Géométrie différentielle II
Master Mathématiques Fondamentales, 2009-2010

A. Lesfari
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Table des matières

1 Formes différentielles

1.1 Définitions et propriétés

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

une k-forme différentielle sur U. Les $f_{i_1,\ldots,i_k}$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n)$ sont des fonctions de U dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On définit le produit extérieur de ω et λ (une l-forme différentielle dans U) en posant

$$\omega \wedge \lambda = \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} g_{j_1,\ldots,j_l} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}.$$

C'est une $(k+l)$-forme différentielle dans U. On vérifie aisément que :

$$\begin{array}{rcl} k+l > n & \Longrightarrow & \omega \wedge \lambda = 0, \\ (\omega \wedge \lambda) \wedge \eta & = & \omega \wedge (\lambda \wedge \eta), \\ (\omega + \eta) \wedge \lambda & = & (\omega \wedge \lambda) + (\eta \wedge \lambda), \\ \omega \wedge \lambda & = & (-1)^{kl} (\lambda \wedge \omega). \end{array}$$

On définit la différentielle extérieure de ω en posant

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_k \leq n} df_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

C'est une $(k+1)$-forme différentielle dans U. Dans le cas d'une 1-forme

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx,$$

on a

$$d\omega = \sum_{1 \leq i,k \leq n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j.$$

On vérifie les formules suivantes :

$$\begin{array}{rcl} d(a\omega + b\lambda) & = & ad\omega + bd\lambda, \quad (a, b \in \mathbb{R}) \\ d(\omega \wedge \lambda) & = & (d\omega \wedge \lambda) + (-1)^k (\omega \wedge d\lambda), \quad k = \deg \omega \\ d(d\omega) & = & 0. \end{array}$$

On dit que ω est fermée (ou un cocycle) si

$$d\omega = 0.$$

En particulier, une 1-forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx,$$

est fermée si et seulement si

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

On dit que ω est exacte (ou cohomologue à 0) s'il existe une $(k-1)$-forme différentielle λ dans U telle que :

$$\omega = d\lambda.$$

En particulier, une 1-forme différentielle

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx,$$

est exacte s'il existe une application $h : U \to \mathbb{R}$ (de classe $\mathcal{C}^1$) telle que :

$$f_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}.$$

Toute forme différentielle exacte est fermée. La réciproque est fausse en général et elle est vraie en degré ≥ 1 si l'ouvert U est étoilé (lemme de Poincaré).

Soient $\Omega^k(M)$ l'espace vectoriel réel des k-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété différentiable M et

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M),$$

la différentielle extérieure. On appelle groupe de cohomologie de la variété M, l'espace vectoriel réel

$$\begin{aligned} H^k(M, \mathbb{R}) &= \frac{\ker\left[d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)\right]}{\operatorname{Im}\left[d : \Omega^{k-1}(M) \longrightarrow \Omega^k(M)\right]}, \\ &= \frac{\{k-\text{formes différentielles fermées sur} M\}}{\{k-\text{formes différentielles exactes sur} M\}}. \end{aligned}$$

C'est le groupe de cohomologie de De Rham que l'on désigne aussi par $H^k_{DR}(M, \mathbb{R})$. Un élément de ce groupe est une classe d'équivalence de formes fermées différent l'une de l'autre par une différentielle :

$$\omega_1 \sim \omega_2 \quad \text{si} \quad \omega_1 - \omega_2 = d\lambda.$$

Exemple 1 $H^0(M,\mathbb{R})$ *est un espace vectoriel de dimension finie égal au nombre de composantes connexes de* M*. En effet, nous n'avons ici que des 0-formes différentielles, i.e., des fonctions* $f(x)$ *sur* M*. Il n'y a pas de formes différentielles exactes. Dès lors,*

$$H^0(M,\mathbb{R}) = \{f : f \text{ est fermée}\}.$$

Comme $df(x) = 0$*, alors dans toute carte* $(U, x_1, ..., x_n)$ *de* M*, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = ... = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Par conséquent, $f(x) =$ *constante localement, i.e.,* $f(x) =$ *constante sur chaque composante connexe de* M*. Donc le nombre de composantes connexes de* M *est la dimension en question.*

Le lemme de Poincaré peut-être vu comme un théorème d'annulation de la cohomologie :

$$H^k(U,\mathbb{R}) = 0, \quad k \geq 1$$

où $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert étoilé.

