Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
El Jadida

Complément de cours[1] : Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$, une application.

Définition 1 *On dit que f admet pour limite $l \in \mathbb{R}^p$ lorsque x tend vers a dans Ω si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega, ||x - a|| < \delta \Longrightarrow ||f(x) - l|| < \varepsilon.$$

On écrit $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Notons que si la limite existe, elle est unique.

Définition 2 *On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue sur Ω si elle est continue en tout point de Ω.*

Remarques 1 *a) Pour prouver la continuité d'une fonction de plusieurs variables en un point a de son domaine, on majore $|f(x) - f(a)|$ par une expression mieux connue, tendant vers 0 avec $||x - a||$.*

b)Pour prouver la discontinuité d'une fonction de plusieurs variables en un point a de son domaine, on prouve que pour x tendant vers a le long d'un chemin particulier, $f(x)$ ne tend pas vers $f(a)$.

c) Quelques majorations utiles :

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Exercice 1 *Etudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, y \neq 0 \\ 0, y = 0 \end{cases}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^6 + y^4}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 2 *Même question pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^3 z^3}{x^4 + y^6 + z^8}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

[1](Responsable : Prof. Lesfari, lesfariahmed@yahoo.fr, http ://lesfari.com)

Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Notons

$$\Omega_i = \{x_i \in \mathbb{R} : (a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \in \Omega\}, 1 \leq i \leq n$$

et considérons l'application suivante :

$$f^i : \Omega_i \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad x_i \longmapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n).$$

Définition 3 *On dit que f^i est la $i^{\text{ème}}$ fonction partielle de f au point a (c'est une fonction vectorielle).*

Proposition 1 *Si f est continue en a, alors chaque f^i est continue en a_i. La réciproque est fausse.*

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage de a, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$, et $u \in \mathbb{R}^n$ avec $u \neq 0$.

Définition 4 *Si la limite $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} \dfrac{f(a + \lambda u) - f(a)}{\lambda}$ existe, alors on l'appelle dérivée de f en a dans la direction u et on la note $\dfrac{\partial f}{\partial a}(a)$ ou $\partial_u f(a)$.*

Un cas particulier important de dérivée directionnelle est celui de dérivée partielle. La dérivée partielle de f au point a par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable, s'obtient en prenant pour u le $i^{\text{ème}}$ vecteur $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ de la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On la note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f_i'(a)$. D'après la définition des dérivées directionnelles, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} \frac{f(a + \lambda e_i) - f(a)}{\lambda}, \\ &= \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} \frac{f(a_1, ..., a_i + \lambda, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_n)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Au fond, on calcule la dérivée au point a_i de la $i^{\text{ème}}$ fonction partielle de f au point a :

$$x_i \longmapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n).$$

En d'autres termes, pour calculer la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, on fixe toutes les variables, sauf la $i^{\text{ème}}$, et on dérive la fonction d'une variable ainsi obtenue.

Remarques 2 *a) L'existence des dérivées partielles en un point n'assure pas la continuité de la fonction en ce point, ni l'existence des dérivées directionnelles en ce point.*

b) L'existence de toutes les dérivées directionnelles en un point n'implique pas la continuité de la fonction en ce point.

Soit $a \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage de a et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$, une application.

Définition 5 *On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, telle que :*

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad f(a+h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h),$$

avec $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{\varepsilon(h)}{||h||} = 0$ (i.e., $\varepsilon(h) = o(||h||)$). De façon équivalente (il suffit de poser $x = a + h$), s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, telle que :

$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \varepsilon(x-a),$$

avec $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega \setminus \{a\}}} \dfrac{\varepsilon(x-a)}{||x-a||} = 0$. L'application L si elle existe, est unique et s'appelle la différentielle de f au point a. On la note $df(a)$ ou df_a.

Signalons l'observation triviale suivante : La fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est différentiable en a si et seulement si ses composantes f_j sont différentiables en a.

Proposition 2 *Si f est différentiable au point a, alors f est continue en a. (La réciproque est fausse en général).*

On montre que si f est différentiable en a, alors f est dérivable suivant tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$ et

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df(a)u,$$

pour chaque u de $\mathbb{R}^n$. Cette formule implique que si L est l'application linéaire intervenant dans la définition de la différentiabilité de f en a, alors

$$L(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a), \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

d'où l'unicité de L.

