaib Doukkali *Année Universitaire 2014-2015*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida
(Responsable : Prof. Lesfari, http ://lesfari.com) **SMA 6**

<u>MODULE : ANALYSE 6</u>

(Durée de l'épreuve : $1^h30'$)

<u>EXERCICE 1</u>

a) Déterminer <u>toutes</u> les fonctions réelles f et g, de classe $\mathcal{C}^1$ telles que la 1-forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\omega = 2xzdx + f(y)g(z)dy + \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)dz,$$

soit fermée.

b) La forme ω est-elle exacte ? Justifier la réponse.

c) Dans le cas où ω est exacte trouver <u>toutes</u> les primitives de ω.

<u>Solution</u> : a) On obtient

$$d\omega = \big(f(y)g'(z) - y\big)\, dz \wedge dy,$$

d'où

$$d\omega = 0 \Longleftrightarrow f(y)g'(z) = y.$$

Dès lors, $g'(z) = a$ et $f(y) = \frac{y}{a}$, $(a \neq 0)$. Donc

$$g(z) = az + b, \quad f(y) = \frac{y}{a}, (a \neq 0)$$

b) La forme ω est exacte (il suffit d'utiliser le lemme de Poincaré car $\mathbb{R}^3$ est étoilé et ω est fermée d'après a)).

c) On a $\omega = dh$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= 2xz, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= yz + \frac{b}{a}y, \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= x^2 + \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

En utilisant ces trois équations, on obtient immédiatement

$$h(x,y,z) = x^2 z + \frac{1}{2}y^2 z + \frac{b}{2a}y^2 + constante, \quad (a \neq 0)$$

Exercice 2

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy,$$

où $\mathcal{C}$ est le bord d'un triangle D de sommets $(1, 1)$, $(2, 2)$ et $(1, 4)$.

Solution : Il suffit d'utiliser la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

où

$$P(x, y) = x^2 + y^2, \qquad Q(x, y) = (x + y)^2,$$

et

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq -2x + 6\}.$$

On obtient

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy = 4.$$

Exercice 3

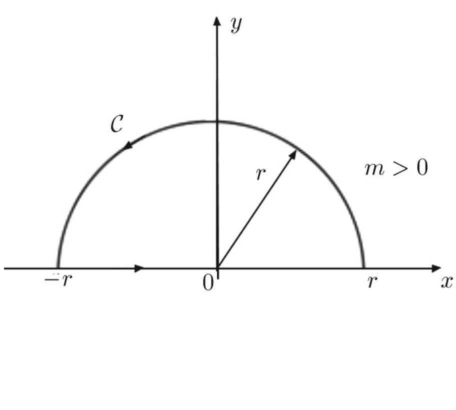
Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :

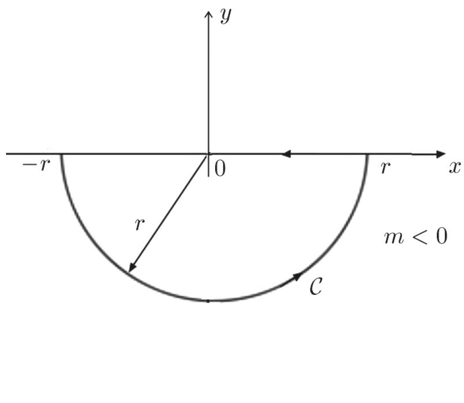
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{1 + x^2} dx, \quad m \in \mathbb{R}$$

Solution : On considère les trois cas suivants : $m > 0$, $m = 0$ et $m < 0$. Pour $m > 0$ et $m < 0$, on calcule

$$\int_{\gamma} \frac{e^{imz}}{1 + z^2} dz,$$

où $\gamma = \mathcal{C} \cup [-r, r]$:





et on fait tendre r vers l'infini. En appliquant le théorème des résidus et le lemme de Jordan, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|m|}, \quad m \in \mathbb{R}^*$$

Notons que pour $m = 0$, c'est évident, cette intégrale est égale à π.