Université Chouaib Doukkali — *A. Lesfari*
Faculté des Sciences — lesfariahmed@yahoo.fr
Département de Mathématiques — http://lesfari.com
El Jadida

Géométrie différentielle

Exercice 1. Considérons sur $\mathbb{R}$ une carte $(\mathbb{R},\varphi)$ où $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une application définie par

$$\varphi(t)=t^3,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Les cartes $(\mathbb{R},id)$ et $(\mathbb{R},\varphi)$ sont ils compatibles ? Justifier la réponse.

Exercice 2. Soient U_1,V_1,U_2,V_2 des sous ensembles du cercle S^1 composés de points $p=(x,y)$ pour lesquels $y>0$, $y<0$, $x>0$, $y<0$, respectivement. Soient φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2 des applications de ces ensembles dans $\mathbb{R}$ définies par

$$(x,y)\longmapsto x,(x,y)\longmapsto x,\quad (x,y)\longmapsto y,\quad (x,y)\longmapsto y,$$

respectivement.
a) Montrer que les couples (U_i,φ_i), (V_i,ψ_i), $i=1,2$, sont des cartes sur S^1. En déduire que S^1 est une variété topologique.
b) Quelles sont les formules qui déterminent les changements de cartes.
c) Montrer que les cartes mentionnées dans a) sont compatibles.
d) En déduire que S^1 est une variété différentiable.

Exercice 3. Montrer que la sphère $\mathcal{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S}^2=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\},$$

est une variété différentiable dont l'atlas est composé de deux cartes $(\mathcal{U}_1,\varphi_1)$, $(\mathcal{U}_2,\varphi_2)$ en projection stéréographique.

Exercice 4. Soit S^n la sphère définie dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'équation

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2=1.$$

Montrer qu'on peut munir S^n d'une structure de variété différentiable.

Exercice 5. Soit $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'espace projectif réel. On désigne par

$$U_i = \{[X_0, \ldots, X_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : X_i \neq 0\}, \; 0 \leq i \leq n$$

l'ensemble des droites pour lesquelles $X_i \neq 0$. Soit φ_i l'application

$$\varphi_i\left([X_0, \ldots, X_n]\right) = \left(\frac{X_0}{X_i}, ..., \frac{\widehat{X_i}}{X_i}, ..., \frac{X_n}{X_i}\right),$$

où le terme chapeauté est omis. Montrer qu'on peut munir $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ d'une structure de variété différentiable.

Exercice 6. Soit

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \frac{\{[Z] \neq 0 \in \mathbb{C}^{n+1}\}}{[Z] \sim [\lambda Z]},$$

l'espace projectif complexe et désignons par $\mathcal{H}_i$ un hyperplan à l'infini.
$a)$ Montrer que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \backslash \mathcal{H}_i$ est isomorphe à $\mathbb{C}^n$.
$b)$ Déterminer un ensemble explicite de cartes sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
$c)$ Montrer que l'espace $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ peut-être vu comme étant une compactification de $\mathbb{C}^n$ et que celle-ci s'obtient par l'adjonction à $\mathbb{C}^n$ de l'hyperplan $\mathcal{H}_i$ à l'infini.
$d)$ En déduire que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est une variété différentiable.

Exercice 7. Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions m et n respectivement. Posons

$$M \times N = \{(p, q) : p \in M, q \in N\}.$$

$a)$ Montrer que si (U, φ) est une carte sur M et (V, ψ) est une carte sur N, alors $(U \times V, \varphi \times \psi)$ est une carte sur $M \times N$.
$b)$ Soient (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) deux cartes sur M, compatibles. Soient (V_1, ψ_1) et (V_2, ψ_2) deux cartes sur N, compatibles. Montrer que les cartes $(U_1 \times V_1, \varphi_1 \times \psi_1)$ et $(U_2 \times V_2, \varphi_2 \times \psi_2)$ sur $M \times N$ sont aussi compatibles.
$c)$ Conclusion ?

Exercice 8. Soit Σ une surface non-singulière de dimension k définie dans $\mathbb{R}^n$ par un système d'équations :

$$\begin{aligned} F_1\left(x_1, ..., x_n\right) &= 0, \\ &\vdots \\ F_{n-k}\left(x_1, ..., x_n\right) &= 0. \end{aligned}$$

$a)$ Soit $(x_1^0, ..., x_n^0)$ un point non singulier de la surface Σ. Montrer qu'on peut introduire des coordonnées locales dans le voisinage de ce point.
$b)$ Montrer que Σ admet une structure de variété différentiable.
$c)$ Déterminer les coordonnées d'un vecteur tangent ainsi que l'espace tangent à cette variété dans le voisinage du point non singulier.

Exercice 9. *a*) Soit T^n un tore de dimension n c'est-à-dire le produit direct de n cercles. Autrement dit, T^n est le quotient $\mathbb{R}^n/L$ (resp. $\mathbb{C}^n/L$) de $\mathbb{R}^n$ (resp.$\mathbb{C}^n$) par un sous-groupe engendré par une base de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$). Montrer que T^n est muni d'une structure de variété différentiable.
b) Soit $\mathbb{C}$ une variété complexe de dimension1 (une courbe complexe) définie par l'équation :

$$f(w,z) = 0, \tag{1}$$

où $f(w,z)$ est une fonction analytique à deux variables w et z. Un point (w_0, z_0) de la courbe $\mathcal{C}$ est non-singulier si

$$grad\ f\ |_{w_0,z_0} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial w}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{w_0,z_0} \neq 0.$$

On suppose que

$$f(w_0, z_0) = 0,$$

et

$$gradf\ |_{w_0,z_0} \neq 0.$$

Montrer que si

$$\frac{\partial f}{\partial w} \neq 0,$$

alors l'équation (1) admet, dans un voisinage suffisamment petit du point (w_0, z_0),une solution unique $w = w(z)$ qui est analytique complexe, de telle sorte que f

$$(w\,(z)\,, z) = 0, \quad w_0 = w\,(z_0)\,, \quad \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} \equiv 0.$$

c) Supposons que

$$f(w,z) = w^2 - P_n\,(z) = 0, \tag{2}$$

où $P_n(z)$ est un polynôme de degré n. Montrer que la surface (2) est singulière si et seulement si le polynôme $P_n(z)$ n'a pas de racines multiples. Discuter la possibilité d'introduire une coordonnée locale sur la surface (2).
c) On suppose que $f(w,z)$ soit un polynôme de degré n en w et irréductible.