Proposition 3 *Si f est différentiable au point a, alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existent et on a*

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

(La réciproque est fausse en général).

Exercice 3 *Quelle est la valeur approchée de $(1,02)^{3,01}$?*

Remarque 1 *La seule existence des dérivées partielles ne suffit pas à assurer la différentiabilité. Par contre, on a le théorème suivant très utile en pratique.*

Théorème 1 *Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ de f existent dans un voisinage de a et sont continues en a, alors f est différentiable en a. (La réciproque est fausse en général).*

Proposition 4 *(Condition suffisante de différentiabilité dans le cas des fonctions $f(x, y)$ de deux variables) : Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent au point (a, b) et que l'une est continue au point (a, b), alors f est différentiable en (a, b).*

Définition 6 *On dit que f est continûment différentiable ou de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω lorsque les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ de f existent et sont continues sur Ω.*

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors f est différentiable sur Ω.

Exercice 4 *Etudier la différentiabilité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},\quad f(x,y)=\left\{\begin{array}{r}(x^2+y^2)^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{array}\right.$$

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{r}\frac{xy^3}{x^4+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{array}\right.\quad,\quad f(x,y)=\left\{\begin{array}{r}xy\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{array}\right.$$

Exercice 5 *Montrer que la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y)=\frac{|x|y^3}{x^2+y^2},$$

admet un prolongement continue à l'origine. Etudier la différentiabilité en tout point de la fonction prolongée.

Exercice 6 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose*

$$g(x,y)=\left\{\begin{array}{rl}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y\\ f'(x), & x=y\end{array}\right.$$

a) Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}^2$.
b) Si $f''(a)$ existe, g est-elle différentiable en (a, a)?

Proposition 5 *Soient*

$$f,g:\Omega\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^p,\qquad h:\Omega\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},$$

des fonctions différentiables au point $a\in\Omega$. Alors $f+g$ et fh sont dofférentiables en a et on a

$$d(f+g)(a)=df(a)+dg(a),\quad d(fh)(a)=h(a)df(a)+f(a)dh(a).$$

Si de plus, $h(a)\neq 0$, alors $\dfrac{f}{h}$ est différentiable en a et

$$d\left(\frac{f}{h}\right)(a)=\frac{(df(a))h(a)-f(a)dh(a)}{h^2(a)}.$$

Proposition 6 *(Différentiabilité d'une fonction composée) : Soient $a \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage de a et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Posons $b = f(a)$ et soit Δ un voisinage de b et $g : \triangle \longrightarrow \mathbb{R}^q$. On suppoe que f est différentiable en a et g est différentiable en b. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et*

$$d(g \circ f)(a) = dg(b).df(a).$$

Exercice 7 *On considère une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. On pose,*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = f(\cos x^2, xy, f(y,y,y)).$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de F par rapport à x et à y en un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On exprimera les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

Exercice 8 *Même question pour la fonction*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = f(\cos x^2, xy, f(x,y,x)).$$

Considérons l'application $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x \longmapsto y = f(x)$. On a

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, ..., x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, ..., x_n), \\ &\vdots \\ y_p &= f_p(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

On suppose que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$, $a \in \Omega$, existent.

Définition 7 *On appelle matrice jacobienne de f en a, la matrice d'ordre $p \times n$ suivante :*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Si $p = 1$, $J_f(a)$ se réduit à un vecteur de $\mathbb{R}^n$,

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right), \quad (f \equiv f_1),$$

appelé gradient de f ; (On le note grad f ou ∇f).

Si $n = p$, le déterminant de la matrice $J_f(a)$ s'appelle jacobien de f en a et on écrit

$$\det J_f(a) = \frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}(a).$$

Exprimé en terme de matrice jacobienne, la proposition 6 (sur la différentielle d'une fonction composée) fournit le résultat suivant :

Proposition 7 *On a*
$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)).J_f(a).$$

Supposons de plus que f est bijective avec $g = f^{-1}$. D'où $\det J_{g\circ f}(a) = 1$, et par conséquent
$$\frac{\partial(f_1,...,f_n)}{\partial(x_1,...,x_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x_1,...,x_n)}{\partial(f_1,...,f_n)}}.$$
Cette formule est très utile car permet souvent d'éviter l'inversion explicite d'une fonction.

