Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida
(Responsable : Prof. Lesfari, http ://lesfari.com)

Année Universitaire 2014-2015

SMA 6

Module : Analyse complexe

(Durée de l'épreuve : $1^h30'$)

Exercice 1

Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx.$$

Solution : Notons que

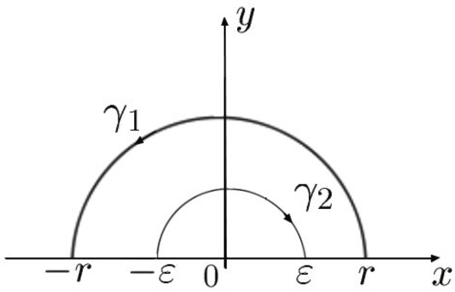
$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8},$$

d'où

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \int_0^\infty \left(\frac{\cos 4x}{8x^2} - \frac{\cos 2x}{2x^2} + \frac{3}{8x^2}\right) dx.$$

Pour pouvoir scinder cette intégrale en trois termes, il faut que toutes les intégrales prises séparément convergent. Comme ce n'est pas le cas, on va procéder autrement. Calculons l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ où

$$f(z) = \frac{e^{4ix} - 4e^{2ix} + 3}{8z^2}, \qquad \gamma = \gamma_1 \cup [-r, -\varepsilon] \cup \gamma_2 \cup [\varepsilon, r].$$



Puisque γ n'entoure pas la seule singularité $z = 0$ de l'intégrant, alors d'après le théorème de Cauchy, on a

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Dès lors,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-r}^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\varepsilon}^{r} f(x)dx = 0,$$

ou

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\varepsilon}^{r} (f(x) + f(-x))dx = 0,$$

ou encore

$$2\int_{\varepsilon}^{r} \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8x^2}dx = -\int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

En raisonnant comme dans les exercices traités dans le cours, on obtient d'après le lemme de Jordan,

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0.$$

La fonction f possède un pôle simple en 0 et d'après le lemme 3 (ou exercice 3, voir cours), on a

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = -\pi i \text{Rés}(f,0) = -\pi i \left(-\frac{i}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Finalement,

$$2\int_{\varepsilon}^{r} \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8x^2}dx = \frac{\pi}{2},$$

et

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2

a) Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique dans un ouvert simplement connexe Ω de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une fonction harmonique $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $u + iv$ soit holomorphe sur Ω.

b) En déduire que la fonction u admet une infinité de conjugées harmoniques de la forme $v(x,y) + C$ où $v(x,y)$ est l'une d'entre-elles et C une constante.

Solution : a) Considérons la forme différentielle

$$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

où

$$P(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

On a

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy, \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy, \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

car $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ et $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$. Comme

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

alors

$$d\omega = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy.$$

Or par hypothèse, la fonction u est harmonique, c-à-d., $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, donc $d\omega = 0$. Par conséquent, la forme différentielle ω est fermée et comme Ω est simplement connexe, alors d'après le lemme de Poincaré, ω est exacte. Autrement dit, il existe une fonction $v(x, y)$ telle que : $dv = \omega$, c-à-d.,

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

Dès lors

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{1}$$

Par conséquent, la fonction $u+iv$ satisfait aux équations de Cauchy-Riemann et on en déduit qu'elle est holomorphe.

b) Si v est solution des équations (1), alors $v + C$ est également solution de (1). Réciproquement, soient v_1 et v_2 deux conjugées harmoniques de u. Alors v_1 et v_2 satisfont (1) et $v_1 - v_2$ satisfait

$$\frac{\partial}{\partial x}(v_1 - v_2) = \frac{\partial}{\partial y}(v_1 - v_2) = 0,$$

ce qui montre que $v_1 - v_2$ est constante.

Exercice 3

a) Enoncer le théorème de Rouché.

b) En déduire que tout polynôme de degré n possède n zéros.

c) Déterminer le nombre de zéros de la fonction $z^6 - 6z + 10$, dans le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Solution : a) Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomorphes dans un domaine simplement connexe Ω et sur sa frontière γ. Supposons qu'en tout point de γ, on ait $|f(z)| > |g(z)|$. Alors $f(z)$ et $f(z) + g(z)$ ont le même nombre de zéros dans Ω.

b) Posons $f(z) = a_0 z^n$ et $g(z) = a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$. D'où

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| &\leq \frac{|a_1| r^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}| r + |a_n|}{|a_0| r^n}, \quad r = |z|, \\
&\leq \frac{|a_1| r^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}| r^{n-1} + |a_n| r^{n-1}}{|a_0| r^n}, \\
&= \frac{|a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n|}{|a_0| r}, \\
&< 1,
\end{aligned}$$

pour r assez grand. D'après a), on a

$$\text{Nombre de zéros de } (f + g) = \text{Nombre de zéros de } (f = a_0 z^n) = n.$$

c) Posons par exemple $f(z) = 10$ et $g(z) = z^6 - 6z$. Sur le cercle de centre 0 et de rayon 1, on a

$$|f(z)| = 10,$$

et

$$|g(z)| = |z^6 - 6z| \leq |z|^6 + 6|z| = 7.$$

Donc sur ce cercle, on a bien $|f(z)| > |g(z)|$ et d'après a), le nombre de zéros de $f(z) + g(z)$ dans le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ est égal au nombre de zéros de $f(z)$ dans ce disque. Comme $f(z) = 10$ n'admet pas de zéros dans le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, on en déduit que la fonction $z^6 - 6z + 10$, n'admet pas non plus de zéros dans ce disque.