Quelques généralités sur les faisceaux

A. Lesfari
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Table des matières

1. Faisceaux **1**

2. Cohomologie de Cech **7**

3. Le théorème de De Rham **9**

4. Cohomologie de Dolbeault d'une variété complexe **10**

5. Connexions et courbure **12**

6. Forme de courbure et première classe de Chern de fibrés en droites **14**

7. Le dual de Poincaré **16**

Le but de cette note est de rappeler quelques définitions et propriétés de base de géométrie liées aux concepts de faisceaus, les cohomologie de Cech, de De Rham et de Dolbeault d'une variété complexe, connexion, courbure et première classe de chern d'un fibré en droites, le dual de Poincaré...

1. Faisceaux

Un faisceau $\mathcal{F}$ sur un espace topologique M est la donnée
a) pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de M d'un groupe abélien $\mathcal{F}(\mathcal{U})$, dont les éléments sont

appelés sections (globales) de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{U}$.
b) pour toute inclusion $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$, d'un morphisme de restriction

$$r_{\mathcal{V}\mathcal{U}}:\mathcal{F}(\mathcal{U})\longrightarrow\mathcal{F}(\mathcal{V}),$$

tels que :

(i) $r_{\mathcal{U}\mathcal{U}}=Id_{\mathcal{F}(\mathcal{U})}$ (identité) et pour toutes inclusions $\mathcal{W}\subset\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$, on a

$$r_{\mathcal{W}\mathcal{U}}\circ r_{\mathcal{V}\mathcal{U}}=r_{\mathcal{W}\mathcal{U}}.$$

(ii) si $\mathcal{U}$ est la réunion d'ouverts $\mathcal{U}_\alpha$ et si s_α est un élément de $\mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha)$ vérifiant la relation

$$r_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta,\mathcal{U}_\alpha}(s_\alpha)=r_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta,\mathcal{U}_\beta}(s_\beta),$$

alors il existe un élément unique s de $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ vérifiant pour tout α, la condition de recollement

$$r_{\mathcal{U}_\alpha\mathcal{U}}(s)=s_\alpha.$$

La définition de faisceau est valable dans le cas de groupes abéliens, d'anneaux, de modules et dans un contexte beaucoup plus général tel que les faisceaux d'ensembles...On notera indifféremment $r_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(s)$ ou $s|_V$. Pour $\mathcal{U}=\emptyset$, on a $\mathcal{F}(\emptyset)=0$. La notation $\Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F})$ est parfois utilisée à la place de $\mathcal{F}(\mathcal{U})$. Un élément de $\Gamma(\mathcal{U},\mathcal{F})$ est appelé une section de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{U}$. Les éléments de $\Gamma(M,\mathcal{F})$ sont appelées les sections globales de $\mathcal{F}$; ces éléments sont définies sur les ouverts qui coincident sur leur intersection.

Exemple 1 *L'espace des fonctions continues sur les ouverts d'un espace topologique est un faisceau.*

Exemple 2 *L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ d'une variété différentiable est un faisceau.*

Exemple 3 *L'ensemble des fonctions localement constantes à valeurs dans un groupe abélien G est un faisceau. En effet, soit $\mathcal{U}$ un ouvert non vide de M, $G(\mathcal{U})=G$ et $G(\emptyset)=0$. Pour $\mathcal{U}\subset\mathcal{V}$, on a $r_{\mathcal{U}\mathcal{V}}=$ identité. Par contre, $U\longrightarrow\mathcal{F}(\mathcal{U})=\mathbb{C}$ n'est pas un faisceau.*

Exemple 4 *L'ensemble des fonctions holomorphes (resp. holomorphes partout non nulles) sur une variété complexe M est un faisceau noté $\mathcal{O}_M$ (resp. $\mathcal{O}_M^*$). En effet, soit*

$$\mathcal{O}_M(\mathcal{U})=\{f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{C}:f\ \textit{holomorphe}\},$$

et

$$\mathcal{O}_M^*(\mathcal{U})=\{f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{C}:f\ \textit{holomorphe}, f(z)\neq0,\forall z\in\mathcal{U}\},$$

où $\mathcal{U}$ est un ouvert de M. Si $\mathcal{U}\subset\mathcal{V}$, alors $r_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(f)=f|_\mathcal{U}$. La structure de groupe abélien sur $\mathcal{O}_M(\mathcal{U})$ est l'addition (resp. la multiplication).

Exemple 5 *Le faisceau $\mathcal{O}_M(E)$ des sections holomorphes sur un fibré vectoriel holomorphe E sur une variété complexe M.*

Exemple 6 *Le faisceau Ω_M^p des p-formes holomorphes sur une variété complexe M.*

Exemple 7 *Le faisceau $\mathcal{A}_M^{p,q}$ des formes différentielles de type (p,q) sur une variété complexe M.*

Exemple 8 *Soit K un groupe abélien et $p \in K$. Le faisceau gratte-ciel, noté K_p, est défini par*

$$K_p(\mathcal{U}) = \begin{cases} K & si\ p \in \mathcal{U} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

où $\mathcal{U}$ est un ouvert de M. Si $p \in \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, $r_{\mathcal{UV}}(p) = p$ et si $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ avec $p \notin \mathcal{U}$, $r_{\mathcal{UV}}(p) = 0$. La structure de groupes abélien est l'addition dans K et 0 est le groupe trivial.