Proposition 8 *(théorème des accroissements finis) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ tels que le segment $[a, a+h] = \{a + th : 0 \leq t \leq 1\}$ soit inclus dans Ω. On suppose que f est différentiable sur Ω. Alors, il existe un réel $\theta \in]0,1[$ tel que :*
$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h),$$
avec $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Remarque 2 *Le théorème des accroissements finis n'est plus vrai pour les fonctions à valeurs vectorielles (en particulier à valeurs complexes).*

Proposition 9 *(Inégalité des accroissements finis) : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application, $a \in \Omega$, $h \in E$ tels que le segment $[a, a+h]$ soit inclus dans Ω. On suppose que f est continue sur $[a, a+h]$, différentiable sur $]a, a+h[$ et que :*
$$\exists M, \forall x \in]a, a+h[, \parallel df(x) \parallel \leq M.$$
Alors,
$$\parallel f(a+h) - f(a) \parallel \leq M \parallel h \parallel .$$

Soient $a \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage de a et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existent au point $a \in \Omega$ et sont continues en a, on sait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en a. Si ces dérivées partielles possèdent elles-mêmes des dérivées partielles, on les appellent dérivées partielles secondes et on note
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(a).$$

Si ces dérivées partielles secondes existent au voisinage de a et sont continues en a, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ en a. On définit ainsi par récurrence les dérivées partielles $k^{\text{èmes}}$ et la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^k$. On dit enfin qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en a si toutes ses dérivées partielles, de tous les ordres, existent au voisinage de a et sont continues en a.

Exercice 9 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g(xy)}{g(x^2)+g(y^2)} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$.

Proposition 10 *(théorème ou lemme de Schwarz) : Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in int\,\Omega$. Soient $i \neq j \in \{1, ..., n\}$. Supposons que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent en tous les points d'un voisinage U de a et que ces deux fonctions sont continues en a. Alors,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Remarques 3 *a) Pour désigner les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ d'une fonction f de n variables de classe $\mathcal{C}^k$, on utilise parfois la notation suivante :*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_n)^{\alpha_n} ... (\partial x_1)^{\alpha_1}},$$

avec $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$: n-uple d'entiers ≥ 0 et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq k$.

b) Une variante du théorème précédent : Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in int\,\Omega$ et $i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$. Si f est deux fois différentiable en a, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Exercice 10 *Montrer que l'interversion des dérivées partielles n'est cependant pas légitime dans tous les cas.(Réponse : il suffit de considérer l'exemple*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On montre que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$).

Proposition 11 *(Formule de Taylor) : Soient $a \in \mathbb{R}^n$, Ω un voisinage de a et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}^n$, tel que le segment $[a, a+h]$, soit contenu dans Ω. On suppose que $f \in \mathcal{C}^{r+1}$ sur Ω. Alors, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i_1,i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(a) h_{i_1} h_{i_2} + \cdots \\ &+ \frac{1}{r!} \sum_{i_1,...,i_r=1}^{n} \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r} ... \partial x_{i_1}}(a) h_{i_1} ... h_{i_r} \\ &+ \frac{1}{(r+1)!} \sum_{i_1,...,i_{r+1}=1}^{n} \frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_{i_{r+1}} ... \partial x_{i_1}}(a+\theta h) h_{i_1} ... h_{i_{r+1}}. \end{aligned}$$

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in \Omega$. On dit qu'un polynôme $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, de degré $\leq n$ est un développement limié de f à l'ordre n au point a, si $||f(a+x) - P(x)|| = o(||x||^n)$. Dans le cas où f est n-fois différentiable au point a, la formule de Taylor (proposition 11), exprime précisément que f admet un développement limité P à l'ordre n au point a.

Exercice 11 *Quelle est la valeur approchée de* $(0,95)^{2,01}$?

Proposition 12 *(théorème d'inversion locale) : Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. *Soit* $x_0 \in \Omega$, $b_0 = f(x_0)$. *Supposons que* $df(x_0)$ *soit inversible (i.e.,* $\det J_f(x_0) \neq 0$*). Alors, il existe un voisinage* $U(x_0)$ *de* x_0 *et un voisinage* $V(b_0)$ *de* b_0 *tels que la restriction de* f *à* $U(x_0)$ *soit une bijection de* $U(x_0)$ *sur* $V(b_0)$. *En outre, la réciproque*

$$f^{-1} : V(b_0) \longrightarrow U(x_0),$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. *(Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, *alors* f^{-1} *est également de classe* $\mathcal{C}^k$.

