Université Chouaib Doukkali *Année Universitaire 2016-2017*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida
(Responsable : Prof. Lesfari, http ://lesfari.com) **SMA 6**

Module : Analyse complexe

(Durée de l'épreuve : $1^h30'$)

Exercice 1

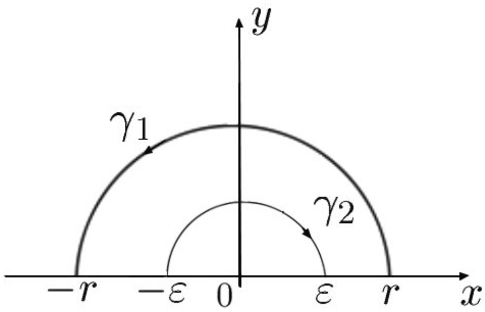
Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx, \quad a>0, b>0$$

Solution : On considère la fonction

$$f(z)=\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)},$$

et on adopte le contour suivant :



$$\gamma=\gamma_1\cup[-r,-\varepsilon]\cup\gamma_2\cup[\varepsilon,r].$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)dz+\int_{\gamma_2} f(z)dz+2i\int_\varepsilon^r \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx &= 2\pi i \text{Rés}(f(z),bi)\\ &= -\pi i\frac{e^{-ab}}{b^2}.\end{aligned}$$

En faisant tendre $\varepsilon\to 0$ et $r\to\infty$, on obtient

$$0-\frac{\pi i}{b^2}+2i\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx=-\pi i\frac{e^{-ab}}{b^2},$$

et donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx=\boxed{\frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab})}.$$

Exercice 2

Déterminer le nombre de racines des équations suivantes dans les domaines indiqués :

$$z^8 + 6z + 10 = 0, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

et

$$z^3 + z + 1 = 0, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$$

Solution : ($\bullet$) Soit $z^8 + 6z + 10 = 0$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Posons $f(z) = 10$ et $g(z) = z^8 + 6z$. Sur le cercle $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, on a $|f(z)| = 10$ et $|g(z)| \leq |z|^8 + 6|z| = 7$. Dès lors, $|f(z)| > |g(z)|$ en tout point de $\mathcal{C}$. La fonction $f(z) = 10$ n'admet pas de zéros sur le disque D. D'après le théorème de Rouché, la fonction $z^8 + 6z + 10$ n'admet pas de zéros sur le disque D.

($\bullet\bullet$) Soit $z^3 + z + 1 = 0$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$. Posons $f(z) = 1$ et $g(z) = z^3 + z$. Sur le cercle $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$, on a $|f(z)| = 1$ et $|g(z)| \leq |z|^3 + |z| = \frac{5}{8}$. Dès lors, $|f(z)| > |g(z)|$ en tout point de $\mathcal{C}$. La fonction $f(z) = 1$ n'admet pas de zéros sur le disque D. D'après le théorème de Rouché, la fonction $z^3 + z + 1$ n'admet pas de zéros sur le disque D.

Exercice 3

a) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ et soit γ un chemin fermé contenu dans Ω. Montrer que :

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Que peut-on dire si le domaine Ω n'est pas simplement connexe et si γ est homotope à zéro ?

b) Montrer que si $f(z)$ est continue dans un domaine simplement connexe Ω et si

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

pour tout chemin fermé γ de Ω, alors $f(z)$ est holomorphe dans Ω.

Solution : a) Nous allons donner deux solutions. La première est immédiate quand on suppose que $f'(z)$ est continue. En fait, cette condition supplémentaire est toujours satisfaite en vertu du théorème de Goursat qui dit que si $f(z)$ est holomorphe dans Ω, alors $f'(z)$ est continue dans Ω. Ce résultat sera prouvé dans la seconde solution.

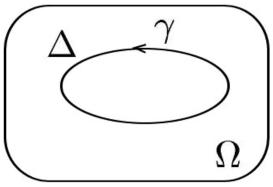
Solution 1 : On fait l'hypothèse supplémentaire suivante : $f'(z)$ est continue. Soit

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

On a

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_\gamma (u + iv)(dx + idy), \\ &= \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy). \end{aligned}$$

Soit Δ le domaine simplement connexe ayant pour frontière γ. On a $\Delta \subset \Omega$.



(sinon, soit $z_0 \in \Delta$, $z_0 \notin \Omega$. Par hypothèse Ω est un domaine simplement connexe et γ est un chemin contenu dans Ω, homotope à un point de Ω, donc à z_0 par transitivité. Comme $z_0 \notin \Omega$, on arrive à une contradiction). Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ, alors d'après la formule de Green-Riemann, on a

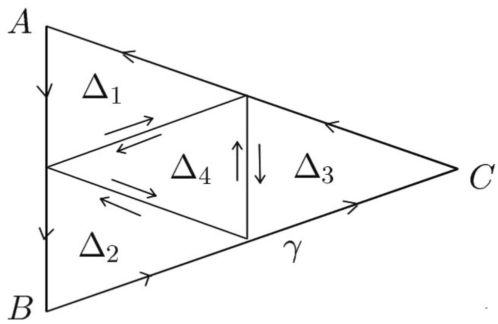
$$\int_\gamma udx - vdy = \int\int_\Delta \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy,$$

$$\int_\gamma vdx + udy = \int\int_\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy.$$