Soit $I = [0,1]$, $I^k = I \times ... \times I$ (k-fois). Un k-simplexe (de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$) dans U est une application

$$\varphi : I^k \longrightarrow U,$$

qui est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I^k. Comme I^k est le volume formé par k vecteurs indépendants dans U, l'application φ est donc une déformation de I^k.
Par exemple,

- un 0-simplexe est un point.
- un 1-simplexe dans $\mathbb{R}^3$ est une courbe dans $\mathbb{R}^3$.
- un 2-simplexe dans $\mathbb{R}^3$ est une surface dans $\mathbb{R}^3$ homéomorphe à I^2 (un triangle).
- un 3-simplexe dans $\mathbb{R}^3$ est une boule.
- un cube, un volume dans $\mathbb{R}^3$ homéomorphe à I^3 (un tétraèdre).

Rappelons que pour intégrer une k-forme différentielle sur une variété M, il faut que celle-ci soit orientable. Cela signifie que M vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

(i) M est munie d'une forme volume, i.e., une k-forme différentielle qui ne s'annule nulle part.

(ii) Il existe sur M un atlas tel que le jacobien de tout changement de carte soit strictement positif.

Par exemple,

- $\mathbb{R}^n$ est orientée par la forme volume $dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$.
- le cercle S^1 est orienté par $d\theta$.

- le tore $T^2 = S^1 \times S^1$ est orienté par la forme volume $d\theta \wedge d\varphi$.

-toutes les variétés holomorphes sont orientables.

-la sphère S^2, l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ (n paire), la bande de Möbius ne sont pas orientables.

Soient ω une k-forme différentielle $U \subset M$ (orientable) et φ un k-simplexe dans U de classe $\mathcal{C}^1$. L'intégrale de ω sur φ est définie par

$$\int_\varphi \omega = \int_{I^k} \omega(\varphi).$$

On suppose que $k \geq 2$ et soient π une permutation de $(1, ..., k)$,

$$\varphi : I^k \longrightarrow U, (u_1, ..., u_k) \longmapsto \varphi(u_1, ..., u_k),$$

un k-simplexe dans U, et

$$\varphi_\pi : I^k \longrightarrow U, (u_1, ..., u_k) \longmapsto \varphi_\pi(u_1, ..., u_k) = \varphi(u_{\pi(1)}, ..., u_{\pi(1)}),$$

un k-simplexe dans U. Pour toute k-forme différentielle ω dans M, on a

$$\int_{\varphi_\pi} \omega = \text{sign } \pi \int_\varphi \omega,$$

où sign π désigne la signature de la permutation π.

La relation ci-dessus, montre que l'ensemble des φ_π lorsque π parcourt les permutations de $(1, 2, ..., k)$ peut être divisé en deux classes : La première correspond au cas où π est paire (sign $\pi = 1$) ; φ_π et φ ont même orientation et on posera dans ce cas $\varphi_\pi = \varphi$. La seconde correspond au cas où π est impaire (sign $\pi = -1$) ; φ_π et φ ont des orientations opposées et on posera dans ce cas $\varphi_\pi = \varphi_-$. Pour cette seconde classe, π est une transposition, i.e., deux éléments seulement sont permutés. Par exemple, si $k = 2$ et $n = 3$, on a

$$\varphi_-(u_1, u_2) = \varphi(u_2, u_1).$$

Nous avons supposé que $k \geq 2$. Dans le cas où $k = 1$, alors φ_- s'obtient par la formule

$$\varphi_-(u) = \varphi(1 - u).$$

Un k-complexe (de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$) dans U est une famille finie $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ de k-simplexes φ_j, $1 \leq j \leq m$, dans U (de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$). Géométriquement, un complexe peut se visualiser comme une réunion de surfaces, celles définies par les simplexes le composant.

Si $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ est un k-complexe (de classe $\mathcal{C}^1$) dans U et si ω est une k-forme différentielle dans U, alors l'intégrale de ω sur Φ est définie par

$$\int_\Phi \omega = \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j} \omega.$$

En particulier, un k-complexe $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ dans U tel que :

$$\varphi_j(1) = \varphi_{j+1}(0), \quad 1 \leq j \leq m-1,$$

est un chemin dans U par morceaux. Si en outre $\varphi_m(1) = \varphi_1(0)$, alors Φ est un cycle ou chemin fermé.