Exercice 12 *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *un ouvert et* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$. *Soit* $x_0 \in \Omega$, $b_0 = f(x_0)$. *Supposons que :* $\forall x \in \Omega$, $df(x)$ *est un isomorphisme. Montrer que :*
a) $\Delta \subset \Omega$, *ouvert*$\Longrightarrow$ $f(\triangle) \subset \mathbb{R}^n$, *ouvert.*
b) f *injective au voisinage de chaque point de* Ω.
c) f *peut ne pas être injective sur* Ω *tout entier même si* Ω *est connexe.*

Exercice 13 *Soit* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur l'ouvert* Ω *et supposons que* $df(x)$ *est un isomorphisme pour tout* $x \in \Omega$. *Montrer que* $f(\Delta)$ *est ouvert dans* $\mathbb{R}^n$ *pour chaque ouvert* $\Delta \subset \Omega$.

Exercice 14 *Sous les hypothèses de l'exercice précédent, montrer que*
a) f *est injective au voisinage de chaque point de* Ω.
b) f *peut ne pas être injective sur* Ω *tout entier (même lorsque* Ω *est connexe).*

Définition 8 *Un bijection* f *d'un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$ *sur un ouvert* $f(\Omega)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *qui est de classe* $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, *ainsi que sa réciproque* f^{-1} *s'appelle un difféomorphisme de classe* $\mathcal{C}^k$.

Exercice 15 *Plaçons nous dans la situation du théorème d'inversion locale dont nous utilisons les notations :* Ω, f, x_0, U, V *et* f_1. *Montrer que pour tout voisinage ouvert* $W \subset U$ *de* x_0, $f(W)$ *est un voisinage ouvert de* $f(x_0)$, *et* f *est bijective de* W *sur* $f(W)$ *avec une réciproque de classe* $\mathcal{C}^1$ *(*$\mathcal{C}^k$ *si* f *l'est).*

Proposition 13 *(théorème des fonctions implicites) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(a,b) \in \Omega$. Supposons que :*

(i) $g(a,b) = 0$.

(ii) la matrice $\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{1\leq i,j\leq p}$ est inversible.

Montrer qu'il existe un voisinage $U(a)$ de a dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage $V(b)$ de b dans $\mathbb{R}^p$, avec $U(a) \times V(b) \subset \Omega$, tels qu'il existe une fonction unique $f : U(a) \longrightarrow V(b)$, avec

(i)' $b = f(a)$.

(ii)' $g(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in U(a)$.

Cette fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$, f est de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 16 *On considère la relation :*

$$g(x_1, ..., x_n, y) = 0,$$

où $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $(a,b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ avec $g(a,b) = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Montrer que qu'il existe f définie et de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}.$$

Exercice 17 *On considère deux surfaces d'équations :*

$$x^2(y^2 + z^2) = 2,$$

et

$$(x - z)^2 + y^2 = 1.$$

Peut-on représenter la courbe intersection de ces surfaces par des équations de la forme $y = f_1(x)$ et $z = f_2(x)$ au voisinage du point $(1,1,1)$? Si oui, calculer $f_1'(1)$ et $f_2'(1)$.

Exercice 18 *On considère la courbe d'équation :*

$$g(x, y) = y^2 - 2x^3 - x^2 = 0.$$

Peut-on représenter cette courbe par une équation $x = f(y)$.
a) au voisinage du point $(1, \sqrt{3})$?
b) au voisinage du point $(0,0)$?
Si oui, calculer la dérivée de f au point considéré.