- Montrer que l'équation (1) admet un prolongement au plan projectif complexe $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sous la forme

$$P\,(Z_0, Z_1, Z_2) = 0, \tag{3}$$

où Z_0, Z_1, Z_2 sont des coordonnées homogènes.

- Que représentent les points de la surface (3) en lesquels on a $Z_0 = 0$.
- Montrer que toute surface dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ définie par (3) est compacte.
- L'équation (3) définit, en l'abscence de toute singularité, une variété compacte à deux dimensions. Quelle est cette variété? (Discuter le cas des équations du type (2) et comparer avec c)).

<u>Exercice</u> 10. Quelle est la variété (complexe) associée à

$$w^2 + P_n(z)w + 1 = 0,$$

où $P_n(z)$ est un polynôme en z de degré n. Justifier la réponse.

<u>Exercice</u> 11. Soit M une variété différentiable de dimension n. Soit $A = (U_i, \varphi_i)$ un atlas de M, telle que : $O \subset \bigcup_i U_i$. On suppose que pour tout i, l'ensemble $\varphi_i (O \bigcap U_i)$ soit un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble O est un ouvert dans M. Réciproque ? En déduire que pour toute carte (U, φ) de la variété M, un sous-ensemble $V \subset U$ est ouvert dans M si et seulement si $\varphi(V)$ l'est dans $\mathbb{R}^n$.

<u>Exercice</u> 12. Soient M un espace topologique, U_i un ensemble ouvert dans M, $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$, un homéomorphisme et $A = (U_i, \varphi_i)$ un atlas de M. Montrer que la structure différentiable définie par l'atlas A est compatible avec la topologie de l'espace M.

<u>Exercice</u> 13. Soit V la variété définie par

$$V = \bigcap_{i=1}^{4} \left\{ Q_i(z) = c_i,\ z \in \mathbb{C}^6 \right\},$$

où

$$\begin{aligned}
Q_1(z) &= z_1 + z_2 - (z_4 + z_5)^2 - z_6^2, \\
Q_2(z) &= z_1 z_5 + z_2 z_4 - z_3 z_6 - z_4^2 z_5 - z_4 z_5^2, \\
Q_3(z) &= z_3^2 - z_1 z_5^2 - z_2 z_4^2 + z_4^2 z_5^2, \\
Q_4(z) &= z_1 z_2,
\end{aligned}$$

et $c_i \in \mathbb{C}$ $1 \leq i \leq 4$, n'est pas une valeur critique. Soit $\overline{V}$ la fermeture projective de $V \subset \mathbb{C}^6$ dans $\mathbb{P}^6(\mathbb{C})$. Analyser le lieu à l'infini $\overline{V} \bigcap \{Z_0 = 0\}$, et décrire les singularités de la variété projective $\overline{V}$.

<u>Exercice</u> 14. Soit $G_{n,k}$, $0 \leq k \leq n$, une Grassmannienne complexe c'est-à-dire l'ensemble des plans de dimension k de l'espace $\mathbb{C}^n$ passant par 0. $G_{n,k}$ peut être considére comme espace des sphères de centre 0 et de dimension $k-1$ contenues dans la sphère S^{n-1}, ces sphères correspondant biunivoquement aux sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{C}^n$.
a) Que représentent $G_{n,0}$ et $G_{n,n}$?
b) Montrer que $G_{n,k}$ peut être interprétée comme un ensemble de matrices d'ordre $n \times k$ de rang k, modulo la relation $A \sim B$ s'il existe une matrice C d'ordre k régulière telle que : $B = CA$.
c) On se propose dans la question suivante de montrer que l'interpretation

donnée dans b) permet d'introduire des coordonnées dans $G_{n,k}$. Soient π un élément de $G_{n,k}$, $A=(a_{ij})\,,1\leq i\leq n,1\leq j\leq k$, la matrice correspondante, $I=\{i_1,...,i_k\}\subset\{1,...,n\}$ et posons

$$P_I=\det\begin{pmatrix} a_{i_1 1} & \cdots & a_{i_1 k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{i_k 1} & \cdots & a_{i_k k}\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Montrer que les nombres P_I ne sont pas tous nuls et qu'ils sont définis à un facteur multiplicatif complexe non nul près. Montrer que la donnée des mineurs P_I de la matrice A permet de définir le plan π corresondant. Que peut-on dire des coordonnées (4) et quel est leur nombre ?
d) Soit

$$U_I=\{\pi\in G_{n,k}:P_I(\pi)\neq 0\}\,,$$

où I est le sous-ensemble de $\{1,...,n\}$ définie dans c). Montrer que les points de $U_{\{1,...,n\}}$ peuvent être représentés par des matrices

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots & *\\ 0 & 1 & & & \vdots & * & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right),$$

c'est-à-dire de la forme (E,Z) où E est la matrice unité d'ordre k et $Z=(z_{ij})$ une matrice $(n-k)\times k$ quelconque.
e) Montrer que les domaines U_I constituent un recouvrement de $G_{n,k}$.
f) Montrer que les éléments de la matrice Z (voir question d)) déterminent une application bijective

$$\varphi_I:U_I\longrightarrow\mathbb{C}^{(n-k)k}.$$

g) En déduire que la famille $\{(U_I,\varphi_I)\}$ est un atlas de cartes de $G_{n,k}$.
h) En déduire que $G_{n,k}$ est une variété complexe différentiable compacte et connexe de dimension $(n-k)\,k$.
i) Montrer que $G_{n,1}$ s'identifie en tant qu'espace topologique, avec $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ et que celui-ci est une variété complexe de dimension $n-1$. Montrer que cette structure possède une description commode en coordonnées homogènes.
j) Montrer que $G_{n,k}$ admet un plongement dans $\mathbb{P}^{C_n^k-1}(\mathbb{C})$ où $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.
k) En remplaçant dans les questions précédentes les nombres complexes par les quarternions, montrer qu'on obtient une variété compacte connexe de dimension $4(n-k)k$, notée $HG_{n,k}$ ou tout simplement $G_{n,k}$, que l'on appelle Grassmannienne quarternionnienne.