Soient ω une 1-forme différentielle exacte dans U, $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ et $\Psi = (\psi_1, ..., \psi_m)$ deux chemins dans U. Si $\omega = df$, alors

$$\int_\Phi = f\left(\varphi_m(1)\right) - f\left(\varphi_1(0)\right).$$

Si $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$ et $\varphi_m(1) = \psi_m(1)$, alors

$$\int_\Phi \omega = \int_\Psi \omega.$$

Enfin si Φ est un chemin fermé, alors

$$\int_\Phi \omega = 0.$$

Le bord d'un k-simplexe

$$\varphi : I^k \longrightarrow U, \quad k \geq 2,$$

est le $(k-1)$-complexe, noté $\partial\varphi$, défini par

$$\partial\varphi = \left(\varphi^{j,\alpha}_{\text{sign}(-1)^{j+\alpha}} : 1 \leq j \leq k, \alpha = 0, 1\right),$$

où

$$\begin{array}{rcl} \varphi^{j,\alpha}_+ \equiv \varphi^{j,\alpha} : I^{k-1} & \longrightarrow & U, \\ (u_1, ..., u_{k-1}) & \longmapsto & \varphi^{j,\alpha}(u_1, ..., u_{k-1}) = \varphi(u_1, ..., u_{j-1}, \alpha, u_j, ..., u_{k-1}), \end{array}$$

et

$$\varphi^{j,\alpha}_+ = \left(\varphi^{j,\alpha}\right)_-.$$

Lors de la détermination du bord d'un simplexe φ, les notations suivantes peuvent être utiles pour préciser l'image de φ ainsi que l'orientation. Soient $x_0, x_1, ..., x_k \in U$, $k+1$ points et

$$\varphi : I^k \longrightarrow U, u \longmapsto \varphi(u) = x_0 + \sum_{j=1}^{k} u_j(x_j - x_0).$$

L'application φ définit un k-simplexe dans U et Im φ est un parallélipipède (à k dimensions) construit sur les k segments joignant x_0 à x_j, $1 \leq j \leq k$. Ces k-simplexes sont appelés k-parallélotopes orientés et seront notés : $[x_0, x_1, ..., x_k]$. On a $x_0 = \varphi(0)$ et $x_j = \varphi(e_j)$, $1 \leq j \leq k$, où e_j désigne le $j^{\text{ième}}$ vecteur de base de $\mathbb{R}^k$. Pour $k = 1$, on note $[x_0, x_1]$ et $x_0 \underset{\textit{orientation}}{\longrightarrow} x_1$.

Exemple 2 *Soit*

$$\varphi : I^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (u_1, u_2) \longmapsto (u_1, u_2),$$

le 2*-simplexe identité (injection canonique). On a*

$$\begin{aligned}
\partial\varphi &= \left(\varphi^{j,\alpha}_{sign(-1)^{j+\alpha}} : 1 \leq j \leq 2, \alpha = 0, 1\right), \\
&= \left(\varphi^{1,0}_{-}, \varphi^{1,1}, \varphi^{2,0}, \varphi^{2,1}_{-}\right),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\varphi^{1,0}_{-}(u) &= \left(\varphi^{1,0}\right)_{-}(u), \\
&= \varphi^{1,0}(1-u), \\
&= \varphi(0, 1-u), \\
&= (0, 1-u), \\
&= [(0,1), (0,0)](u), \\
&= [e_2, 0](u), \\
\varphi^{1,1}(u) &= \varphi(1, u), \\
&= (1, u), \\
&= [(1,0), (1,1)](u), \\
&= [e_1, e_1 + e_2](u), \\
\varphi^{2,0}(u) &= \varphi(u, 0), \\
&= (u, 0), \\
&= [(0,0), (1,0)](u), \\
&= [0, e_1](u), \\
\varphi^{2,1}_{-}(u) &= \left(\varphi^{2,1}\right)_{-}(u), \\
&= \varphi^{2,1}(1-u), \\
&= (1-u, 1), \\
&= [(1,1), (0,1)](u), \\
&= [e_1 + e_2, e_2](u).
\end{aligned}$$

Comme $I^2 = [0,1] \times [0,1]$*, alors* $\varphi(I^2)$ *est le carré construit sur les segments joignant* 0 *à* e_1*,* e_1 *à* $e_1 + e_2$*,* $e_1 + e_2$ *à* e_2 *et* e_2 *à* 0*. On obtient*

$$(\partial\varphi)(I^2) = \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq 2 \\ \alpha = 0,1}} \left(\varphi^{j,\alpha}_{sign(-1)^{j+\alpha}}(I)\right) = fr\ (\varphi(I^2)).$$

Le bord d'un k-complexe $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ est le $(k-1)$-complexe défini par

$$\begin{aligned}
\partial\Phi &= (\partial\varphi_1, ..., \partial\varphi_m), \\
&= \left(\varphi^{j,l,\alpha}_{\mathrm{sign}(-1)^{l+\alpha}} : 1 \leq j \leq m, 1 \leq l \leq k, \alpha = 0, 1\right).
\end{aligned}$$