Exercice 19 *On suppose que les variables réelles x, y, z sont liées par la relation $f(x, y, z) = 0$. Montrer que sous des hypothèses à préciser*

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

Exercice 20 *On considère la surface d'équation :*

$$xy - z\ln y + \exp xz = 1.$$

Cette surface peut-elle être représentée,
a) par une équation de la forme $z = f(x, y)$ *au voisinage du point* $(0, 1, 1)$ *?*
b) par une équation de la forme $y = h(x, z)$ *au voisinage du point* $(0, 1, 1)$ *?*
Si oui, calculer les dérivées premières de f *et* h *au point considéré.*

Exercice 21 *Soit* f *l'application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x, y) = (x^2 - y^2 - 2xy, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Montrer que f *définit une bijection de* $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ *sur* $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + 2v^2 > 0\}$.
2) f *est-elle un homéomorphisme de* U *sur* V *?*
3) f *est-elle un difféomorphisme de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* U *sur* V *?*
4) Soit g *une fonction continument dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *et* h *l'application*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow h(x, y) = g(x^2 - y^2 - 2xy) \in \mathbb{R}.$$

4.1) Calculer $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ *et* $\dfrac{\partial h}{\partial y}$.
4.2) Montrer l'égalité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x + y)\frac{\partial h}{\partial x} + (x - y)\frac{\partial h}{\partial y} = 0. \qquad (*)$$

4.3) On cherche les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ *de* U *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant l'égalité (*).*

(i) Soit h_1 *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *vérifiant l'égalité (*). Montrer que l'application* g_1 *:*

$$(u, v) \in V \longmapsto g_1(u, v) = h_1 \circ f(u, v) \in \mathbb{R},$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ *et vérifie* $\dfrac{\partial g_1}{\partial v} = 0$.

(ii) On admet que si une fonction H *de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* V *dans* $\mathbb{R}$ *vérifie* $\dfrac{\partial H}{\partial v} = 0$ *alors* H *ne dépend pas de la variable* u.
En déduire la forme générale des fonctions vérifiant l'égalité (*) dans U.

Exercice 22 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une application différentiable injective. Montrer que* f *est un difféomorphisme de* Ω *sur* $f(\Omega)$ *si et seulement si le rang de* f *en tout point de* Ω *est* n.

Exercice 23 *Soient* Ω *un ouvert de* E *et* $f : \Omega \longrightarrow F$ *une application différentiable de rang constant* r. *Montrer que pour tout* $a \in \Omega$, *il existe*

(i) un voisinage ouvert $U(a)$ *de* a *dans* Ω.
(ii) un voisinage ouvert $V(b)$ *de* $b = f(a)$ *dans* F, *contenant* $f(U(a))$.
(iii) un difféomorphisme local $g : U(a) \longrightarrow W$ *de* E *et un difféomorphisme local* $h : V(b) \longrightarrow W'$ *de* F.

tels que l'on ait :

$$(h \circ f \circ g^{-1})(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0), \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in W.$$

Définition 9 *On dit qu'une fonction* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, *est homogène de degré* α *si, pour* $\lambda \in {}^*_+$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, *on ait*

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Si f et g sont homogènes de degré α, alors $f+g$ est homogène de degré α. Si f est homogène de degré α et g est homogène de degré β, alors fg est homogène de degré $\alpha+\beta$ et $\frac{f}{g}$ est homogène de degré $\alpha-\beta$. Si f est homogène de degré α et $s \in \mathbb{R}^*$, alors f^s est homogène de degré α^s. Si f est différentiable et homogène de degré α, alors les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $\alpha - 1$.

Proposition 14 *Si* f *est différentiable en* x *et homogène de degré* α, *alors on a la formule d'Euler :*

$$\sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \alpha f(x).$$

Exercice 24 *Déterminer* $f : (\mathbb{R}^*_+)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *homogène de degré* α *en* (y,z), β *en* (z,x) *et* γ *en* (x,y).

Exercice 25 *Soit* E, F *deux espaces vectoriels réels normés et* $f : E \longrightarrow F$, *vérifiant*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in E.$$

On suppose que f *est bornée sur la boule unité de* E. *Montrer que :*

a) $\forall \lambda \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

b) f *est continue en tout point de* E.

c) f *est linéaire.*

Exercice 26 *On appelle cône (positif) d'un evn* E *une partie* C *de* E *vérifiant :* $\forall x \in E, \forall \lambda > 0, \lambda x \in C$. *Vérifier que* $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \geq 0\}$ *est un cône positif et que* $f : (x,y) \mapsto \sqrt{y-x}$ *est homogène (préciser son degré).*

Exercice 27 *Déterminer les fonctions* φ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *telles que :*

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)g(y).$$

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.