Exercice 15. Soit $N \subset \mathbb{R}^{n+l}$.
1) On suppose que :

$$\textbf{(I)} \begin{cases} \text{Pour tout } p \in N, \text{ il existe un ouvert } U \text{ de } \mathbb{R}^{n+l} \text{ contenant } p \\ \text{et une submersion de classe } \mathcal{C}^k, k \geq 1, f : U \to \mathbb{R}^l \text{ telle que :} \\ U \cap N = \{x \in U : f(x) = 0\}, \\ \qquad = U \cap f^{-1}(0), \\ \qquad = \{(x_1, ..., x_{n+l}) \in U : f_1(x_1, ..., x_{n+l}) = 0, ..., f_l(x_1, ..., x_{n+l}) = 0\}. \end{cases}$$

Démontrer que :

$$\textbf{(II)} \begin{cases} N \text{ est une sous-variété de } \mathbb{R}^{n+l} \text{ de dimension } n \\ \text{et de classe } \mathcal{C}^k, k \geq 1. \end{cases}$$

2) On suppose que **(II)** est satisfaite. Démontrer que :

$$\textbf{(III)} \begin{cases} \text{Pour tout } p \in N, \text{ il existe un ouvert } U \text{ de } \mathbb{R}^{n+l} \text{ contenant } p \\ \text{et un ouvert } \Omega \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } 0 \text{ et une application} \\ h : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+l}, \ (t_1, ..., t_n) \longmapsto (x_1(t_1, ..., t_n), ..., x_{n+l}(t_1, ..., t_n)), \\ \text{avec } h(0) = 0 \text{ et telle que } h \text{ soit une immersion et } h : \Omega \longrightarrow U \cap N, \text{ soit} \\ \text{un homéomorphisme pour la topologie induite sur } N \text{ par celle de } \mathbb{R}^{n+l}. \end{cases}$$

Que peut-on dire de l'application h ?
3) On suppose maintenant que **(III)** est vérifié. Démontrer que :

$$\textbf{(IV)} \begin{cases} \text{Pour tout } p = \left(x_1^0, ..., x_{n+l}^0\right) \in N, \text{ il existe un ouvert } U \text{ de } \mathbb{R}^{n+l} \\ \text{contenant } p \text{ et un ouvert } V \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ contenant } \left(x_1^0, ..., x_n^0\right) \text{ et une application} \\ g : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l, \ (x_1, ..., x_n) \longmapsto (g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_l(x_1, ..., x_n)), \\ \text{telle que (à une permutation des coordonnées près) :} \\ U \cap N = \text{graphe de } g, \\ \qquad = \{x_1, ..., x_n, g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_l(x_1, ..., x_n)\}. \end{cases}$$

4) Démontrer que **(IV)** implique **(I)**.

Exercice 16. Soient M et N deux variétés différentiables de dimension m et n respectivement. Soit $F : M \longrightarrow N$, une application différentiable.
1) On suppose que : $m = n$.

a) Montrer que si $rg_p(F) = m$, $p \in M$, alors il existe un voisinage U de p tel que $F : U \longrightarrow F(U)$, est un difféomorphisme.

b) Montrer que si $rg_p(F) = m$, $\forall p \in M$, et que de plus F est bijective alors $F : M \to N$ est un difféomorphisme.

2) Soit $f_1, ..., f_m$ des fonctions indépendantes autour d'un point $p \in M$. Montrer qu'ils existe un voisinage U de p tel que $(U, f_1, ..., f_m)$ soit une carte.
3) Soit $f_1, ..., f_k$, $k \leq m$, des fonctions indépendantes autour d'un point $p \in M$. Montrer qu'ils existent un voisinage U de p et des fonctions $x_{k+1}, ..., x_m$

tels que $(U, f_1, ..., f_m, x_{k+1}, ..., x_m)$ soit une carte.
4) Soit $q \in N$. Supposons que $F^{-1}(q)$ est non vide et que le rang de F en tout point de $F^{-1}(q)$ soit égal à la dimension de N. Montrer que $F^{-1}(q)$ est une sous-variété de M. Quelle est sa dimension ?

Exercice 17. Soit M une variété différentiable et soit p un point de M. Deux courbes $f(t)$ et $g(t)$ sont équivalentes si elles sont issues du point p et si

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - g(t)}{t} = 0,$$

sur une carte de M. Montrer que cette limite est nulle pour une carte quelconque de M cotenant le point p.

Exercice 18. a) Soient deux sous-ensembles disjoints $A, B \subset \mathbb{R}^n$, A est compact, B est fermé. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{R}^n$ une fonction φ de classe C^∞ telle que :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur } A \\ 0 & \text{sur } B \end{cases}$$

et $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ partout.
b) Soient M une variété différentiable et C un compact de M tels que : $C \subset V$ où V est un ouvert dans M. En utilisant a), montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$ telle que :

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 \text{ sur} M,$$
$$0 \leq \varphi_i(x) \leq 1, \ \forall x \in M,$$
$$\sum_i \varphi_i(x) = 1, \ \forall x \in M.$$

Exercice 19. Soientt M une variété différentiable de dimension m et TM le fibré tangent à M, i.e., l'union des espaces tangents T_pM à M en tous ses points p,

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

a) Montrer que : $\dim T_pM = \dim M$.
b) Montrer qu'il existe sur TM une structure naturelle de variété différentiable. Quelle est sa dimension ?

Exercice 20. Soient M et N deux variétés différentiables de dimensions m et n respectivement, p un point de M et $F : M \longrightarrow N$ une application différentiable de rang constant $r = rg_pF$. Montrer qu'il existe une carte $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_m)$ sur M et une carte $(V, \psi) = (V, y_1, ..., y_n)$ sur N telles que l'application F s'exprime dans les coordonnées locales $x_1, ..., x_m$ et $y_1, ..., y_n$ par

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{pour } 1 \leq i \leq r, \\ 0 & \text{pour } r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Exercice 21. Soient M une variété différentiable de dimension n, $(U, x_1, ..., x_n)$ une carte quelconque de M et ω une $k-$forme différentielle dans M. Montrer que ω s'écrit se façon unique sous la forme

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

où $f_{i_1,\ldots,i_k}$ sont des applications continues sur M.