Soient M_1, M_2 des variétés différentiables de dimension m_1, m_2 respectivement et $U_1 \subset M_1$, $U_2 \subset M_2$ des ouverts. Pour toute application différentiable $g : U_1 \longrightarrow U_2$, et toute k-forme différentielle dans U_2, on peut définir une k-forme différentielle dans U_1 (appelée le pull-back par g ou image inverse ou encore transposée de ω par g) en posant

$$g^*\omega = \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_k \leq m_2} (f_{i_1,\ldots,i_k} \circ g)\, dg_{i_1} \wedge \ldots \wedge dg_{i_k},$$

où

$$dg_{i_l} = \sum_{j=1}^{m_1} \frac{\partial g_{i_l}}{\partial y_j} dy_j,$$

sont des 1-formes dans U_1.

Notons que g^* est un opérateur linéaire de l'espace des k-formes sur M_2 dans l'espace des k-formes sur U_1 (l'astérisque indique que g^* opère dans le sens inverse de g).

Soit ω est une k-forme différentielle dans U_2 et λ une l-forme différentielle dans U_2. Alors si $k = l$,

$$g^*(\omega + \lambda) = g^*\omega + g^*\lambda,$$

et

$$g^*(\omega \wedge \lambda) = g^*\omega \wedge g^*\lambda.$$

Si $h : U_2 \to \mathbb{R}$ est une application continue,

$$g^*(h\omega) = (h \circ g)g^*\omega.$$

Si ω est de classe $\mathcal{C}^1$ dan U_2 et g de classe $\mathcal{C}^2$ dans U_1,

$$g^*(d\omega) = d(g^*\omega).$$

Si M_3 est une autre variété différentiable, $U_3 \subset M_3$ un ouvert et $h : U_3 \to U_1$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$(g \circ h)^*\omega = h^*(g^*\omega).$$

On déduit de ces propriétés que si $g : U_1 \longrightarrow U_2$ est une application différentiable, alors il y a des applications linéaires induites

$$g^* : H^k(U_2, \mathbb{R}) \longrightarrow H^k(U_1, \mathbb{R}),$$

telles que :

$$g^*([\omega] \wedge [\lambda]) = g^*[\omega] \wedge g^*[\lambda].$$

En outre, si g est un difféomorphisme local, alors g^* est un isomorphisme d'algèbres (les groupes de cohomologie donnent donc des invariants différentiables).

On montre que si φ est un k-simplexe dans M de classe $\mathcal{C}^1$, ω une k-forme différentielle dans M,

$$\tau^k : I^k \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad u \longmapsto \tau^k(u) = u,$$

un k-simplexe identité dans $I^k \subset \mathbb{R}^k$ (injection canonique de classe $\mathcal{C}^\infty$), alors

$$\int_\varphi \omega = \int_{\tau^k} \varphi^* \omega.$$

On en déduit que si ω est une $(k-1)$-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ dans M (orientable) et $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ un k-complexe dans M de classe $\mathcal{C}^2$, alors on a la formule de Stokes-Cartan

$$\int_{\partial\Phi} \omega = \int_\Phi d\omega.$$

Soit A un anneau unitaire. On notera C_k le A-module libre engendré par tous les k-simplexes dans un complexe Φ. Un élément de C_k est appelé une k-chaîne dans le complexe Φ. C'est une somme finie formelle de la forme

$$c_k = \sum_k \alpha_k \sigma_k,$$

où σ_k est un k-simplexe et $\alpha_k \in A$. Le bord ∂c_k d'une k-chaîne est définie par

$$\partial c_k = \sum_k \alpha_k \partial \sigma_k.$$

Un cycle est une chaîne c_k telle que : $\partial c_k = 0$. Un bord est une chaîne c_k telle qu'il existe une chaîne c_{k+1} avec $\partial c_{k+1} = c_k$. Par analogie avec les formes différentielles, on peut dire qu'un cycle est une chaîne fermée et qu'un bord est une chaîne exacte. On montre que pour toute k-chaîne c_k, le bord ∂c_k est une $(k-1)$-chaîne et que $\partial(\partial c_k) = 0$. En outre, les k-chaînes forment un groupe abélien en introduisant une loi d'addition sur les chaînes comme suit : si

$$c_k = \sum_k \alpha_k \sigma_k, \quad c'_k = \sum_k \alpha'_k \sigma_k,$$

alors

$$c_k + c'_k = \sum_k (\alpha_k + \alpha'_k) \sigma_k.$$

Les cycles forment un groupe noté

$$Z_k = \ker(\partial : C_k \longrightarrow C_{k-1}).$$

Deux cycles c'_k et c''_k sont équivalents ou homologues si et seulement si

$$c'_k - c''_k = \partial c_{k+1}.$$

De même, les bords forment aussi un groupe noté

$$B_k = \operatorname{Im}(\partial : C_{k+1} \longrightarrow C_k).$$

On pose $B_0 = 0$. On a les inclusions :

$$B_k \subset Z_k \subset C_k.$$

On appelle groupe d'homologie, noté H_k, le quotient Z_k/B_k.
Il est clair qu'un bord est un cycle. Mais tout cycle n'est pas un bord.