Définition 10 *a) On dit que* f *possède en* a *un maximum (resp. minimum) local ou relatif s'il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* a *inclus dans* Ω *tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad f(x) \leq f(a) \quad (\textit{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

b) On dit que f *possède en* a *un maximum (resp. minimum) global si :*

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) \leq f(a) \quad (\textit{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

c) Un extremum est un maximum ou un minimum.

Proposition 15 *(Condition nécessaire) : Si f est différentiable en a et présente un extremum en a, alors $df(a) = 0$.*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ tel que : $df(a) = 0$.

Définition 11 *On appelle matrice hessienne (ou tout simplement hessienne) de f en a, la matrice suivante :*

$$\mathcal{H}(f,a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

A la matrice hessienne $\mathcal{H}$ de f en a (comme toute matrice carée d'ordre n), on associe la forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$Q(h) = \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) h_i h_j, \quad \forall h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Cette forme quadratique est parfois notée $d^2 f(a)$ et sa valeur en h, $d^2 f(a)(h)$. Rappelons qu'une forme quadratique Q est dite
- définie positive si $\forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0, Q(h) > 0$.
- semi-définie positive si $\forall h \in \mathbb{R}^n, Q(h) \geq 0$.
- définie négative si $\forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0, Q(h) < 0$.
- semi-définie négative si $\forall h \in \mathbb{R}^n, Q(h) \leq 0$.
- indéfinie si $\exists h, g \in \mathbb{R}^n$ avec $Q(h) > 0$ et $Q(g) < 0$.

Proposition 16 *(Conditions suffisantes) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ tel que : $df(a) = 0$.*
1) Si $d^2 f(a)$ est une forme quadratique définie positive, alors f possède un minimum local au point a.
2) Si $d^2 f(a)$ est une forme quadratique définie négative, alors f possède un maximum local au point a.
3) Si la forme quadratique $d^2 f(a)$ est indéfinie, alors f n'a pas d'extremum au point a.

Proposition 17 *Si f possède un minimum local (resp. un maximum local) au point a, alors $d^2 f(a)$ est semi-définie positive (resp. semi-définie négative).*

Remarque 3 *On démontre en algèbre qu'une forme quadratique Q associée à une matrice symétrique $\mathcal{H}$ est définie positive (resp. semi-définie positive) si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice $\mathcal{H}$ sont strictement positives (resp. positives).*

Proposition 18 *(Conditions suffisantes) : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ tel que : $df(a) = 0$.*
1) Si les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f, a)$ sont strictement positives, alors f possède un minimum local au point a.
2) Si les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f, a)$ sont strictement négatives, alors f possède un maximum local au point a.
3) S'il existe deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de $H(f, a)$ de signe contraire, f ne possède ni maximum, ni minimum local au point a.

Remarque 4 *Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, on montre que la matrice $\mathcal{H}(f, a)$ est symétrique et toutes ses valeurs propres sont réelles. De plus, toutes ses valeurs propres sont strictement positives si et seulement si $\mathcal{H}(f, a)$ est définie positive. De même, toutes ses valeurs propres sont strictement négatives si et seulement si $\mathcal{H}(f, a)$ est définie négative.*

Exercice 28 *(Conditions nécessaires) : Dans les hypothèses de la proposition précédente, montrer que :*
1) Si f possède un minimum local au point a, toutes les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f, a)$ sont positives ou nulles.
2) Si f possède un maximum local au point a, toutes les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f, a)$ sont négatives ou nulles.

Dans le cas de fonctions de deux variables $f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$, on peut se passer du calcul explicite des deux valeurs propres de la matrice hessienne et se contenter du signe du déterminant. Soit a un point critique, i.e., tel que : $df(a) = 0$. Posons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

La matrice hessienne

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix},$$

a pour déterminant :

$$\det \mathcal{H} = rt - s^2.$$

L'équation caractéristique est alors

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - r & -s \\ -s & \lambda - t \end{pmatrix} = \lambda^2 + (r + t)\lambda + (rt - s^2) = 0.$$

Si $\det \mathcal{H} < 0$, les deux racines sont de signes contraires et la matrice hessienne est indéfinie. On n'a donc pas d'extremum en a. On dit dans ce cas que f admet un point col ou point selle en a. Si $\det \mathcal{H} > 0$, les deux racines sont de même signe et f admet un extremum en a. C'est un minimum local si $r > 0$ et un maximum local si $r < 0$. En résumé, on a

Proposition 19 *(Conditions suffisantes dans le cas de fonctions de deux variables) :*
1) Si $\det \mathcal{H} > 0$ et $r > 0$, alors f admet un minimum local au point a.
2) Si $\det \mathcal{H} > 0$ et $r < 0$, alors f admet un maximum local au point a.
3) Si $\det \mathcal{H} < 0$, alors f n'admet pas d'extremum local au point a.