Or f est holomorphe, donc les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites c'est-à-dire, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, et par conséquent

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

<u>*Solution 2*</u> : Soit ABC un triangle et γ sa frontière. On désigne par $\Delta_1, ..., \Delta_4$ les quatre triangles congruants obtenus en joignant les milieux des côtés AB, BC, AC et par $\gamma_1, ..., \gamma_4$ leurs frontières respectivement. On a



$$I \equiv \int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

D'où

$$|I| \leq \sum_{k=1}^{4} \left| \int_{\gamma_k} f(z)dz \right|.$$

Pour au moins l'un des quatre triangles, qu'on désignera par T_1, on a

$$|I| \leq 4 \left| \int_{C_1} f(z)dz \right|,$$

où C_1 est la frontière de T_1. On répète sur T_1 l'opération qui vient d'être effectuée et on considère un triangle $T_2 \subset T_1$ de frontière C_2 tel que :

$$\left| \int_{C_1} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{C_2} f(z)dz \right|.$$

Dès lors,

$$|I| \leq 4^2 \left| \int_{C_2} f(z)dz \right|.$$

On obtiendra, après n opérations, une suite de triangles (T_n) avec $T_n \subset T_{n-1}$ tel que :

$$|I| \leq 4^n \left| \int_{C_n} f(z)dz \right|,$$

où C_n désigne la frontière de T_n et $T_0 = ABC$ le triangle du départ. Si L est la longueur du contour γ, alors celle de C_n est $\frac{L}{2^n}$. En outre, il existe un point unique z_0 commun à tous les triangles T_n (puisqu'ils forment une suite décroissante). Plus précisément, le point z_0 est la limite de la suite de Cauchy formé par les centres de ces triangles emboités. Par hypothèse, f est holomorphe en z_0, donc

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)\eta(z),$$

avec $\lim_{z\to z_0} \eta(z) = 0$, c-à-d., pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : $\mid z-z_0 \mid < \delta$ entraine $\mid \eta(z) \mid < \varepsilon$. Dès lors,

$$\int_{C_n} f(z)dz = f(z_0) \int_{C_n} dz + f'(z_0) \int_{C_n} (z - z_0)dz + \int_{C_n} (z - z_0)\eta(z)dz.$$

Or, d'après la solution 1 on a $\int_{C_n} dz = 0$ car la constante 1 est holomorphe et à dérivées continues dans C_n. De même, on a $\int_{C_n} (z - z_0)dz = 0$ car la fonction $(z - z_0)$ est holomorphe et à dérivées continues dans C_n. Par conséquent, on a

$$\int_{C_n} f(z)dz = \int_{C_n} (z - z_0)\eta(z)dz.$$

En utilisant la formule de majoration, on obtient

$$\left| \int_{C_n} f(z)dz \right| = \left| \int_{C_n} (z - z_0)\eta(z)dz \right| \leq ML,$$

où $L = \frac{L}{2^n}$ est la longueur du chemin C_n et

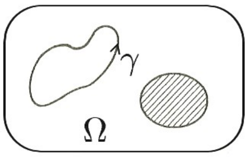
$$M = \sup_{z\in C_n} \mid (z - z_0)\eta(z) \mid = \varepsilon \sup_{z\in C_n} \mid z - z_0 \mid = \varepsilon \frac{L}{2^n}.$$

Donc

$$\frac{\mid I \mid}{4^n} \leq \left| \int_{C_n} f(z)dz \right| \leq \varepsilon \left(\frac{L}{2^n} \right)^2,$$

d'où $\mid I \mid \leq \varepsilon L^2$. On en déduit que $I = 0$ puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Si le domaine Ω n'est pas simplement connexe et si γ est homotope à zéro, alors on peut trouver un domaine simplement connexe $\Delta \subset \Omega$ contenant γ et le résultat reste inchangé.



b) Comme $\int_\gamma f(z)dz = 0$, alors l'intégrale

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz, \quad z_0 \in \Omega$$

ne dépend pas du chemin reliant z_0 et z. Comme la fonction f est continue dans Ω, alors la fonction $F(z)$ est holomorphe et on a $F'(z) = f(z)$. Puisque $F(z)$ est holomorphe, alors d'après la formule intégrale de Cauchy, la fonction

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

est aussi holomorphe. Comme $F'(z) = f(z)$, on en déduit que $f(z)$ est holomorphe.

<u>Exercice 4</u>

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points $a_1, a_2, ..., a_n$. Déterminer

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Rés}(f, a_k) + \text{Rés}(f, \infty).$$

Justifier votre réponse.

<u>Solution</u> : Soit $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ où r est assez grand pour que γ_r contienne tous les points a_k, $k = 1, 2, ..., n$. D'après le théorème des résidus, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Rés}(f, a_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r^-} f(z)dz = -\text{Rés}(f, \infty).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \text{Rés}(f, a_k) + \text{Rés}(f, \infty) = 0}.$$