Exemple 3 *Soient a et b deux cycles indépendants dans $H_1(T)$. Ces cycles forment une base d'homologie du tore T. On a*

$$H_1(T) \overset{(1)}{=} Z_1(T)/B_1(T) \overset{(2)}{=} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Les deux groupes (1) *et* (2) *ont même structures ; ils sont engendrés par deux éléments a et b.*

1.2 Exercices

Exercice 1.1 *Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lequel on aura fixé des coordonnées*

$$x_1, x_2, x_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Soient f et h des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, g et k des fonctions de $\mathbb{R}^3$dans $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathbb{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. En utilisant la formule de différentiation extérieure d'un produit extérieur de deux formes différentielles et d'un produit d'une fonction par une forme différentielle, ainsi que la notion de forme différentielle associée à un champ scalaire ou à un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, démontrer les formules suivantes de l'analyse vectorielle :

$$\begin{aligned}
grad\,(fh) &= f\,grad\ h + h\ grad\ f,\\
rot\,(fg) &= grad\ f \wedge g + f\,rot\ g,\\
div\,(fg) &= \langle grad\ f\ ,\ g\rangle + f\,div\ g,\\
div\,(g \wedge k) &= \langle rot\ g\ ,\ k\rangle - \langle g\ ,\ rot\ k\rangle\,.
\end{aligned}$$

Exercice 1.2 *Soit D un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ càd. un ouvert tel que : $(x_1, x_2) \in D$ et $0 \leq t \leq 1$ entraînent $(tx_2, tx_3) \in D$, et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit ω une $2-$forme différentielle définie et continûment dérivable sur $I \times D$, telle que :*

$$dx_1 \wedge \omega = 0, \qquad d\omega = 0.$$

a) Montrer que

$$\omega = dx_1 \wedge \sum_{i=2}^{3} f_i dx_i,$$

où les f_i sont des fonctions complexes, définies et continûment dérivables sur $I \times D$. Quelles conditions les f_i doivent-ils satisfaire ?

b) Si $x = (x_1, x_2, x_3) \in I \times D$, on pose

$$h(x) = \sum_{i=2}^{3} \int_0^1 x_i f_i (x_1, tx_2, tx_3)\, dt.$$

Montrer que h est continûment dérivable et que

$$\omega = dx_1 \wedge dh.$$

En déduire une forme différentielle λ de degré 1, définie et continûment dérivable sur $I \times D$, telle que $\omega = d\lambda$.

Réponse : *a)* $\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3}$.

Exercice 1.3 *Soit la forme différentielle*

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

Calculer ω^n.

Réponse : $\omega^n = n! dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$.

Exercice 1.4 *Examiner si les formes différentielles suivantes sont exactes et, le cas échéant, trouver une fonction f telle que : $\omega = df$.*

$$\begin{array}{ll} a) & \omega = \left(3x^2 + 2y^2 + 3z\right) dx + (4xy + 2y - z)\, dy + (3x - y - 2)\, dz, \\ b) & \omega = x^2 dy + 3xzdz, \\ c) & \omega = (xy \cos xy + \sin xy)\, dx + \left(x^2 \cos xy + y^2\right) dy, \\ d) & \omega = \left(5x^2 y - 4xy\right) dx + \left(3x^2 - 2y\right) dy, \\ e) & \omega = \dfrac{x + 2y}{x^2 + y^2} dx + \dfrac{y - 2x}{x^2 + y^2} dy. \end{array}$$

Réponse : *a)* $f(x, y, z) = x^3 + 2xy^2 + 3xz + y^2 - yz - 2z + constante$. *b)* ω n'est pas exacte. *c)* $f(x, y) = x \sin xy + \frac{y^3}{3} + constante$. *d)* ω n'est pas exacte.

Exercice 1.5 *Retrouver les propriétés suivantes (voir aussi exercice 2.1) en utilisant les propriétés de la différentielle extérieure :*

$$rot\ (grad\ f) = 0,$$

et

$$div\ (rot\ g) = 0.$$

Exercice 1.6 *Soit $H^k(M,\mathbb{R})$ le groupe de cohomologie d'une variété M.*

1) Montrer que $H^0(M,\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension égale au nombre de composantes connexes de la variété M.