Exercice 22. Prenons pour variété M l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lequel on aura fixé des coordonnées

$$x_1, x_2, x_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Soient f et h des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, g et k des fonctions de $\mathbb{R}^3$dans $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathbb{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. En utilisant la formule de différentiation extérieure d'un produit extérieur de deux formes différentielles et d'un produit d'une fonction par une forme différentielle, ainsi que la notion de forme différentielle associée à un champ scalaire ou à un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, démontrer les formules suivantes de l'analyse vectorielle :

$$\begin{aligned}
\mathit{grad}\,(\mathrm{fh}) &= \mathrm{f}\ \mathit{grad}\ \mathrm{h} + \mathrm{h}\ \mathit{grad}\ \mathrm{f},\\
\mathit{rot}\,(\mathrm{fg}) &= \mathit{grad}\ \mathrm{f} \wedge \mathrm{g} + \mathrm{f}\ \mathit{rot}\ \mathrm{g},\\
\mathit{div}\,(\mathrm{fg}) &= \langle \mathit{grad}\ \mathrm{f}\ ,\ \mathrm{g}\rangle + \mathrm{f}\ \mathit{div}\ \mathrm{g},\\
\mathit{div}\,(\mathrm{g} \wedge \mathrm{k}) &= \langle \mathit{rot}\ \mathrm{g}\ ,\ \mathrm{k}\rangle - \langle \mathrm{g}\ ,\ \mathit{rot}\ \mathrm{k}\rangle\,.
\end{aligned}$$

Exercice 23. Soit D un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ càd. un ouvert tel que : $(x_1, x_2) \in D$ et $0 \leq t \leq 1$ entraînent $(tx_2, tx_3) \in D$, et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit ω une $2-$forme différentielle définie et continûment dérivable sur $I \times D$, telle que :

$$dx_1 \wedge \omega = 0, \qquad d\omega = 0.$$

a) Montrer que

$$\omega = dx_1 \wedge \sum_{i=2}^{3} f_i dx_i,$$

où les f_i sont des fonctions complexes, définies et continûment dérivables sur $I \times D$. Quelles conditions les f_i doivent-ils satisfaire ?
b) Si $x = (x_1, x_2, x_3) \in I \times D$, on pose

$$h\,(x) = \sum_{i=2}^{3} \int_0^1 x_i f_i\,(x_1, tx_2, tx_3)\, dt.$$

Montrer que h est continûment dérivable et que

$$\omega = dx_1 \wedge dh.$$

En déduire une forme différentielle λ de degré 1, définie et continûment dérivable sur $I \times D$, telle que $\omega = d\lambda$.

<u>Exercice</u> 24. Soit la forme différentielle

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

Calculer ω^n.

<u>Exercice</u> 25. Examiner si les formes différentielles suivantes sont exactes et, le cas échéant, trouver une fonction f telle que : $\omega = df$.

$$\begin{aligned}
\omega &= \left(3x^2 + 2y^2 + 3z\right) dx + (4xy + 2y - z)\, dy + (3x - y - 2)\, dz, \\
\omega &= x^2 dy + 3xzdz, \\
\omega &= (xy \cos xy + \sin xy)\, dx + \left(x^2 \cos xy + y^2\right) dy, \\
\omega &= \left(5x^2 y - 4xy\right) dx + \left(3x^2 - 2y\right) dy, \\
\omega &= \frac{x + 2y}{x^2 + y^2} dx + \frac{y - 2x}{x^2 + y^2} dy.
\end{aligned}$$

<u>Exercice</u> 26. Montrer que toute forme différentielle fermée est exacte dans le voisinage d'un point d'une variété.

<u>Exercice</u> 27. Soient M une variété différentiable de dimension n et $\Omega^k M$ l'ensemble des formes différentielles ω de degré $k \geq 0$ sur M. Considérons l'application

$$d : \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M,$$

définie par

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} df_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Montrer que

$$d^2 = d \circ d = 0.$$

<u>Exercice</u> 28. Soient M une variété différentiable de dimension n et $U \subset M$, un ouvert de carte.

1°) Démontrer que si ω est une k-forme différentielle dans U de classe C^1 et λ est une l-forme différentielle dans U de classe C^1, alors

$$d\,(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda + (-1)^k\,(\omega \wedge d\lambda)\,.$$

2°) Démontrer que si ω est une k-forme différentielle dans U de classe C^2, alors

$$d\,(d\omega) = 0.$$

3°) Retrouver les propriétés suivantes en utilisant les propriétés de la différentielle extérieure :

$$\text{rot (grad f)} = 0, \qquad \text{div (rot V)} = 0.$$

<u>Exercice</u> 29. Soit $H^k(M,\mathbb{R})$ le groupe de cohomologie d'une variété M.
a) Montrer que $H^0(M,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension égale au nombre de composantes connexes de la variété M.
b) Soient

$$f_1, f_2 : M_1 \longrightarrow M_2,$$

deux applications différentiables de variétés M_1 et M_2. Montrer que si f_1 et f_2 sont homotopes, alors les applications f_1^*, f_2^* de groupes de cohomologies se confondent :

$$f_1^* = f_2^* : H^k(M_1,\mathbb{R}) \longrightarrow H^k(M_1,\mathbb{R}).$$

En déduire que deux variétés homotopiquement équivalentes ont même groupe de cohomologie.
c) Montrer que :

$$\begin{array}{rcl} H^k\left(S^1,\mathbb{R}\right) & = & 0, \quad k>1, \\ H^0\left(S^1,\mathbb{R}\right) & = & \mathbb{R}, \\ H^1\left(S^1,\mathbb{R}\right) & = & \mathbb{R}, \end{array}$$

où S^1 est un cercle.

<u>Exercice</u> 30. Soient ω une 1-forme différentielle exacte dans $U \subset \mathbb{R}^n$, $\Phi = (\varphi^1, ..., \varphi^m)$ et $\Psi = \left(\psi^1, ..., \psi^l\right)$ deux chemins dans U de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Montrer que :
a) Si $\omega = dh$, alors

$$\int_\Phi \omega = h(\varphi^m(1)) - h\left(\varphi^1(0)\right).$$

b) Si $\varphi^1(0) = \psi^1(0)$ et $\varphi^m(0) = \psi^l(0)$, alors

$$\int_\Phi \omega = \int_\Psi \omega.$$

c) Si Φ est fermé, alors

$$\int_\Phi \omega = 0.$$

<u>Exercice</u> 31. a) Montrer que si une forme différentielle ω est fermée, alors sa transformée $g^*\omega$ par g l'est aussi, g étant de classe $\mathcal{C}^2$.
b) Si g est une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ admettant une fonction réciproque qui soit aussi de classe $\mathcal{C}^2$, montrer que ω est fermée dès que $g^*\omega$ est fermée.