Soit $\varphi : M \longrightarrow N$ une application continue entre deux espaces topologiques et soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur M. On définit l'image directe $\varphi_*\mathcal{F}$ sur N du faisceau $\mathcal{F}$ par l'application φ, comme étant le faisceau défini par

$$\varphi_*\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(\mathcal{U})),$$

pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de N.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux de groupes abéliens, un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est une collection de morphismes $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{U})$ pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de M, commutant à la restriction, i.e., si $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{V}}} & \mathcal{G}(\mathcal{V}) \\ r_{\mathcal{UV}}\downarrow & & \downarrow r_{\mathcal{UV}} \\ \mathcal{F}(\mathcal{U}) & \underset{r_{\mathcal{U}}}{\longrightarrow} & \mathcal{G}(\mathcal{U}) \end{array}$$

est commutatif.

Le noyau d'un morphisme $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de faisceaux de groupes abéliens est un sous-faisceau de $\mathcal{F}$ défini sur chaque ouvert $\mathcal{U}$ comme le noyau du morphisme sur $\mathcal{U}$, i.e.,

$$\mathcal{U} \longmapsto \ker(\varphi)(\mathcal{U}) = \ker\left(\varphi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{U})\right).$$

Il s'agit bien d'un faisceau et il est nul si et seulement si φ est injectif. En ce qui concerne l'image et le conoyau, c'est plus compliqué car comme la condition de recollement n'est en général pas satisfaite, alors en général ce ne sont pas des faisceaux. Cependant, on définit Im φ comme étant l'ensemble des sections de $\mathcal{G}$ qui proviennent localement de sections de $\mathcal{F}$. En d'autres termes, un élément

g de $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ est dans $(\text{Im }\varphi)(\mathcal{U})$ s'il existe un recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_\alpha)$ de $\mathcal{U}$ et des éléments s_α de $\mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha)$ tels que : $(s_\alpha) = g|_{\mathcal{U}_\alpha}$ pour tout α. Im φ est le faisceau associé à

$$\mathcal{U} \longmapsto (\text{Im }\varphi)(\mathcal{U}) = \text{Im }\left(\varphi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{U})\right).$$

On raisonne de manière similaire pour coker(φ). Plus précisément, considérons un recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_\alpha)$ de $\mathcal{U}$ et des éléments s_α de $\mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha)$. Supposons que la famille $(\mathcal{U}_\alpha, s_\alpha)$ est admissible, i.e., pour tout α, β, les éléments $s_\alpha|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta} - s_\beta|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta}$ sont dans $\varphi(\mathcal{G}(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$. Lorsque la réunion de telles familles est admissible, on dira qu'elles sont équivalentes. Alors, un élément du conoyau $(\text{coker}(\varphi))(\mathcal{U})$ est une classe d'équivalence de familles admissibles. coker(φ) est le faisceau associé à

$$\mathcal{U} \longmapsto (\text{coker})(\mathcal{U}) = \text{coker}\left(\varphi|_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{U})\right).$$

Le faisceau quotient du faisceau $\mathcal{G}$ par le sous-faisceau $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ est le faisceau dont une section s au dessus d'un ouvert $\mathcal{U}$ est donnée par un recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_\alpha)$ de $\mathcal{U}$ et une famille de sections $s_\alpha \in \mathcal{G}(\mathcal{U}_\alpha)$ coincidant sur les intersections :

$$s_\alpha|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta} = s_\beta|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta}.$$

Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ trois faisceaux de groupes abéliens sur M. On dit que la suite

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H},$$

de morphismes de faisceaux est exacte en $\mathcal{G}$ si Im $\varphi = \ker\psi$. La suite de morphismes de la forme

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

exacte en $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ est dite suite exacte courte de faisceaux.

Exemple 9 *La suite*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

est exacte où $\mathcal{F}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{G}$.

Exemple 10 *La suite de faisceaux*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_N \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{O}_N \longrightarrow 0$$

est exacte où $N \subset M$ est une sous-variété d'une variété complexe M et $\mathcal{I}_N$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_M$ constitué des fonctions holomorphes sur M qui s'annulent sur N.

Exemple 11 *La suite exponentielle suivante est exacte*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \stackrel{i}{\longrightarrow} \mathcal{O}_M \stackrel{\exp}{\longrightarrow} \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{O}_M$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur M, $\mathcal{O}_M^*$ est le faisceau des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur M, i est l'inclusion triviale et $\exp$ *est l'application exponentielle* $\exp f = e^{2\pi\sqrt{-1}f}$.

Il est à noter que si

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

est exacte, la dernière flèche n'est que localement surjective et qu'il est donc faux de dire que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{U}) \longrightarrow 0$$

est aussi exacte pour un ouvert $\mathcal{U}$. Par exemple la suite exacte de l'exemple 12.0.11, ne donne pas une suite exacte pour $M = \mathbb{C}^*$. En effet, on ne peut pas définir le logarithme sur tout $\mathbb{C}^*$.