Remarque 5 *Si* $\det \mathcal{H} = 0$*, il faut faire une étude plus complète de* f*.*

Exercice 29 *Déterminer les extremums de la fonction :*

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Exercice 30 *Déterminer les extremums de la fonction :*

$$f(x,y) = \sin x. \sin y.$$

Les extremums étudiés précédemment sont dites libres. Mais bien des cas, on cherche à maximiser ou à minimiser une fonction, mais en tenant compte de certaines contraintes : on parle dans ces cas d'extremums liés.

Définition 12 *Soient* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$*, deux fonctions données et* $a \in \Omega$*. On dit que* f *possède au point* a *un maximum local sous les contraintes* $g(x) = 0$ *si*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}, ||x - a|| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) \leq f(a).$$

La fonction f *possède au point* a *un minimum local sous les contraintes* $g(x) = 0$ *si*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}, ||x - a|| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) \geq f(a).$$

Si f *possède au point* a *un maximum ou un minimum local sous les contraintes* $g(x) = 0$*, on dit que* f *possède au point* a *un extremum local sous les contraintes* $g(x) = 0$*.*

Proposition 20 *Soient* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$*, deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$*. Supposons que* f *possède au point* a *un extremum sous les contraintes* $g(x) = 0$ *et que la matrice jacobienne* $J_g(a)$ *de* g *au point* a *soit de rang* p*. Alors, il existe des constantes* $\lambda_1, ..., \lambda_p$ *(appelées multiplicateurs de Lagrange) telles que :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x}(a).$$

Méthode des multiplicateurs de Lagrange : Si le point a est un extremum local de f sous les contraintes $g(x) = 0$, alors les relations suivantes permettent en général de déterminer a :

i) $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x}(a).$

ii) $g(a) = 0.$

Exercice 31 *Chercher un extremum de la fonction :*

$$f(x,y) = x_1^2 + x_2^2,$$

sous la contrainte : $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0.$

Exercice 32 *Chercher les extremums de la fonction :*

$$f(x,y,z) = x\ln x + y\ln y + z\ln z,$$

sous la contrainte : $x+y+z=a, \quad (a>0)$.

Exercice 33 *Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par*

$$f(x,y,z) = \exp x + \exp y + \exp z,$$

lorsque (x,y,z) est soumis à la contrainte : $x+y+z=0$.

Exercice 34 *Soit $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$. On suppose que la différentielle de g est non nulle en tout point de $\mathcal{S}$. Montrer que si f admet un extremum sur $\mathcal{S}$ en $a \in \mathcal{S}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que : $df(a) = \lambda dg(a)$.*

Exercice 35 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $f \in \mathbb{R}^n$. On leur associe l'application*

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < f, x > .$$

a) Etudier la différentiabilité de F.
b) Calculer grad F.
c) Déterminer les extremums de F.

Exercice 36 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce problème, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et on désigne par f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. On dit que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si :*

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \forall \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

1) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $\mathbb{R}$ telle que : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, g'(x_0) = 0$. Montrer que g admet un minimum en x_0.
2) a) Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, la fonction $\varphi_{x,y}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{x,y}(t) = f(x+yt),$$

est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \varphi_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer alors, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \varphi'_{x,y}$ et $\varphi''_{x,y}$ en fonction des dérivées partielles de f.

c) Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $A_x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_x = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2, a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Soit alors ψ_x l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A_x. Montrer que les valeurs propres de A_x sont positives ou nulles si et seulement *si* $\forall y \in \mathbb{R}^n, \langle \psi_x(y), y \rangle \geq 0$.

d) En déduire que f *est convexe sur* $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, *toutes les valeurs propres de* A_x *sont positives ou nulles.*

3) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Montrer que si* f *est convexe sur* $\mathbb{R}^n$ *et si* $\forall i \in [1, n], \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$, *alors* f *admet un minimum en* x_0.