2) Soient

$$f_1, f_2 : M_1 \longrightarrow M_2,$$

deux applications différentiables de variétés M_1 et M_2. Montrer que si f_1 et f_2 sont homotopes, alors les applications f_1^*, f_2^* de groupes de cohomologies se confondent :

$$f_1^* = f_2^* : H^k(M_1,\mathbb{R}) \longrightarrow H^k(M_1,\mathbb{R}).$$

En déduire que deux variétés homotopiquement équivalentes ont même groupe de cohomologie.

3) Montrer que :

$$\begin{array}{ll} a) & H^k\left(S^1,\mathbb{R}\right) = 0, \quad k > 1, \\ b) & H^0\left(S^1,\mathbb{R}\right) = \mathbb{R}, \\ c) & H^1\left(S^1,\mathbb{R}\right) = \mathbb{R}, \end{array}$$

où S^1 est un cercle.

Réponse : 3) *a*) 0. *b*) $\mathbb{R}$. *c*) $\mathbb{R}$.

Exercice 1.7 *a) Montrer que si une forme différentielle ω est fermée, alors sa transformée $g^*\omega$ par g l'est aussi, g étant de classe $\mathcal{C}^2$.*

b) Si g est une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ admettant une fonction réciproque qui soit aussi de classe $\mathcal{C}^2$, montrer que ω est fermée dès que $g^*\omega$ est fermée.

Exercice 1.8 *Soient φ et ψ les 2-simplexes de $\mathbb{R}^3$ définis par*

$$\varphi(s,t) = (1-s, 1-t, st),$$

et

$$\psi(s,t) = \left((a+(b-a)s)\cos\frac{\pi}{2}t, (a+(b-a)s)\sin\frac{\pi}{2}t, \frac{\pi}{2}t\right), \ 0 < a < b.$$

Calculer les intégrales suivantes :

1)

$$\int_\varphi xdx \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy.$$

2)

$$\int_\psi zdx \wedge dy.$$

Réponse : 1) $\frac{1}{3}$. 2) $(b^2 - a^2)\frac{\pi^2}{16}$.

Exercice 1.9 *Calculer l'intégrale*

$$\int_\psi \left(x^2 + y^2\right) dx \wedge dy,$$

si ψ *est le* 2*-complexe* $\psi = \Delta + \varphi_-$ *avec*

$$\Delta = \left[(0, -4)\,, (4, 0)\,, (-4, 0)\right],$$

et

$$\varphi\,(u, v) = (u \cos 2\pi v, u \sin 2\pi v)\,.$$

Réponse : $\frac{512}{3} - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 1.10 *Soit* φ *le* 2*-simplexe dans* $\mathbb{R}^2$ *défini par*

$$\varphi(s, t) = (s(1 - t), t).$$

a) *Vérifier que* φ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$.
b) *Identifier l'image de* φ.
c) *Calculer le bord* $\partial\varphi$ *de* φ.

Réponse : *a*) $(s(1-t), t)$ et t sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. *b*) c'est le triangle de sommets 0, e_1, e_2. *c*) $\partial\varphi = (\varphi_-^{1,0}, \varphi^{1,1}, \varphi^{2,0}, \varphi_-^{2,1})$ où $\varphi_-^{1,0}(u) = [(0,1),(0,0)](u)$, $\varphi^{1,1}(u) = [(1,0),(0,1)](u)$, $\varphi^{2,0}(u) = [(0,0),(1,0)](u)$, $\varphi_-^{2,1}(u) = (0, 1$ simplexe nul.

Exercice 1.11 *Soit* φ *le* 2*-simplexe dans* $\mathbb{R}^3$ *définie par*

$$\varphi\,(u, v) = ((1 - u) \cos \pi v,\ \ (1 - u) \sin \pi v,\ \ u)\,.$$

a) *Caractériser l'image de* φ.
b) *Déterminer un* 3*-simplexe dont* φ *soit une partie du bord.*
c) *Calculer l'intégrale de* $(y + z)\, dy \wedge dz$ *sur* φ.

Exercice 1.12 *Soit la 1-forme différentielle*

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

et φ *le 1-simplexe dans* $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ *défini par*

$$\varphi\,(t) = (a \cos 2\pi t, a \sin 2\pi t)\,, \quad t \in [0, 1], \quad a > 0.$$

a) *Calculer* $\int_\varphi \omega$.
b) *Montrer qu'il n'existe aucun 2-complexe de classe* $\mathcal{C}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ *dont* φ *soit le bord.*

Réponse : *a)* 2π.