Par ailleurs, pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} \mathcal{G} \stackrel{\psi}{\longrightarrow} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

de faisceaux de groupes abéliens, il existe un morphisme

$$\delta^* : H^k(M, \mathcal{H}) \longrightarrow H^{k+1}(M, \mathcal{H}),$$

telle que la suite longue en cohomologie

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(M,\mathcal{F}) & \stackrel{\varphi^*}{\longrightarrow} & H^0(M,\mathcal{G}) & \stackrel{\psi^*}{\longrightarrow} & H^0(M,\mathcal{H}) & \\
 & \stackrel{\delta^*}{\longrightarrow} & H^1(M,\mathcal{F}) & \stackrel{\varphi^*}{\longrightarrow} & H^1(M,\mathcal{G}) & \stackrel{\psi^*}{\longrightarrow} & H^1(M,\mathcal{H}) & \\
 & & & & \vdots & & & \\
 & \stackrel{\delta^*}{\longrightarrow} & H^k(M,\mathcal{F}) & \stackrel{\varphi^*}{\longrightarrow} & H^k(M,\mathcal{G}) & \stackrel{\psi^*}{\longrightarrow} & H^k(M,\mathcal{H}) & \stackrel{\delta^*}{\longrightarrow} \cdots
\end{array}$$

est exacte. En outre, pour des morphismes $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \stackrel{\varphi_1}{\longrightarrow} & \mathcal{G}_1 & \stackrel{\psi_1}{\longrightarrow} & \mathcal{H}_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\lambda_1 & & \downarrow\mu_1 & & \downarrow\nu_1 & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \stackrel{\varphi_2}{\longrightarrow} & \mathcal{G}_2 & \stackrel{\psi_2}{\longrightarrow} & \mathcal{H}_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\lambda_2 & & \downarrow\mu_2 & & \downarrow\nu_2 & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_3 & \stackrel{\varphi_3}{\longrightarrow} & \mathcal{G}_3 & \stackrel{\psi_3}{\longrightarrow} & \mathcal{H}_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(M,\mathcal{F}_1) & \xrightarrow{\varphi_1^*} & H^0(M,\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\psi_1^*} & H^0(M,\mathcal{H}_1) & \xrightarrow{\delta_1} & H^1(M,\mathcal{F}_1) & \xrightarrow{\varphi_1^*} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(M,\mathcal{F}_2) & \xrightarrow{\varphi_2^*} & H^0(M,\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\psi_2^*} & H^0(M,\mathcal{H}_2) & \xrightarrow{\delta_2} & H^1(M,\mathcal{F}_2) & \xrightarrow{\varphi_2^*} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(M,\mathcal{F}_3) & \xrightarrow{\varphi_3^*} & H^0(M,\mathcal{G}_3) & \xrightarrow{\psi_3^*} & H^0(M,\mathcal{H}_3) & \xrightarrow{\delta_3} & H^1(M,\mathcal{F}_3) & \xrightarrow{\varphi_3^*} & \cdots
\end{array}$$

sont commutatifs et on a

$$\lambda_1^* \circ \lambda_2^* = (\lambda_1 \circ \lambda_2)^*, \quad \mu_1^* \circ \mu_2^* = (\mu_1 \circ \mu_2)^*, \quad \nu_1^* \circ \nu_2^* = (\nu_1 \circ \nu_2)^*.$$

Un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur une variété algébrique M est un faisceau qui satisfait aux conditions suivantes :
(i) $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{G}_M$-modules.
(ii) Pour tout point de M, il existe une suite exacte sur un voisinage $\mathcal{U}$,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus k} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus l} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$-modules (cette condition signifie que le faisceau est localement de présentation finie).

Exemple 12 *Le faisceau des sections holomorphes est un faisceau cohérent.*

Exemple 13 *Le faisceau gratte-ciel (voir exemple 12.0.8) est un faisceau cohérent.*

Exemple 14 *Le faisceau $\mathcal{O}_M^*$ n'est pas un faisceau cohérent car la condition (i) ci-dessus n'est pas satisfaite.*

Exemple 15 *Le faisceau des fractions rationnelles sur M est un faisceau de $\mathcal{G}_M$-modules mais n'est pas un faisceau cohérent car il ne vérifie pas la condition (ii) ci-dessus.*

On désigne souvent par $\mathcal{L}$ le faisceau de sections d'un fibré en droites sur une variété M. Ce faisceau est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ où $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de M, autrement dit $\mathcal{L}$ est localement libre. La réciproque est vraie. Un tel faisceau est dit inversible.

2. Cohomologie de Cech

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur un espace topologique M. Considérons l'ensemble $C^k(\mathcal{U},\mathcal{F})$ des k-cochaînes de degré k à valeurs dans $\mathcal{F}$, i.e., l'ensemble des applications qui associe à chaque k-uplet d'ouverts du recouvrement $\mathcal{U}$ une section sur leur intersection. Autrement dit, on a

$$C^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0,\dots,\alpha_k} \mathcal{F}(\mathcal{U}_{\alpha_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{\alpha_k}).$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned} C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) &= \prod_{\alpha} \mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha), \\ C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) &= \prod_{\alpha,\beta} \mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta). \end{aligned}$$

On définit l'opérateur

$$\delta : C^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}),$$

pour $s\in C^k(\mathcal{U},\mathcal{F})$, par

$$\delta s(\mathcal{U}_{\alpha_0},\dots,\mathcal{U}_{\alpha_k}) = \sum_{j-0}^{k+1}(-1)^j s\left(\mathcal{U}_{\alpha_0},\dots,\widehat{\mathcal{U}_{\alpha_j}},\dots,\mathcal{U}_{\alpha_{k+1}}\right)\Big|_{\mathcal{U}_{\alpha_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{\alpha_{k+1}}}.$$

On a $\delta^2=0$ et le complexe (de Cech)

$$C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

avec

$$\begin{aligned} \delta \;&:\; C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\ &\quad s_{\alpha\beta} \longmapsto s_\beta|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta} - s_\alpha|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta}, \\ \delta \;&:\; C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\ &\quad s_{\alpha\beta\gamma} \longmapsto s_{\beta\gamma}|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta\cap\mathcal{U}_\gamma} - s_{\alpha\gamma}|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta\cap\mathcal{U}_\gamma} + s_{\alpha\beta}|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta\cap\mathcal{U}_\gamma}, \\ &\vdots \\ \delta \;&:\; C^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \\ &\quad s_{\alpha_0\dots\alpha_{k+1}} \longmapsto \sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\, s_{\alpha_0\dots\widehat{\alpha_j}\dots\alpha_{k+1}}\Big|_{\mathcal{U}_{\alpha_0}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{\alpha_{k+1}}}. \end{aligned}$$

Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur M et pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de M, on peut trouver une application

$$\mathcal{F} \longrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}),$$

de façon à ce que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

soit exacte.

