# Étude de la fonction Gamma d'Euler

**A. Lesfari**
*E. mail* : lesfariahmed@yahoo.fr
Site web : http://lesfari.com

## ♠ Problème ♠

On appelle fonction gamma d'Euler la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

**1)** Montrer que $\Gamma$ est définie sur $]0, +\infty[$.

**2)** Montrer que cette intégrale converge uniformément sur l'intervalle $[a, b]$ où $0 < a < b < +\infty$.

**3)** En déduire que $\Gamma$ est continue sur $]0, +\infty[$.

**4)** Montrer que $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ avec

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^k t^{x-1} dt.$$

**5)** Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

**6)** En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(k+1) = k!.$$

**7)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(2k)!}{2^{2k} k!}\sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(-k + \frac{1}{2}\right) &= \frac{(-1)^k 2^{2k} k!}{(2k)!}\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

**8)** Montrer que $\Gamma$ est convexe.

**9)** Montrer que $\Gamma'$ s'annule une et une seule fois en un point $\alpha \in ]1, 2[$.

**10)** Montrer que :

$$\lim_{x\to 0^+} x\Gamma(x) = 1,$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x) = \lim_{x\to +\infty} \Gamma(x) = +\infty.$$

**11)** Calculer $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu.

**12)** Montrer que l'on peut définir la fonction $\Gamma(x)$ pour des valeurs négatives de $x$ et qu'elle agit comme un prolongement de la fonction factorielle.

**13)** Esquisser une représentation graphique de la fonction $\Gamma(x)$.

**14)** Montrer que

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \lim_{k\to+\infty} \int_0^k \left(1 - \frac{t}{k}\right)^k t^{x-1}dt, \quad x > 0$$

**15)** Montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^x.k!}{x(x+1)...(x+k)}, \quad x > 0$$

**16)** En déduire la formule de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}, \quad x > 0$$

où

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l} - \ln k\right) = 0,57721...,$$

est la constante d'Euler.

♣ **Solution** ♣

**1)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto e^{-t}t^{x-1},$$

est positive, continue sur $]0,+\infty[$ et donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$. L'intégrale en question converge en même temps que les intégrales $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$. Au voisinage de 0, on a

$$e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}.$$

L'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et d'après le critère d'équivalence, il en est de même pour $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$. Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t}t^{x-1} = 0,$$

c.-à-d.,

$$e^{-t}t^{x-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

**2)** Pour $x \geq a > 0$ et $t \in ]0, 1]$. On a

$$e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{a-1}.$$

L'intégrale $\int_0^1 e^{-t}t^{a-1}dt$ étant convergente, alors $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ en vertu du critère de Weierstrass. Pour $0 < x \leq b$ et $t \in [1, +\infty[$, on a

$$e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{b-1}.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}dt$ converge, alors on déduit du même critère que $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est normalement convergente pour $0 < a \leq x \leq b$. Par conséquent, l'intégrale en question converge normalement, donc uniformément sur l'intervalle $[a, b]$ où $0 < a < b < +\infty$.

**3)** La fonction sous le signe intégrale est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. La continuité de la fonction $\Gamma$ sur $]0, +\infty[$ résulte immédiatement de la question précédente et du théorème de continuité.

**4)** Posons $f(x, t) = e^{-t}t^{x-1}$. Notons que $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et sa dérivée jusqu'à l'ordre $k$ est $e^{-t}(\ln t)^k t^{x-1}$. Pour montrer que $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ avec

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)^k t^{x-1}dt,$$

on applique le théorème de dérivation aux dérivées successives de $f$ par rapport à $x$ en utilisant un raisonnement similaire à celui fait dans les questions précédentes. Pour $k = 1$, calculons formellement la dérivée de $\Gamma(x)$ :

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^{x-1}dt.$$

Pour $x \geq a > 0$ et $t \in ]0,1]$, on a

$$|e^{-t}(\ln t)t^{x-1}| \leq e^{-t}|\ln t|t^{a-1}.$$

Au voisinage de 0, on a

$$e^{-t}(\ln t)t^{a-1} \sim (\ln t)t^{a-1}.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\lim_{u\to 0}\int_u^1 (\ln t)t^{a-1}dt = \lim_{u\to 0}\left[\frac{(\ln t)t^a}{a} - \frac{t^a}{a^2}\right]_u^1 = -\frac{1}{a^2}, \quad a > 0$$