Exercice 1.13 *Soient* a, b *et* c *des réels strictements positifs. Utiliser le théorème de Stokes-Cartan pour calculer*

$$\int_{\partial\varphi} z dx \wedge dy,$$

si φ *est le* 3*-simplexe de* $\mathbb{R}^3$ *défini par*

$$\varphi(r,s,t) = (ar\cos 2\pi s \sin \pi t, br \sin 2\pi s \sin \pi t, cr \cos \pi t).$$

Réponse : $-\frac{4}{3}\pi abc$.

Exercice 1.14 *Soit* φ *le* 2*-simplexe dans* $\mathbb{R}^2$ *défini par*

$$\varphi(s,t) = (as\cos 2\pi t, as \sin 2\pi t),$$

où a *est un réel strictement positif.*

a) Déterminer l'image de φ*.*

b) Montrer que $\partial\varphi$ *est un simplexe et déterminer son image.*

Réponse : *a)* $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq a^2\}$. *b)* $\{(x,y) : x^2+y^2 = a^2\}$.

Exercice 1.15 *Utiliser le théorème de Stokes-Cartan pour calculer*

$$\int_{\varphi} (x+y)\, dz \wedge dx + (1-z)\, dx \wedge dy + \left(y+z^2\right) dy \wedge dz,$$

si

$$\varphi(u,v) = \left(a\cos 2\pi u \sin \frac{\pi}{2}v, a\sin 2\pi u \sin \frac{\pi}{2}v, a\cos \frac{\pi}{2}v\right), \qquad a > 0.$$

Réponse : $-\pi a^2$.

Exercice 1.16 *Soit* φ *le* 2*-simplexe dans* $\mathbb{R}^3$ *défini par*

$$\varphi(s,t) = (a\cos 2\pi s, a\sin 2\pi s, t),$$

avec $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$, $a > 0$.

a) Caractériser l'image de φ*.*

b) Calculer le bord $\partial\varphi$ *de* φ*.*

c) Trouver une 1*-forme différentielle dont la différentielle soit* $dx \wedge dz$*.*

d) Calculer

$$\int_{\varphi} dx \wedge dz.$$

i) par calcul direct.

ii) par le théorème de Stokes-Cartan.

Réponse : *a*) Im $\varphi = \{(x, y) : x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq 1\}$ (cylindre de rayon a et de hauteur 1. *b*) $\partial\varphi = (\varphi(u, 0), \varphi(1-u, 1))$. *c*) $\omega = xdz$. *d*) 0.

Exercice 1.17 *Soit la 1-forme différentielle dans l'ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$ *égal à* $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ *:*

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

a) *Montrer que la forme* ω *n'est pas exacte sur* Ω.
b) *Trouver un ouvert* Δ *dont la différence avec* Ω *soit de mesure nulle et sur lequel* ω *soit exacte.*

2 Champ de vecteurs, Flots, Opérateurs différentiels et Variétés difféomorphes aux tores réels

Dans ctte partie, on commence par quelques définitions et propriétés sur les champs de vecteurs définis sur une variété différentiable. On étudie leurs liaisons avec les groupes à un paramètre de difféomorphismes ou flots ainsi qu'avec les opérateurs différentiels. On montre qu'un champ de vecteurs différentiable et à support compact est générateur d'un unique groupe à un paramètre de difféomorphismes de cette variété ; on construit le flot sur toute la variété. Puis la notion de commutativité des champs de vecteurs est détaillée, avec des calculs explicites concernant une condition nécessaire et suffisante fort utile pour vérifier la commutativité des champs de vecteurs. Ensuite, nous démontrons un résultat important de topologie différentielle : on montre que si la variété différentiable de dimension m est compacte, connexe, munie de m champs de vecteurs différentiables commutant deux à deux et linéairement indépendants en chaque point, alors cette variété est difféomorphe à un tore réel de dimension m. On notera que l'exposé est conçu dans un esprit plus géométrique.

2.1 Champ de vecteurs, Groupes à un paramètre de difféomorphismes et Opérateurs différentiels

Soit M une variété différentiable de dimension m. Soit TM le fibré tangent à M, i.e., l'union des espaces tangents à M en tous ses points x,

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Ce fibré possède une structure naturelle de variété différentiable de dimension $2m$ et il nous permet de transporter imméditement aus variétés toute la théorie des équations différentielles ordinaires.