La cohomologie de Cech du faisceau $\mathcal{F}$ pour le recouvrement $\mathcal{U}$ est la cohomologie du complexe ci-dessus,

$$H^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \frac{\ker\left[\delta : C^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^{k+1}\mathcal{U},\mathcal{F})\right]}{\operatorname{Im}\left[\delta : C^{k-1}\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^k\mathcal{U},\mathcal{F})\right]}.$$

Ces groupes dépendent du recouvrement $\mathcal{U}$.

On définit la cohomologie de Cech de l'espace M comme la limite inductive sur tous les recouvrements de la cohomologie ci-dessus,

$$H^k(M,\mathcal{F}) = \lim_{\overrightarrow{\mathcal{U}}} H^k(\mathcal{U},\mathcal{F}).$$

Le passage à la limite dans cette définition est délicat en pratique bien que son intérêt est qu'il n'y a plus de dépendance vis à vis du recouvrement. Cependant, le théorème de Leray affirme que si les ouverts $\mathcal{U}_\alpha$ d'un recouvrement $\mathcal{U}$ de M sont tels que : $H^k(A,\mathcal{F}) = 0$ pour tout $k > 0$ et toute intersection finie $A \equiv \mathcal{U}_{\alpha_1} \cap ... \cap \mathcal{U}_{\alpha_k}$ d'ouverts $\mathcal{U}_\alpha$, alors les groupes $H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})$ et $H^k(M,\mathcal{F})$ sont isomorphes pour tout k.

Exemple 16 *Le problème de Mittag-Leffler où l'on voit apparaître mutuellement les groupes de chomologie de Cech, consiste à trouver sur une variété complexe une fonction méromorphe ayant des pôles prescrits et holomorphes ailleurs. De manière précise, pour toute suite de nombres complexes p_n tels que : $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$ et toute suite de fonctions f_n de la forme*

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{k_n} \frac{a_k}{(z-p_n)^k},$$

il existe une fonction méromorphe dont les points p_n sont les seules pôles et dont la partie principale (du développement de Laurent) coincide avec f_n en chaque pôle f_n. Notons que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ est le faisceau des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$. De même, la suite

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow H^0(\mathbb{C},\mathcal{M}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow H^0(\mathbb{C},\mathcal{M}_{\mathbb{C}}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow 0$$

est exacte puisque $H^1(\mathbb{C},\mathcal{O}_{\mathbb{C}}) = 0$. L'ensemble fini des f_n ayant la forme ci-dessus détermine sur $\mathbb{C}$ une section de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}/\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$. En outre, celle-ci peut-être relevée en fonction méromorphe globale sur $\mathbb{C}$, ce qui confirme le problème de Mittag-Leffler.

Exemple 17 *Le groupe $H^0(M,\mathcal{F})$ est canoniquement isomorphe à $\Gamma(M,\mathcal{F})$. En effet, on a $H^0(M,\mathcal{F}) = \ker\delta$ avec*

$$\delta : C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}), \quad s_{\alpha\beta} \longmapsto s_\beta|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta} - s_\alpha|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta},$$

et $\delta s_{\alpha\beta} = 0$ si et seulement si $s_\beta = s_\alpha$ sur $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ pour tout α,β. Par ailleurs, $\mathcal{F}$ étant un faisceau, alors l'application

$$\Gamma(M,\mathcal{F}) \longrightarrow \ker\delta, \quad s \longmapsto s|_{\mathcal{U}_\alpha},$$

est bijective, d'où le résultat.

Exemple 18 *Pour tout faisceau de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété M, les groupes de cohomologie de degré k sont nuls pour $k \geq 1$. En effet, considérons un cocycle $\sigma \in C^k(M,\mathcal{U})$ où $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_\alpha)$ est un recouvrement ouvert de M et $\delta\sigma = 0$. Dès lors, il existe une partition de l'unité ρ_α subordonnée au recouvrement. On pose*

$$s_\alpha(\mathcal{U}_{\alpha_0},...,\mathcal{U}_{\alpha_{k-1}}) = \sum_\beta \rho_\beta\sigma(\mathcal{U}_\beta,\mathcal{U}_{\alpha_0},...,\mathcal{U}_{\alpha_{k-1}}),$$

et on vérifie directement que $\delta s_\alpha = \sigma$.