L'intégrale $\int_0^1 (\ln t)t^{a-1}dt$ converge et d'après le critère d'équivalence l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}(\ln t)t^{a-1}dt$ converge aussi. Donc l'inégalité ci-dessus et le critère de Weierstrass montre que l'intégrale $\int_0^1 e^{-t}(\ln t)t^{x-1}dt$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. De même, au voisinage de $+\infty$, pour $0 < x \leq b$ et $t \in ]1, +\infty[$, on a

$$e^{-t}(\ln t)t^{x-1} \leq e^{-t}(\ln t)t^{b-1}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^{b-1}dt$ converge car

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t}(\ln t)t^{b-1} = 0,$$

c.-à-d.,

$$e^{-t}(\ln t)t^{b-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

D'après le critère de Weierstrass, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^{x-1}dt$ est normalement convergente pour $0 < a \leq x \leq b$. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^{x-1}dt$ converge normalement, donc uniformément sur l'intervalle $[a, b]$ où $0 < a < b < +\infty$. Toutes les hypothèses du théorème de dérivation étant satisfaites, on en déduit que la dérivation ci-dessus est justifiée et que $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ avec

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^{x-1}dt.$$

Pour les dérivées successives de $f$ par rapport à $x$, on raisonne comme ci-dessus. On considère un compact $[a, b] \subset ]0, +\infty[$, $0 < a < b$. Pour tout $x \in [a, b]$, la fonction

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = e^{-t}(\ln t)^k t^{x-1},$$

est continue par rapport à $t$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $t\in]0,+\infty[$, elle est continue par rapport à $x$ sur $[a,b]$. Comme précédemment, on a pour $x>0$,

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=o\left(t^{\frac{x}{2}-1}\right),$$

au voisinage de 0 et

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)=o\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

au voisinage de $+\infty$. Dès lors, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est convergente. Pour tout $(x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leq\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a,t)\right|+\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(b,t)\right|,$$

et d'après le critère de Weierstrass, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$, converge normalement, donc uniformément sur l'intervalle $[a,b]$ où $0<a<b<+\infty$. Les hypothèses du théorème de dérivation (appliqué aux dérivées successives de $f$ par rapport à $x$) étant satisfaites, on en déduit que la fonction $\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ avec

$$\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}(\ln t)^k t^{x-1}dt.$$

**5)** En intégrant par parties, on obtient pour $x>0$,

$$\int_v^u e^{-t}t^{x-1}dt=\frac{e^{-u}u^x}{x}-\frac{e^{-v}v^x}{x}+\frac{1}{x}\int_v^u e^{-t}t^x dt,$$

d'où

$$\Gamma(x)=\lim_{\substack{u\to+\infty\\ v\to 0}}\int_v^u e^{-t}t^{x-1}dt=\frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

**6)** Comme

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1,$$

alors d'après la formule ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(2)&=1!\\ \Gamma(3)&=2\Gamma(1)=2!\\ \Gamma(4)&=3\Gamma(2)=3!\end{aligned}$$

et par une récurrence immédiate, on obtient la formule en question.

**7)** On a

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt,\\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}y^{2x-1}dy, \quad t=y^2\end{aligned}$$

En particulier,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}.$$

Par application répétée de la formule de récurrence :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) &= \left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right),\\ &\vdots\\ &= \left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)...\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)...3.2.1}{(2k)(2k-2)...2.2^k}\sqrt{\pi},\\ &= \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

On montre de même que :

$$\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^k 2^{2k}k!}{(2k)!}\sqrt{\pi}.$$

**8)** D'après la question 4), on a sur $]0,+\infty[$,

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)^2 t^{x-1}dt.$$

Cette fonction est strictement positive sur $]0,+\infty[$, donc $\Gamma$ est convexe.