Exercice 32. Soient φ et ψ les 2-simplexes de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\varphi(s,t) = (1-s, 1-t, st),$$

et

$$\psi(s,t) = \left((a+(b-a)s)\cos\frac{\pi}{2}t, (a+(b-a)s)\sin\frac{\pi}{2}t, \frac{\pi}{2}t\right), \ 0 < a < b.$$

Calculer les intégrales suivantes :
a)

$$\int_\varphi xdx \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

b)

$$\int_\psi zdx \wedge dy.$$

Exercice 33. Calculer l'intégrale

$$\int_\psi \left(x^2+y^2\right) dx \wedge dy,$$

si ψ est le 2-complexe $\psi = \Delta + \varphi_-$ avec

$$\Delta = [(0,-4), (4,0), (-4,0)],$$

et

$$\varphi(u,v) = (u\cos 2\pi v, u\sin 2\pi v).$$

Exercice 34. Soit φ le 2-simplexe dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\varphi(s,t) = (s(1-t), t).$$

a) Vérifier que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
b) Identifier l'image de φ.
c) Calculer le bord $\partial\varphi$ de φ.

Exercice 35. Soit φ le 2-simplexe dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(u,v) = ((1-u)\cos\pi v, \ \ (1-u)\sin\pi v, \ u).$$

a) Caractériser l'image de φ.
b) Déterminer un 3-simplexe dont φ soit une partie du bord.
c) Calculer l'intégrale de $(y+z)\,dy \wedge dz$ sur φ.

Exercice 36. Soit la 1-forme différentielle

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

et φ le 1-simplexe dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ défini par

$$\varphi(t) = (a \cos 2\pi t, a \sin 2\pi t), \quad t \in [0,1], \quad a > 0.$$

a) Calculer $\int_\varphi \omega$.
b) Montrer qu'il n'existe aucun 2-complexe de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dont φ soit le bord.

Exercice 37. Soient a, b et c des réels strictements positifs. Utiliser le théorème de Stokes-Cartan pour calculer

$$\int_{\partial\varphi} z dx \wedge dy,$$

si φ est le 3-simplexe de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\varphi(r,s,t) = (ar \cos 2\pi s \sin \pi t, br \sin 2\pi s \sin \pi t, cr \cos \pi t).$$

Exercice 38. Soit φ le 2-simplexe dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\varphi(s,t) = (as \cos 2\pi t, as \sin 2\pi t),$$

où a est un réel strictement positif.
a) Déterminer l'image de φ.
b) Montrer que $\partial\varphi$ est un simplexe et déterminer son image.

Exercice 39. Utiliser le théorème de Stokes-Cartan pour calculer

$$\int_\varphi (x+y)\, dz \wedge dx + (1-z)\, dx \wedge dy + \left(y + z^2\right) dy \wedge dz,$$

si

$$\varphi(u,v) = \left(a \cos 2\pi u \sin \frac{\pi}{2} v, a \sin 2\pi u \sin \frac{\pi}{2} v, a \cos \frac{\pi}{2} v\right), \qquad a > 0.$$

Exercice 40. Soit φ le 2-simplexe dans $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\varphi(s,t) = (a \cos 2\pi s, a \sin 2\pi s, t),$$

avec $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$, $a > 0$.
a) Caractériser l'image de φ.
b) Calculer le bord $\partial\varphi$ de φ.

$c)$ Trouver une 1-forme différentielle dont la différentielle soit $dx \wedge dz$.
$d)$ Calculer

$$\int_{\varphi} dx \wedge dz.$$

$i)$ par calcul direct.
$ii)$ par le théorème de Stokes-Cartan.

__Exercice__ **41.** Soient $n \geq 1$, $m \geq 1$ des entiers, $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ des parties non vides, $I = [0, 1]$,

$$g : V \to U,\ y = (y_1, \ldots, y_m) \mapsto g(y) = (g_1(y_1), \ldots, g_n(y_m)),$$

une application de classe $\mathcal{C}^1$ dans V, et ω une k-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ dans U.
$a)$ Montrer que si h est une applicaation continue de U dans R, alors

$$g^*(h\omega) = (hog)\, g^*\omega,$$

où g^* est la transformée de ω par g.
$b)$ Supposons que h soit une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $W \subset \mathbb{R}^p$ dans $V \subset \mathbb{R}^m$. Montrer que

$$(goh)^* = h^*(g^*\omega).$$

$c)$ Supposons que g soit de classe $\mathcal{C}^2$ dans V. Montrer que

$$g^*(d\omega) = d(g^*\omega).$$

$d)$ Soit φ un k-simplexe dans U de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\tau^k} \varphi^*\omega,$$

où τ^k désigne l'injection canonique de I^k dans $\mathbb{R}^k$.
$e)$ Montrer que

$$\int_{\tau^k} d(\varphi^*\omega) = \int_{\partial\tau^k} \varphi^*\omega.$$

$f)$ En utilisant ce qui précéde, montrer que si ω est une $(k-1)$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ dans U et si $\Phi = (\varphi^1, ..., \varphi^m)$ est un k-complexe dans U de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\int_{\partial\Phi} \omega = \int_{\Phi} d\omega.$$

__Exercice__ **42.** Soit la 1-forme différentielle dans l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ égal à $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$:

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

a) Montrer que la forme ω n'est pas exacte sur Ω.
b) Trouver un ouvert Δ dont la différence avec Ω soit de mesure nulle et sur lequel ω soit exacte.

Exercice 43. Soit M une variété de dimension n. Une forme de volume sur M est une forme différentielle ω de degré n nulle en aucun point ($\omega(x) \neq 0, \ \forall x \in M$). Une variété orientable est une variété munie d'une forme de volume.
a) Montrer que $\mathbb{R}^n$ et S^1 sont orientables.
b) Soient M_1 et M_2 deux variétés orientables de dimensions respectives n_1 et n_2. Montrer que $M_1 \times M_2$ est orientable.
c) En déduire que le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ est orientable et déterminer sa forme de volume.
d) Montrer qu'une variété M de dimension n est orientable si et seulement si elle possède un atlas (U_i, φ_i) tel que, pour tout couple de cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j), le déterminant de Jacobien du changement de cartes

$$\varphi_j o \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

est strictement positif.
e) En déduire que l'espace tangent à une variété différentiable M est orientable. f) Soit D la bande $\mathbb{R} \times [0, 1]$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. Le ruban de Möbius est l'espace quotient E de D obtenu en identifiant les points (x, y) et $(x + 1, 1 - y)$. En utilisant d), montrer que le ruban de Möbius n'est pas orientable.
g) Pour quel n l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est-il orientable ? De même, pour quels n et k la variété Grassmanienne $G_{n,k}^{mathbbR}$ est-elle orientable ?
h) Montrer que si la variété M est orientable, alors son bord ∂M est aussi orientable. En déduire qu'une orientation de M détermine une orientation de ∂M.