Exemple 19 *L'ensemble des fibrés en droites, modulo isomorphisme, sur M est muni d'une structure de groupe commutatif pour le produit tensoriel appelé groupe de Picard et noté $Pic(M)$. L'opération du groupe dans $H^1(M,\mathcal{O}_M^*)$ correspond au produit tensoriel des fibrés en droites et ces derniers sont en correspondance biunivoque avec les éléments du groupe de cohomologie de Cech $H^1(M,\mathcal{O}_M^*)$. Autrement dit, $Pic(M)$ est isomorphe à $H^1(M,\mathcal{O}_M^*)$.*

3. Le théorème de De Rham

Soient Ω^p le faisceau des p-formes différentielles sur une variété M et $\mathcal{Z}^p$ celui des p-formes fermées. Soit d_* l'application en cohomologie associée à l'application $d : \Omega^p \longrightarrow \mathcal{Z}^{p+1}$. La cohomologie de De Rham $H^p_{DR}(M)$ en degré k est par définition (voir aussi définition 3.2.1) le quotient des p-formes fermées par les différentielles des $(p-1)$-formes. Or une p-forme est une section globale du faisceau des k-formes, donc c'est un élément de $H^0(M,\Omega^p)$ car ce dernier groupe de cohomologie s'identifie aux sections globales. Dès lors,

$$H^p_{DR}(M) = \frac{H^0(M,\mathcal{Z}^p)}{d_*H^0(M,\Omega^{p-1})}.$$

En vertu du lemme de Poincaré (remarque 7.3.3), toute forme fermée est localement exacte. Donc la suite de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}^p \longrightarrow \Omega^p \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^{p+1} \longrightarrow 0,$$

est exacte où $\mathcal{Z}^0 \equiv \mathbb{R}$ est le faisceau des fonctions localement constantes et Ω^0 celui des fonctions $\mathcal{C}^\infty$. La suite exacte longue en cohomologie associée à la suite ci-dessus est

$$H^q(M,\Omega^p) \xrightarrow{d^*} H^q(M,\mathcal{Z}^{p+1}) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(M,\mathcal{Z}^p) \longrightarrow H^{q+1}(M,\Omega^k),$$

où d^* désigne la différentielle extérieure et ∂ l'opérateur bord de la longue suite exacte. Le faisceau Ω^p admet des partitions de l'unité, d'où $H^q(M,\Omega^p) = 0$ pour $q \geq 1$ et dès lors

$$H^q(M,\mathcal{Z}^{p+1}) = H^{q+1}(M,\mathcal{Z}^p).$$

Pour le cas particulier $q = 0$, on a donc

$$H^0(M,\Omega^k) \xrightarrow{d^*} H^0(M,\mathcal{Z}^{p+1}) \xrightarrow{\partial} H^1(M,\mathcal{Z}^p) \longrightarrow 0,$$

et

$$H^1(M,\Omega^p) = \frac{H^0(M,\mathcal{Z}^{p+1})}{d_* H^0(M,\Omega^p)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} H^p_{DR}(M) &= \frac{H^0(M,\mathcal{Z}^p)}{d_* H^0(M,\Omega^{k-1})}, \\ &= H^1(M,\mathcal{Z}^{p-1}), \\ &= H^{p-1}(M,\mathcal{Z}^1), \\ &= H^p(M,\mathcal{Z}^0), \\ &= H^p(M,\mathbb{R}). \end{aligned}$$

La cohomologie de De Rham d'une variété est isomorphe à sa cohomologie de Cech à coefficients dans $\mathbb{R}$.

4. Cohomologie de Dolbeault d'une variété complexe

En chaque point d'une variété complexe M, on définit des coordonnées locales z_j et $\overline{z}_j$ ainsi que le fibré tangent $\mathbb{C}\left[\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right]$ que l'on note TM. Celui-ci admet la décomposition $TM = T'M \oplus T''M$ où $T'M$ (resp. $T''M$) est la partie holomorphe (resp. antiholomorphe) de TM engendrée par $\frac{\partial}{\partial z_j}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}$). De même, le fibré cotangent T^*M (dual de TM) admet la décomposition $T^*M = T'^*M \oplus T''^*M$ en parties holomorphe et antiholomorphe. Les points de ce fibré sont les formes linéaires sur les fibres de $TM \longrightarrow M$. Une p-forme différentielle est une section du fibré $\Lambda^p T^*M$ (les puissances extérieures de T^*M). Les points de ce dernier étant les p-formes multilinéaires alternées sur T^*M. Si $z_1, ..., z_n$ sont des coordonnées locales holomorphes sur une variété complexe M de dimension n, alors les $dz_1, ..., dz_n, d\overline{z}_1, ..., d\overline{z}_n$ forment une base locale de l'espace des formes différentielles. Une forme différentielle sur M de type (p, q)) est donnée localement par

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq j_1 < ... < j_p \leq n \\ 1 \leq k_1 < ... < k_q \leq n}} f_{j_1 ... j_p k_1 ... k_q} dz_{j_1} \wedge ... \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge ... \wedge d\overline{z}_{k_q},$$

où les $f_{j_1 ... j_p k_1 ... k_q}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes. Cette définition ne dépend pas du choix de coordonnées locales holomorphes. Evidemment, une forme de type $(0, 0)$ est une fonction. L'ensemble des formes différentielles de type (p, q) sur M est un fibré vectoriel complexe noté $A_M^{p,q}$. Il est à noter que seul $A_M^{p,0}$ est holomorphe. La différentielle de ω est