**9)** La fonction $\Gamma$ est continue sur $[1,2]$, dérivable sur $]1,2[$,

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1,$$

et d'après le théorème de Rolle, $\exists\alpha \in ]1,2[$ tel que : $\Gamma'(\alpha) = 0$. Par ailleurs, on déduit de 8) que la fonction $\Gamma'$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, donc elle s'annule au plus une fois. Cette fonction est $< 0$ sur $]0, \alpha[$ et $> 0$ sur $]\alpha, +\infty[$. Dès lors, il existe un point unique $\alpha \in ]1, 2[$ tel que : $\Gamma'(\alpha) = 0$. La fonction $\Gamma$ est strictement décroissante sur $]0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$, donc $\Gamma$ passe par un minimum situé entre 1 et 2.

**10)** D'après la question 3), on sait que la fonction $\Gamma$ est continue sur $]0, +\infty[$. En outre, on a montré dans 5) que :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

donc

$$\lim_{x \to 0^+} x\Gamma(x) = \lim_{x \to 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1.$$

La fonction $\Gamma$ est positive et au voisinage de 0, la fonction $e^{-t}t^{-1}$ n'est pas intégrable, donc

$$\lim_{x \to 0^+} \Gamma(x) = +\infty.$$

La fonction $\Gamma$ est continue et convexe. Elle croît rapidement quand $x \to +\infty$ car

$$\Gamma(k+1) = k! \sim k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k} \quad \text{(formule de Stirling)}.$$

Donc $\Gamma$ est croissante sur $[2, +\infty[$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty.$$

**11)** Pour $x > 1$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)\Gamma(x-1)}{x} = +\infty.$$

La courbe représentative de la fonction $\Gamma$ possède en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe *oy*.

**12)** Si $x \in ]-1, 0[$, l'intégrale

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt,$$

converge et la formule

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x},$$

nous permet de définir $\Gamma(x)$ sur $]-1, 0[$. On peut, de proche en proche, définir $\Gamma(x)$ sur les intervalles : $]-(k+1), -k[$, $k \in \mathbb{N}$. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x), \\ \Gamma(x+2) &= (x+1)x\Gamma(x), \end{aligned}$$

et ainsi de suite

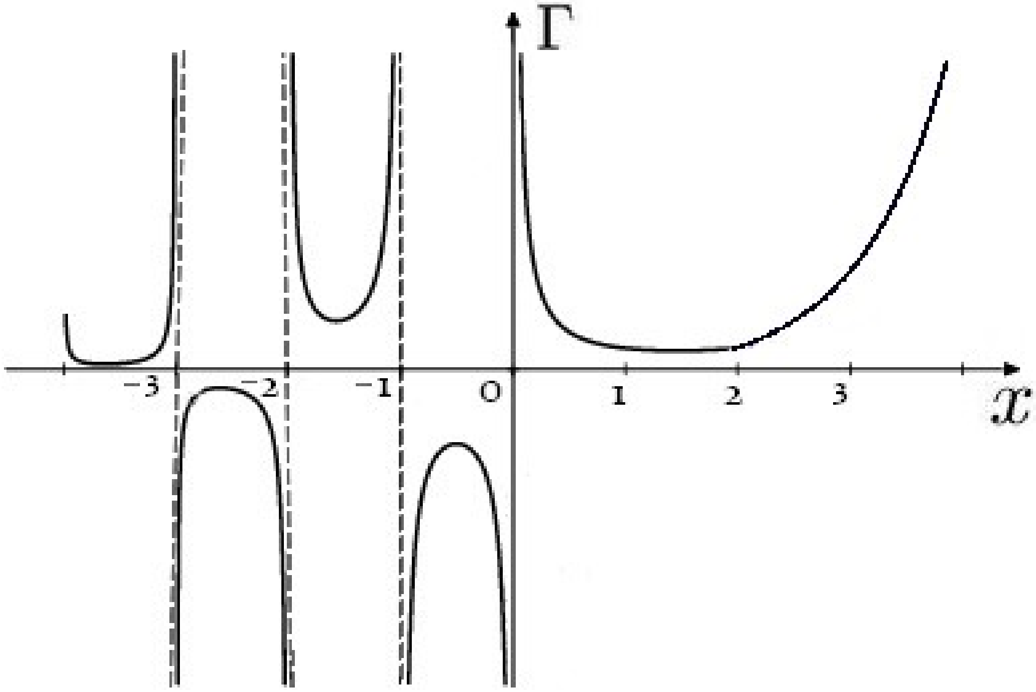
$$\Gamma(x+k+1)=(x+k)(x+k-1)...x\Gamma(x), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Dès lors,

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+k+1)}{x(x+1)...(x+k)}, \quad k\in\mathbb{N}$$

La fonction $\Gamma(x)$ se définit par la formule donnée dans la question a) et par la formule ci-dessus pour $-(k+1)<x<-k$, $k\in\mathbb{N}$. Elle constitue un prolongement de la fonction factorielle $k!$ définie elle, sur $\mathbb{N}$ seulement.