Exercice 44. Soit $(U, \varphi) = (U, x_1, ..., x_n)$ une carte quelconque d'une variété différentiable M et soit p unpoint de cette carte. Dans l'espace tangent T_pM, cette carte définit la base

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right),$$

et dans l'espace dual T_p^*M, la base duale

$$\left((dx_1)_p, ..., (dx_n)_p\right).$$

a) Montrer que sur l'espace T_pM, tout tenseur S_p de type (k, l) où $k \geq 0$, $l \geq 0$, se représente sous la forme

$$S_p = S_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} (dx_{i_1})_p \ldots \otimes (dx_{i_k})_p \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right)_p \otimes \ldots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_l}}\right)_p,$$

dans laquelle $S_{i_1...i_k}^{j_1...j_l}$ sont les composantes du tenseur S_p dans la carte (U, φ). Les indices $i_1, ..., i_k$; $j_1, ..., j_k$ varient de 1 à n (n est la dimension de la variété M).

b) Soit $(U', \varphi') = (U', x_{1'}, ..., x_{n'})$ une autre carte sur M. Montrer que les composantes du tenseur S_p dans les cartes (U, φ) et (U', φ') sont reliées par

$$S_{i_{1'}...i_{k'}}^{j_{1'}...j_{l'}} = \left(\frac{\partial x_{i_1}}{\partial x_{i_{1'}}}\right)_p ... \left(\frac{\partial x_{i_k}}{\partial x_{i_{k'}}}\right)_p \left(\frac{\partial x_{j_{1'}}}{\partial x_{j_1}}\right)_p ... \left(\frac{\partial x_{j_{l'}}}{\partial x_{j_l}}\right)_p S_{i_1...i_k}^{j_1...j_l}.$$

c) En déduire que les conditions de différentiabilité d'un champ de tenseurs est indépendante du choix de la carte.

d) Montrer que l'espace $T_k^l M$ des champs de tenseurs de type (k, l) sur une variété M est un module libre sur l'espace $\mathcal{F}M = T_0^0 M$ de base $\mathcal{B}$ à déterminer. (Une variété M dont tous les modules $T_k^l M$ sont libres est dite parallélisable).

Exercice 45. Soit l'équation différentielle

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M,$$

définie par un champ de vecteurs v sur une variété M. On dira aussi que le champ v définit un système dynamique. On supposera que les solutions de l'équation sont indéfiniment prolongeables (ce sera le cas si la variété M est compacte). Soit

$$g^t : M \longrightarrow M,$$

le flot (groupe à un paramètre de difféomorphisme) du champ v sur M,

$$g^t x = x + v(x)t + o(t^2), \quad t \to 0.$$

On notera μ le volume d'un domaine D,

$$\mu(t) = vol.D(t), \qquad D(t) = g^t D(0).$$

a) Montrer que pour tout opérateur linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on a

$$\det(I + tA) = 1 + t\ trA + o(t^2), \quad t \to 0,$$

où I est la matrice unité et $trA = \sum_{k=1}^n a_{kk}$ est la trace de la matrice associée à l'opérateur A par rapport à une base quelconque.

b) Montrer que

$$\left.\frac{d\mu(t)}{dt}\right|_{t=0} = \int_{D(0)} div\ v\ dx.$$

c) En déduire que g^t conserve le volume de tout domaine.

d) Généraliser les résultats b) et c) au cas de systèmes non autonomes

$$\dot{x} = v(x, t).$$

e) Démontrer la formule de Liouville

$$W = W_0 \; e^{\int \; trAdt},$$

pour le Wronskien du système linéaire

$$\dot{x} = A(t)x.$$

f) Soit g une application bijective continue conservant les volumes et associant à lui-même un domaine limité D d'un espace euclidien,

$$gD = D.$$

Montrer que dans tout voisinage U d'un point quelconque du domaine D, il existe un point $x \in U$ qui retourne dans le domaine U càd. $g^n x \in U$ pour un certain $n \rangle 0$.
g) Supposons que D soit un cercle et g une rotation d'angle α. Montrer que si $\alpha \neq 2\pi \dfrac{m}{n}$, alors l'ensemble des points de la forme $g^n x$ est partout dense dans un cercle.
h) On suppose que D est un tore de dimension 2, sur lequel on définit des coordonnées angulaires φ_1 et φ_2. Considérons la système d'équations différentielles ordinaires sur ce tore

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}_1 = \alpha_1, \\ \dot{\varphi}_2 = \alpha_2. \end{array} \right. \tag{5}$$

Montrer que les trajectoires de (5) sur le tore sont fermées si le quotient est rationnel, et partout denses s'il est irrationnel.
i) On suppose que D est un tore T^n de dimension n. Un point du tore est donné par n coordonnées angulaires $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ et g^t une transformation conservant le volume

$$g^t : T^n \longrightarrow T^n, \; \varphi \longmapsto \varphi + \alpha t.$$

A quelles conditions doit satisfaire α pour que soient partout denses dans le tore T^n :

- la trajectoire $g^t\varphi$, $t \in \mathbb{R}$.
- la trajectoire $g^k\varphi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 46. Soient M une variété différentiable de dimension n,

$$X : M \longrightarrow TM, \; p \longmapsto X_p \in T_pM,$$

un champ de vecteurs différentiable sur M,

$$F : M \longrightarrow \mathbb{R},$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M et

$$g_t^X : M \longrightarrow M,\ p \longmapsto g_t^X(p),$$

le flot correspondant au champ X sur M.
a) Montrer que

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\left(F(g_s^Y g_t^X(p)) - F(g_t^X g_s^Y(p))\right)_{t=s=0} = \left(L_X L_Y - L_Y L_X\right) F(p),$$

où L_X est un opérateur différentiel défini par

$$L_X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),\ F \longmapsto L_X F,$$

avec

$$L_X F(p) = \frac{d}{dt} F\left(g_t^X(p)\right)\Big|_{t=0}.$$

b) Montrer que deux champs de vecteurs différentiables X et Y commutent sur M si et seulement si

$$L_X L_Y = L_Y L_X.$$

<u>Exercice</u> 47. Soit M une variété différentiable de dimension n, compacte, connexe, munie de m champs de vecteurs différentiables (de classe $\mathcal{C}^\infty$) $X_1, ..., X_m$ commutant deux à deux et linéairement indépendants en chaque point de M. L'objet de cet exercice est de prouver que la variété M est difféomorphe à un tore de dimension m. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $m = 2$. On procède comme suit : Définissons l'application

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M,\ \ (t_1, t_2)\ \ \longmapsto g\left(t_1, t_2\right),$$

où

$$g\left(t_1, t_2\right) = g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}\left(x\right) = g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}\left(x\right),\ x \in M.$$

Montrer que
a) L'application g est un difféomorphisme local.
b) L'application g est surjective.
c) Le groupe stationnaire

$$\Lambda = \left\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : g\left(t_1, t_2\right) = x\right\},$$

est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$ indépendant du point $x \in M$.
d) En déduire que la variété M est difféomorphe à un tore réel de dimension deux.