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{\substack{1 \leq j_1 < ... < j_p \leq n \\ 1 \leq k_1 < ... < k_q \leq n}} df_{j_1 ... j_p k_1 ... k_q} \wedge dz_{j_1} \wedge ... \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge ... \wedge d\overline{z}_{k_q}, \\ &= \sum_{\substack{1 \leq j_1 < ... < j_p \leq n \\ 1 \leq k_1 < ... < k_q \leq n}} \partial f_{j_1 ... j_p k_1 ... k_q} \wedge dz_{j_1} \wedge ... \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge ... \wedge d\overline{z}_{k_q} \\ &\quad + \sum_{\substack{1 \leq j_1 < ... < j_p \leq n \\ 1 \leq k_1 < ... < k_q \leq n}} \overline{\partial} f_{j_1 ... j_p k_1 ... k_q} \wedge dz_{j_1} \wedge ... \wedge dz_{j_p} \wedge d\overline{z}_{k_1} \wedge ... \wedge d\overline{z}_{k_q}, \\ &= \partial\omega + \overline{\partial}\omega, \end{aligned}$$

où $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z} dz$ et $\overline{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \overline{z}} d\overline{z}$. Puisque $\partial f_{j_1 ... j_p k_1 ... k_q}$ est de type $(1, 0)$ et $\overline{\partial} f_{j_1 ... j_p k_1 ... k_q}$ est de type $(0, 1)$, alors la composante $\partial\omega$ de $d\omega$ est de type $(p + 1, q)$ et $\overline{\partial}\omega$ est de type $(p, q + 1)$. On a donc la décomposition suivante : $d - \partial + \overline{\partial}$ et les opérateurs ∂, $\overline{\partial}$ sont indépendants du choix de coordonnées locales holomorphes. La relation $d^2 = 0$ (voir formes différentielles, section 3.2) signifie ici que :

$$\partial^2 = \overline{\partial}^2 = \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0.$$

En effet, des relations $d^2 = 0$ et $d = \partial + \overline{\partial}$, on tire

$$0 = d^2 = \partial^2 + \overline{\partial}^2 + \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial.$$

Notons que si ω est une forme de type (p, q), alors $\partial^2\omega$ est de type $(p + 2, q)$, $\overline{\partial}^2\omega$ est de type $(p, q + 2)$ et $(\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial)$ est de type $(p + 1, q + 1)$. Le résultat découle du fait que la somme de ces trois formes est nulle.

L'opérateur $\overline{\partial}$ satisfait la règle de Leibniz,

$$\overline{\partial}(\omega \wedge \lambda) = \overline{\partial}\omega \wedge \lambda + (-1)^{deg\omega} \omega \wedge \overline{\partial}\lambda.$$

En remarquant que $\partial\omega = \overline{\overline{\partial}\overline{\omega}}$, on obtient aussi

$$\partial(\omega \wedge \lambda) = \partial\omega \wedge \lambda + (-1)^{deg\omega}\omega \wedge \partial\lambda.$$

Par ailleurs, la forme différentielle ω est dite $\overline{\partial}$-fermée si $\overline{\partial}\omega = 0$ et $\overline{\partial}$-exacte s'il existe une forme λ telle que : $\omega = \overline{\partial}\lambda$. Toute forme $\overline{\partial}$-exacte est $\overline{\partial}$-fermée. L'analogue du lemme de Poincaré pour l'opérateur $\overline{\partial}$ peut s'énoncer comme suit : si ω est une forme de type (p,q) de classe $\mathcal{C}^1$, $q > 0$ avec $\overline{\partial}\omega = 0$, alors on peut trouver localement sur M une forme λ de classe $\mathcal{C}^1$ de type $(p, q-1)$ telle que : $\omega = \overline{\partial}\lambda$. Rappelons que le lemme de Poincaré entraine la nullité des groupes de cohomologie dans le cas d'ouverts étoilés. On appelle groupe de cohomologie de Dolbeault d'une variété complexe M, les espaces vectoriels réels

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) = \frac{\{\text{formes de type (p,q) } \overline{\partial}\text{-fermées sur } M\}}{\{\text{formes de type (p,q) } \overline{\partial}\text{-exactes sur } M\}}.$$

On a un isomorphisme

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) \simeq H^q(M, \Omega^p_M),$$

pour tous entiers p et q.

5. Connexions et courbure

Soit M une variété complexe. L'ensemble des applications multilinéaires alternées de degré p sur l'espace tangent T_xM, $x \in M$, forme un espace vectoriel noté $\Lambda^p T^*_x M$. L'ensemble de ces espaces forme un fibré vectoriel sur M, noté $\Lambda T^* M$. Une p-forme différentielle peut se redéfinir comme une section globale du fibré $\Lambda T^* M$. Soit $\mathcal{A}^p(\mathcal{L})$ l'ensemble des p-formes différentielles sur M à valeurs dans le fibré $\mathcal{L}$, i.e., les sections du fibré $(\Lambda T^* M) \otimes \mathcal{L}$. Une connexion sur un fibré $\mathcal{L}$ est un opérateur $D : \mathcal{A}^0(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{A}^1(\mathcal{L})$ satisfaisant la règle de Leibniz

$$D(f.s) = df \otimes s + f.Ds,$$

pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M et pour toute section $s \in \mathcal{A}^0(\mathcal{L})$. Un des intérêts de la connexion est qu'elle donne un moyen de dériver des sections du fibré par rapport à un vecteur de base et aussi un outil pour réaliser le transport parallèle. Pour une section s et un vecteur tangent $v \in T_x(M)$, $x \in M$, alors $(Ds)(v)$ peut être vue comme la dérivée de s dans la direction v. Dans une trivialisation locale $\mathcal{U} \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ du fibré $\pi : \mathcal{L} \longrightarrow M$, la connexion D s'écrit sous la forme

$$De_j = \sum \theta_{jl} \otimes e_l,$$

où $e \equiv (e_j)$ est une base de $\mathcal{L}$ par rapport à l'ouvert $\mathcal{U} \subset M$ et $(\theta_{jl}) \equiv \theta_e$ une matrice (dite matrice de connexion) dont les coefficients sont des 1-formes. Comme les sections de $\mathcal{L}$ s'identifient à $s = \sum s_j e_j$, alors d'après la règle de Leibniz, la connexion D s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} Ds &= \sum ds_j \otimes e_j + \sum \alpha_j De_j, \\ &= \sum_l \left(ds_l + \sum_j s_j \theta_{jl} \right) \otimes e_l. \end{aligned}$$