**13)** Les droites $x=-k$, $k\in\mathbb{N}$, sont des asymptotes.




**14)** On a

$$\left(1-\frac{t}{k}\right)^k=e^{k\ln\left(1-\frac{t}{k}\right)}\leq e^{k\left(-\frac{t}{k}\right)}=e^{-t},$$

et

$$\left|\left(1-\frac{t}{k}\right)^k t^{x-1}.\mathbf{1}_{[0\leq t\leq k]}\right|\leq e^{-t}t^{x-1}.$$

La fonction $e^{-t}t^{x-1}$ est sommable (on montre aisément qu'elle est absolument intégrable) et d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_0^k\left(1-\frac{t}{k}\right)^k t^{x-1}dt &= \int_0^k \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{t}{k}\right)^k t^{x-1}dt,\\ &= \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

**15)** En faisant plusieurs intégrations par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^k\left(1-\frac{t}{k}\right)^k t^{x-1}dt &= k^x\int_0^1(1-\tau)^k\tau^{x-1}d\tau, \quad \tau=\frac{t}{k}\\ &= k^x\frac{k}{x}\int_0^1(1-\tau)^{k-1}\tau^x d\tau,\\ &= k^x\frac{k(k-1)}{x(x+1)}\int_0^1(1-\tau)^{k-2}\tau^{x+1}d\tau,\\ &\vdots\\ &= k^x\frac{k(k-1)...1}{x(x+1)...(x+k-1)}\int_0^1\tau^{x+k-1}d\tau,\\ &= k^x\frac{k.k!}{x(x+1)...(x+k)},\end{aligned}$$

et le résultat en découle.

**16)** D'après 15), on a

$$\begin{aligned}\int_0^k\left(1-\frac{t}{k}\right)^k t^{x-1}dt &= \frac{k^x.1.2.3...k}{x(x+1)(2+x)(3+x)...(k+x)},\\ &= \frac{k^x}{\frac{x(x+1)(2+x)(3+x)...(k+x)}{1.2.3...k}},\\ &= \frac{k^x}{x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)...\left(1+\frac{x}{k}\right)},\\ &= \frac{e^{x\ln k}}{x\prod_{l=1}^k\left(1+\frac{x}{l}\right)},\\ &= \frac{e^{x\left(\ln k-\sum_{l=1}^k\frac{1}{l}\right)}}{x\prod_{l=1}^k\left(1+\frac{x}{l}\right)e^{-x\sum_{l=1}^k\frac{1}{l}}}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}e^{-x\sum_{l=1}^k\frac{1}{l}} &= e^{-x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)},\\ &= \prod_{l=1}^k e^{-\frac{x}{l}},\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^k \left(1 - \frac{t}{k}\right)^k t^{x-1}dt = \frac{e^{x\left(\ln k - \sum_{l=1}^k \frac{1}{l}\right)}}{x\prod_{l=1}^k \left(1+\frac{x}{l}\right)e^{-\frac{x}{l}}}.$$

En tenant compte de 14), on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \frac{e^{x\lim_{k\to+\infty}\left(\ln k - \sum_{l=1}^k \frac{1}{l}\right)}}{x\lim_{k\to+\infty}\prod_{l=1}^k \left(1+\frac{x}{l}\right)e^{-\frac{x}{l}}},\\ &= \frac{e^{-\gamma x}}{x\prod_{l=1}^\infty \left(1+\frac{x}{l}\right)e^{-\frac{x}{l}}},\end{aligned}$$

où $\gamma$ est la constante d'Euler.

# References

[1] Lesfari, A. : Notions fondamentales d'ANALYSE MATHÉMATIQUE (Résumés de cours, exercices et problèmes corrigés), éditions Ellipses, Paris (2014).