Université Chouaib Doukkali — *Année Universitaire 2016-2017*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida
(Responsable : Prof. Lesfari, http ://lesfari.com) — **SMA 4**

Module : Analyse 6

(Durée de l'épreuve : $1^h30'$)

Exercice 1

Calculer l'intégrale double :

$$\int\int_D |x+y|dxdy,$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$.

Solution : On a

$$\int\int_D |x+y|dxdy = 2\int\int_{D_1}(x+y)dxdy = 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-x}^{1}(x+y)dy\right)dx = \frac{8}{3}.$$

(Noter que : $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -x < y < 1\}$).

Exercice 2

Examiner si la forme différentielle suivante dans $\mathbb{R}^2$ est exacte et, le cas échéant, en trouver les primitives (c.-à-d., une fonction f telle que : $\omega = df$).

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy.$$

Solution : Comme

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right),$$

alors la forme ω est fermée sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. L'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ n'étant pas étoilé, on ne peut donc utiliser le théorème de Poincaré. Pour voir si ω est exacte, on cherche s'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $\omega = df$. On a

$$\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+y^2} &= \frac{\partial f}{\partial x} \Longleftrightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C(y),\\ \frac{y}{x^2+y^2} &= \frac{\partial f}{\partial y} \Longleftrightarrow \frac{y}{x^2+y^2} + C'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Donc $C(y) = K = constante$ et par conséquent, la forme en question est exacte : $\omega = df$ avec

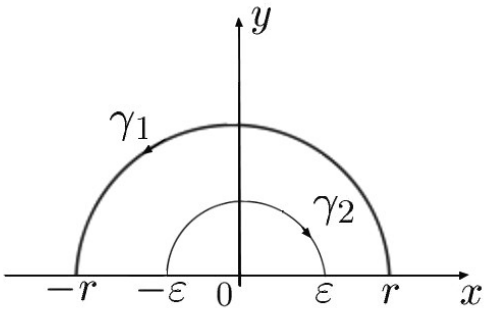
$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + K.$$

Exercice 3

Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx.$$

Solution : On considère la fonction $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ et on adopte le contour suivant :



$$\gamma = \gamma_1 \cup [-r,-\varepsilon] \cup \gamma_2 \cup [\varepsilon, r].$$

On a

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + 2i\int_\varepsilon^r \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx = 2\pi i \text{Rés}(f(z),i) = -\pi i e^{-1}.$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$ et $r \to \infty$, on obtient

$$0 - \pi i + 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx = -\pi i e^{-1},$$

et donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx = \frac{\pi}{2}(1-e^{-1}).$$

Exercice 4

1) On considère la fonction gamma d'Euler la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \quad x \in]0,+\infty[$$

Montrer que cette intégrale converge uniformément sur l'intervalle $[a, b]$ où $0 < a < b < +\infty$. En déduire que Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

2) On définit la fonction bêta d'Euler par

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad p \in]0, +\infty[, q \in]0, +\infty[$$

Etablir la formule suivante :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler.

<u>Solution</u> : 1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$, est positive, continue sur $]0, +\infty[$ et donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. L'intégrale en question converge en même temps que les deux intégrales $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$. Au voisinage de 0, on a $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$. L'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et d'après le critère d'équivalence, il en est de même pour $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$. Au voisinage de $+\infty$, on a $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t}t^{x-1} = 0$, c-à-d., $e^{-t}t^{x-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

b) Pour $x \geq a > 0$ et $t \in]0, 1]$. On a $e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{a-1}$. L'intégrale $\int_0^1 e^{-t}t^{a-1}dt$ étant convergente, alors $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ en vertu du critère de Weierstrass. Pour $0 < x \leq b$ et $t \in [1, +\infty[$, on a $e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{b-1}$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}dt$ converge, alors on déduit du même critère que $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est normalement convergente pour $0 < a \leq x \leq b$. Par conséquent, l'intégrale en question converge normalement, donc uniformément sur l'intervalle $[a, b]$ où $0 < a < b < +\infty$.

c) La fonction sous le signe intégrale est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. La continuité de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$ résulte immédiatement de la question précédente et du théorème de continuité.

2) Pour $p > 0$ et $q > 0$, on a

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2p-1}du, \quad t = u^2$$

$$\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{q-1}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-v^2}v^{2q-1}dv, \quad t = v^2$$

d'où

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)}u^{2p-1}v^{2q-1}dudv.$$

Posons $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$, d'où

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\theta . \sin^{2q-1}\theta d\theta\right) e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr.$$

Or

$$B(p,q) = B(q,p) = \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2q-1}\theta.\cos^{2p-1}\theta d\theta,$$

où $x = \sin^2\theta$ et

$$\Gamma(p+q) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p+q-1}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-r^2}u^{2(p+q)-1}dr, \quad t = r^2$$

donc $\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q)$.