Si $e' \equiv (e'_j)$ est une autre base telle que : $e' = f(e)$, alors

$$\theta_{e'} = df.f^{-1} + f\theta_e f^{-1}.$$

En utilisant la décomposition des 1-formes

$$\mathcal{A}^1(\mathcal{L}) = \mathcal{A}^{1,0}(\mathcal{L}) \oplus \mathcal{A}^{0,1}(\mathcal{L}),$$

en parties holomorphes D' et antiholomorphes D'' de D, on peut définir ces parties de façon à ce que D se scinde en la somme : $D = D' + D''$, d'une connexion de type $(1,0)$ et d'une connexion de type $(0,1)$.

La courbure de la connexion D sur le fibré $\mathcal{L}$ est l'opérateur défini par

$$D^2 : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}^2(\mathcal{L}).$$

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $s \in \mathcal{A}^0(\mathcal{L})$. On a

$$\begin{aligned} D^2(f.s) &= D(df \otimes s + f.Ds), \\ &= (d^2 \otimes s - df \wedge Ds) + (df \wedge Ds + f.D^2 s), \\ &= f.D^2 s, \end{aligned}$$

ce qui montre que D^2 est $\mathcal{C}^\infty$-linéaire. La valeur de $D^2 s$ en chaque point, ne dépend que de la section s en ce point et pas des valeurs voisines. Dès lors, si deux sections s_1 et s_2 ont même valeur en un point, alors $D^2 s_1$ et $D^2 s_2$ ont la même valeur. Donc D^2 définit une section globale Θ du fibré $\Lambda^2 T^* M \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^*$. La forme Θ s'appelle forme de courbure du fibré. Si $e \equiv (e_j)$ est une base de $\mathcal{L}$ par rapport à $\mathcal{U}$, alors

$$D^2 e_j = \sum \Theta_{jl} \otimes e_l \in \mathcal{A}^1(\mathcal{L}),$$

où $(\Theta_{jl}) \equiv \Theta_e$ est une matrice de 2-formes sur M, dite matrice de courbure de D par rapport à la base (e_j). Si $e' \equiv (e'_j)$ est une autre base telle que :

$e' = f(e)$, alors la matrice de courbure $\Theta_{e'}$ par rapport à la base (e'_j) est liée à Θ_e par la relation : $\Theta_{e'} = f\Theta_e f^{-1}$. On a

$$\begin{aligned} D^2 e_j &= D(De_j), \\ &= D\left(\sum \Theta_{jl} \otimes e_l\right), \\ &= \sum_l \left((d\Theta_{jl}) \otimes e_l - \Theta_{lj} \wedge De_l\right), \\ &= \sum_l (d\Theta_{jl}) \otimes e_l - \sum_{l,k} (\Theta_{jl} \wedge \Theta_{kl}) \otimes e_k, \\ &= \sum_l \left((d\Theta_{kj}) + (\Theta \wedge \Theta_{kj})\right) \otimes e_k. \end{aligned}$$

Donc localement, D^2 est donnée par la matrice de courbure et on obtient ainsi l'équation de structure de Cartan

$$\Theta_e = d\theta_e - \theta_e \wedge \theta_e.$$

6. Forme de courbure et première classe de Chern de fibrés en droites

Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur une variété complexe M, muni d'une connexion quelconque et soit Θ la forme de courbure de cette connexion. On a montré précédemment que $\Theta = d\theta + \theta \wedge \theta$. Comme $\mathcal{L}$ est un fibré en droites, alors $\theta \wedge \theta = 0$ et $\Theta = d\theta$ est une 2-forme fermée sur M puisqu'elle est localement exacte. Il est donc tout à fait naturel de considérer sa classe $[\Theta]$ en cohomologie de De Rham. Par ailleurs, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_M \overset{\exp}{\longrightarrow} \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0,$$

fournit la définition de la classe de Chern en cohomologie

$$H^1(M, \mathcal{O}_M^*) \overset{c_1 = \partial}{\longrightarrow} H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Pour $\mathcal{L} \in H^1(M, \mathcal{O}_M^*)$, on a $c_1(\mathcal{L}) = \partial\mathcal{L}$. En fait, $c_1(\mathcal{L})$ peut-être vue comme un élément de $H^2(M, \mathbb{R})$ et ce dernier s'identifie d'après ce qui précède à $H^2_{DR}(M)$. Pour calculer $c_1(\mathcal{L})$, on considère un recouvrement ouvert $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ de M donnant une trivialisation de $\mathcal{L}$. On choisit ce recouvrement assez fin de façon à ce que les intersections $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ soient simplement connexes. Soient $g_{\alpha\beta}$ les fonctions de transitions entre les ouverts de ce recouvrement. Le bord du cocycle $(g_{\alpha\beta})$ étant nul, alors en posant

$$h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi i} \log g_{\alpha\beta},$$

on peut chercher le bord de $(g_{\alpha\beta})$ dans $\mathcal{C}^2(M,\mathbb{Z})$. Il est donné par le cocycle

$$z_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi i}(\log g_{\alpha\beta} + \log g_{\beta\gamma} - \log g_{\alpha\gamma}).$$

Comme le logarithme complexe admet une infinité de déterminations, on peut sur chacun des ouverts simplement connexes mentionnés ci-dessus, trouver une détermination.