Exercice 48. Soit M une variété différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) et soit

$$X : M \longrightarrow TM,$$

un champ de vecteurs différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) et à support compact (i.e., X est nul en dehors d'un compact de M), ce qui sera en particulier le cas si la variété M est compacte.
a) Montrer que le champ de vecteurs X est générateur d'un unique groupe à un paramètre de difféomorphismes de M,

$$g_t^X : M \longrightarrow M,\ t \in \mathbb{R}.$$

Ce groupe est également appelé flot et il admet le champ de vecteurs X pour champ de vitesses

$$\frac{d}{dt} g_t^X(x) = X\left(g_t^X(x)\right),$$

avec la condition initiale

$$g_0^X(x) = x.$$

b) En déduire que toute solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx(t)}{dt} = X(x(t)),\ x \in M,$$

avec la condition initiale x (pour $t = 0$), est indéfiniment prolongeable. La valeur de la solution $g_t^X(x)$ à l'instant t est différentiable par rapport à t et à la condition initiale x.

Exercice 49. On pose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Considérons les applications

$$\begin{aligned} \xi &: GL(n,\mathbb{K}) \times GL(n,\mathbb{K}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{K}),\ \ (A,B) \longmapsto \xi(A,B) = AB, \\ \eta &: GL(n,\mathbb{K}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{K}),\ A \longmapsto \eta(A) = A^{-1}. \end{aligned}$$

a) Montrer que $GL(n,\mathbb{K})$ est un groupe topologique.
b) Montrer que $GL(n,\mathbb{K})$ est une variété différentiable.
c) En déduire que $GL(n,\mathbb{K})$ est un groupe de Lie.

Exercice 50. Montrer que les groupes suivants sont des groupes de Lie : $SL(n,\mathbb{K}), U(n), SU(n), O(n,\mathbb{R}), SO(n,\mathbb{R}), O(p,q), U(p,q), Sp(2n,\mathbb{R})$ et $Sp(p,q)$.

Exercice 51. Démontrer les résultats suivants :
a) Les groupes $U(n), SU(n), O(n,\mathbb{R}), SO(n,\mathbb{R})$ sont compacts.
b) Les groupes $U(n)$ et $U(1) \times SU(n)$ sont homéomorphes.
c) Le groupe $SU(2)$ est homéomorphe à la sphère unité de $\mathbb{R}^4$.
d) Le groupe $O(n,\mathbb{R})$ est homéomorphe au groupe $\{-1,1\} \times SO(n,\mathbb{R})$

<u>Exercice</u> 52. Soit $\mathcal{L}$ une algèbre associative sur un corps $\mathbb{K}$. Posons pour $x, y \in \mathcal{L}$,

$$[x, y] = xy - yx.$$

Montrer que $\mathcal{L}$, avec une telle opération de commutation, est une algèbre de Lie.

<u>Exercice</u> 53. Sachant que c_{ij}^k sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie complexe $\mathbb{C}\mathcal{A}$ par rapport à la base $(e_1, \ldots, e_n)$, trouver celles de l'algèbre de Lie réelle $\mathbb{R}\mathcal{A}$.

<u>Exercice</u> 54. Soit $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie.
a) Posons

$$Der\ \mathcal{L} = \{D : D \text{ une dérivation de } \mathcal{L}\}.$$

Montrer que $Der\ \mathcal{L}$ est une algèbre de Lie par rapport à l'opération

$$(D_1, D_2) \longmapsto [D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1,\ \forall D_1, D_2 \in Der\ \mathcal{L}.$$

b) Montrer que l'application adjointe de x :

$$ad\ x : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L},\ y \longmapsto ad\ x\,(y) = [x, y],$$

est une dérivation de $\mathcal{L}$.
c) Montrer que l'application

$$\mathcal{L} \longrightarrow Der\ \mathcal{L},\ x \longmapsto ad\ x,$$

est un homomorphisme. Que détermine cette homomorphisme ?
d) Montrer que $\forall x \in \mathcal{L}$, $\forall D \in Der\ \mathcal{L}$, on a

$$ad\ \ (Dy) = [D, ad\ x].$$

e) Soit I un idéal de $\mathcal{L}$. Les éléments de l'espace quotient $\mathcal{L}/I$ sont les classes

$$x + I = \{x + y : y \in I\},\ \forall x \in \mathcal{L},$$

de I dans $\mathcal{L}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}/I$ muni du crochet

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I,$$

est une algèbre de Lie.
f) Décrire briévement quelques notions concernant les algèbres de Lie simple et semi-simple (en précisant leur lien avec les notions de radical, forme de Killing, etc...).

<u>**Exercice**</u> **55.** a) Soient Xet Y deux champs de vecteurs tangents à une surface différentiable. Montrer que le crochet de ces champs est aussi tangent à cette surface.
b) En déduire que les champs de vecteurs tangents à une surface différentiable forment une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de l'ensemble des champs de vecteurs.

<u>**Exercice**</u> **56.** Soient G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie et exp l'application exponentielle.
a) Supposons que $G = SL\,(n, \mathbb{R})$ et $X \in \mathcal{G}$; $trX = 0$. Montrer que

$$A = \exp X \in SL\,(n, \mathbb{R}) \;\; ; \;\; \det A = 1.$$

b) On suppose que $G = O\,(n)$ et $X \in \mathcal{G}$; X antisymétrique. Montrer que

$$A = \exp X \in O\,(n) \;\; ; \;\; A \text{ orthogonale.}$$

c) Montrer que si $G = U\,(n)$ et $X \in \mathcal{G}$; X hermitienne antisymétrique, alors

$$A = \exp X \in U\,(n) \;\; ; \;\; A \text{ unitaire.}$$

<u>**Exercice**</u> **57.** a) Soit $\mathbf{A}(n, \mathbb{R})$ le groupe des automorphismes affines de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire des transformations $x \longmapsto Ax + b$, $A \in GL(n, \mathbb{R})$). Montrer que $\mathbf{A}(n, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie.
b) Vérifier que exp est surjective pour les groupes suivants : $GL(n, \mathbb{R})$, $SO(n)$, $U(n)$ et le groupe des transformations affines $x \longmapsto ax + b$, de la droite réelle telles que $a > 0$.
c) Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{H} \in GL(3, \mathbb{R})$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est un sous-groupe de Lie, pour lequel l'application exponentielle est un difféomorphisme. ($\mathcal{H}$ est appelé groupe de Heisenberg).
d) Montrer que si $A \in SL(2, \mathbb{R})$, on a $tr\,(A^2) \geq -2$. En déduire que pour $SL(2, \mathbb{R})$ l'exponentielle n'est pas surjective.

<u>**Exercice**</u> **58.** Soit le demi-plan $y \rangle\ 0$ du plan de la variable complexe $z = x + iy$ de mêtrique

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

a) Montrer que les géodésiques de cette variété Riemannienne de dimension 2 sont des cercles et des droites perpendiculaires à l'axe des x.
b) Montrer que les transformations homographiques à coefficients réels

$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

sont des transformations isométriques de cette variété (plan de Lobatchevski).

<u>Exercice</u> 59. Soit $\gamma = \{(t, q) : q = q(t), t_1 \leq t \leq t_2\}$, une courbe définie sur une variété différentiable et reliant deux points $t = t_1$ et $t = t_2$. Considérons la fonctionnelle

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt, \tag{6}$$

où $\dot{q}(t) = \dfrac{dq}{dt}$ et

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (q, \dot{q}, t) \longmapsto L(q, \dot{q}, t),$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

a) Montrer que la fonctionnelle (1) est différentiable et sa différentielle $F(h)$ est donnée par

$$F(h) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h \right) \Bigg|_{t_1}^{t_2}.$$

b) Montrer que la courbe γ est extrémale de la fonctionnelle (1) si et seulement si l'équation différentielle (dite d'Euler-Lagrange) est satisfaite :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{7}$$

c) Appliquer ce qui précéde à l'étude des géodésiques dans le plan.

<u>Exercice</u> 60. Considérons une surface S et supposons que soit donnée une représentation paramètrique en fonction de deux paramètres u et v. Montrer que l'équation différentielle des géodésiques sur S s'écrit sous la forme

$$\frac{d}{du} \frac{F + G\dot{v}}{\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}} = \frac{\dfrac{\partial E}{\partial v} + 2\dfrac{\partial F}{\partial v}\dot{v} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dot{v}^2}{2\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}}.$$

<u>Exercice</u> 61. Montrer que les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0,$$

sont équivalentes à un système de $2n-$équations différentielles du premier ordre (équations de Hamilton) :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

pour $i = 1, ..., n$, et

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}.$$

Exercice 62. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le système dynamique défini par

$$\dot{x} = x \wedge \lambda x, \tag{8}$$

où $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
a) Déterminer un isomorphisme entre $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ et $(so\,(3)\,,[,])$.
b) Montrer que le système (8) peut s'écrire sous la forme d'un champ de vecteurs hamiltonien X_H.
c) Déterminer les intégrales premières du problème.
d) Montrer que le système (8) est complètement intégrable et le champ de vecteurs X_H donne un flot sur une variété difféomorphe à M où M est à déterminer.
e) Résoudre le système (8).

Exercice 63. Soit le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^6$

$$X_H : \begin{cases} \frac{dM}{dt} = M \wedge \frac{\partial H}{\partial M} + l \wedge \frac{\partial H}{\partial l} \\ \frac{dl}{dt} = l \wedge \frac{\partial H}{\partial M} \end{cases}$$

où $M = (M_1, M_2, M_3) \in \mathbb{R}^3$, $l = (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{R}^3$, $H = (M_1, M_2, M_3, l_1, l_2, l_3)$, $\frac{\partial H}{\partial M} = \left(\frac{\partial H}{\partial M_1}, \frac{\partial H}{\partial M_2}, \frac{\partial H}{\partial M_3}\right)$, $\frac{\partial H}{\partial l} = \left(\frac{\partial H}{\partial l_1}, \frac{\partial H}{\partial l_2}, \frac{\partial H}{\partial l_3}\right)$.
a) Montrer que le champ de vecteurs X_H est tangent à la variété V définie par

$$V : \begin{cases} F_1 \equiv l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = c_1 \\ F_2 \equiv M_1 l_1 + M_2 l_2 + M_3 l_3 = c_2 \end{cases}$$

c_1, c_2 étant des constantes génériques.
b) Montrer que X_H est un champ de vecteurs hamiltonien sur la variété V pour la 2-forme symplectique :

$$\omega = \frac{1}{l_3}\left(dM_1 \wedge dl_2 - dM_2 \wedge dl_1\right) - \frac{M_3}{l_3^2} dl_1 \wedge dl_2.$$

Montrer aussi que les champs de vecteurs hamiltoniens X_{F_1}, X_{F_2} engendrés par F_1 et F_2 (définis en a)) par rapport à la structure symplectique ω sont identiquement nuls.
c) Soit

$$H = F_3 \equiv \mathrm{M}_1^2 + \mathrm{M}_2^2 + \mathrm{M}_3^2 + \mathrm{a}_1 \mathrm{l}_1^2 + \mathrm{a}_2 \mathrm{l}_2^2 + \mathrm{a}_3 \mathrm{l}_3^2,$$

et

$$F_4 \equiv \mathrm{a}_1 \mathrm{M}_1^2 + \mathrm{a}_2 \mathrm{M}_2^2 + \mathrm{a}_3 \mathrm{M}_3^2 - \mathrm{a}_2 \mathrm{a}_3 \mathrm{l}_1^2 - \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_3 \mathrm{l}_2^2 - \mathrm{a}_1 \mathrm{a}_2 \mathrm{l}_3^2,$$

où a_1, a_2, a_3 désignent des nombres arbitraires. Montrer que les champs de vecteurs hamiltoniens X_{F_3}, X_{F_4} engendrés par F_3 et F_4 par rapport à la structure symplectique (définis en b)) commutent.
d) En déduire que pour des valeurs génériques de c_1, c_2, c_3, c_4 la variété

$$T = \left\{(M, l) \in \mathbb{R}^6 : F_1 = c_1, F_2 = c_2, F_3 = c_3, F_4 = c_4\right\}$$

est un tore de dimension 2.