Soit e_α la trivialisation correspondante à la section $1 \in \mathbb{C}$ dans l'ouvert $\mathcal{U}_\alpha$. Par définition, on a $e_\alpha = g_{\alpha\beta} e_\beta$. En choisissant une connexion quelconque D sur $\mathcal{L}$, alors localement on l'exprime par une 1-forme $\lambda_\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$ avec

$$De_\alpha = \lambda_\alpha \otimes e\alpha.$$

Sur $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha \otimes e\alpha &= De_\alpha,\\
&= D(g_{\alpha\beta} e_\beta),\\
&= dg_{\alpha\beta} \otimes e_\beta + g_{\alpha\beta} De_\beta,\\
&= \frac{dg_{\alpha\beta}}{g_{\alpha\beta}} \otimes e_\alpha + g_{\alpha\beta}\lambda_\beta \otimes e_\beta,\\
&= d\log g_{\alpha\beta} \otimes e_\alpha + \lambda_\beta \otimes e_\alpha.
\end{aligned}$$

D'où

$$\lambda_\alpha - \lambda_\beta = d\log g_{\alpha\beta},$$

est le bord de la 0-chaîne (λ_α) et dès lors, la forme de courbure est

$$\Theta = d\lambda_\alpha = \lambda_\beta.$$

La courbure Θ est donnée comme une 2-forme fermée $\Theta = d\lambda_\alpha$ avec $\lambda_\alpha - \lambda_\beta = d\log g_{\alpha\beta}$ et la classe de Chern $c_1(\mathcal{L})$ est donnée par le cocycle $(z_{\alpha\beta\gamma})$ de Cech. Pour expliciter l'isomorphisme de De Rham, il suffit d'utiliser les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Omega^0 \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^1 \longrightarrow 0,$$

où Ω^0 est le faisceau des 0-formes ou fonctions de $\mathcal{C}^\infty$ et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}^1 \longrightarrow \Omega^1 \xrightarrow{d} \mathcal{Z}^2 \longrightarrow 0,$$

en vertu du lemme de Poincaré. Ces suites fournissent respectivement les opérateurs bord

$$H^1(\mathcal{Z}^1) \xrightarrow{\partial} H^2(\mathbb{R}),$$

et

$$\frac{H^0(\mathcal{Z}^2)}{dH^0(\Omega^1)} \xrightarrow{\partial} H^1(\mathcal{Z}^1).$$

Pour la première suite, l'opérateur bord se calcule en écrivant $\Theta = d\lambda_\alpha$ localement et dès lors $\{\lambda_\alpha - \lambda_\beta\} \in H^1(\mathcal{Z}^1)$. Or $\lambda_\alpha - \lambda_\beta = d\log g_{\alpha\beta}$ donc

$$(-\log g_{\alpha\beta} - \log g_{\beta\gamma} + \log g_{\alpha\gamma}) = -2\pi i c_1(\mathcal{L}).$$

Pour la seconde suite, l'opérateur bord associe à une 2-forme fermée, un élément de $H^1(\mathcal{Z}^1)$. On peut donc choisir comme 2-forme fermée Θ et l'écrire localement (comme précédemment) sur chaque ouvert $\mathcal{U}_\alpha$ de M, comme la différentielle d'une 1-forme λ_α. On a $\Theta = d\lambda_\alpha$ sur $\mathcal{U}_\alpha$ et le bord de cette 0-chaîne de 1-formes est la 1-chaîne $(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) = d\log g_{\alpha\beta} \in H^1(\mathcal{Z}^1)$. Par conséquent, on vient de montrer que si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites sur M muni d'une connexion quelconque et si Θ est la forme de courbure de la connexion, alors on a

$$c_1(\mathcal{L}) = \frac{i}{2\pi}\Theta \in H^2_{DR}(M).$$

Il est à noter que cette classe de cohomologie est indépendante de la connexion.

7. Le dual de Poincaré

Soit $V \subset M$ une hypersurface sur la variété M de dimension n. La classe d'homologie $(V) \in H_{2n-2}(M,\mathbb{Z})$ est défini par la fonctionnelle linéaire

$$\varphi \longmapsto \int_V \varphi,$$

sur $H^{2n-2}(M,\mathbb{Z})$ et on désigne par $\eta_V \in H^2(M,\mathbb{C})$ le dual de Poincaré. La classe de celui-ci s'appelle classe fondamentale de l'hypersurface V. Dans le cas particulier d'un diviseur $\mathcal{D} = \sum k_j V_j$ sur M, sa classe fondamentale est donnée par le dual de Poincaré

$$\eta_{\mathcal{D}} = \sum k_j.\eta_{V_j}.$$

Soient $\mathcal{L}$ un fibré en droites et $\mathcal{D}$ un diviseur sur M. En utilisant le théorème de Stokes-Cartan, on peut montrer que si $\mathcal{L} = [\mathcal{D}]$, alors $c_1(\mathcal{L}) = \eta_{\mathcal{D}} \in H^2_{DR}(M)$, où $\eta_{\mathcal{D}}$ est le dual de Poincaré de $\mathcal{D}$.