Définition 4 *Un champ de vecteurs (On dit aussi section du fibré tangent) sur M est une application, notée X, qui à tout point $x \in M$ associe un vecteur tangent $X_x \in T_xM$. Autrement dit, c'est une application*

$$X : M \longrightarrow TM,$$

telle que si

$$\pi : TM \longrightarrow M,$$

est la projection naturelle, on ait

$$\pi \circ X = id_M.$$

Notons que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "id_M"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

est commutatif.
Soit $(x_1, ..., x_m)$ un système de coordonnées locales dans un voisinage $U \subset M$. Dans ce système le champ de vecteurs X s'écrit sous la forme

$$X = \sum_{k=1}^{m} f_k\left(x\right) \frac{\partial}{\partial x_k},\ x \in U,$$

où les fonctions

$$f_1, \ldots, f_m : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

sont les composantes de X par rapport à $(x_1, ..., x_m)$. Un champ de vecteurs X est différentiable si ses composantes $f_k\left(x\right)$ sont des fonctions différentiables. Cette définition de différentiabilité ne dépend pas évidemment du choix du système de coordonnées locales. En effet, si $(y_1, ..., y_m)$ est un autre système de coordonnées locales dans U, alors

$$X = \sum_{k=1}^{m} h_k\left(x\right) \frac{\partial}{\partial y_k},\ x \in U,$$

où

$$h_1, \ldots, h_m : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

sont les composantes de X par rapport à $(y_1, ..., y_m)$ et le résultat découle du fait que

$$h_k\left(x\right) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial y_k}{\partial x_l} f_l\left(x\right),\ x \in U.$$

Au champ de vecteurs X correspond un système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, ..., x_m), \\ &\vdots \\ \frac{dx_m}{dt} &= f_m(x_1, ..., x_m). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Définition 5 *Un champ de vecteurs différentiable X sur M s'appelle système dynamique.*

Un champ de vecteurs s'écrit localement sous la forme (2.1).

Définition 6 *Une courbe intégrale (ou trajectoire) du champ de vecteurs X est une courbe différentiable*

$$\gamma : I \longrightarrow M, \quad t \longmapsto \gamma(t),$$

telle que :

$$\forall t \in I, \ \frac{d\gamma(t)}{dt} = X(\gamma(t)),$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

est l'expression locale de X, alors les courbes intégrales (ou trajectoires) de X sont les solutions $\gamma(t) = \{x_k(t)\}$ de (2.1).

On suppose dans la suite que le champ de vecteurs X est différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) et à support compact (i.e., X est nul en dehors d'un compact de M), ce qui sera en particulier le cas si la variété M est compacte.

Etant donné un point $x \in M$, on note $g_t^X(x)$ (ou tout simplement $g_t(x)$) la position de x après un déplacement d'une durée $t \in \mathbb{R}$. On a ainsi une application

$$g_t^X : M \longrightarrow M, \quad t \in \mathbb{R},$$

qui est un difféomorphisme, en vertu de la théorie des équations différentielles (voir théorème ci-dessous). Plus précisément, au champ de vecteurs X est lié un groupe à un paramètre de difféomorphismes g_t^X sur M c'est-à-dire une application différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) : $M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$, vérifiant une loi de groupe :

i) $\forall t \in \mathbb{R}, \ g_t^X : M \longrightarrow M$ est un difféomorphisme de M sur M.

ii) $\forall t, s \in \mathbb{R}, \ g_{t+s}^X = g_t^X \circ g_s^X$.

La condition $ii)$ signifie que la correspondance $t \longmapsto g_t^X$, est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe des difféomorphismes de M dans M. Elle implique que
$$g_{-t}^X = \left(g_t^X\right)^{-1},$$
car $g_0^X = id_M$ est la transformation identique qui laisse chaque point invariant.

Définition 7 *Le groupe à un paramètre de difféomorphismes g_t^X sur M, que l'on vient de décrire s'appelle flot et il admet le champ de vecteurs X pour champ de vitesses*
$$\frac{d}{dt} g_t^X(x) = X\left(g_t^X(x)\right),$$
avec la condition initiale
$$g_0^X(x) = x.$$

Evidemment
$$\left.\frac{d}{dt} g_t^X(x)\right|_{t=0} = X(x).$$
Donc par ces formules $g_t^X(x)$ est la courbe sur la variété qui passe par x et telle que la tangente en chaque point est le vecteur $X\left(g_t^X(x)\right)$.

Nous allons maintenant voir comment construire le flot g_t^X sur toute la variété M.

Théorème 8 *Le champ de vecteurs X est générateur d'un unique groupe à un paramètre de difféomorphismes de M.*

Démonstration : $a)$ Construction de g_t^X pour t assez petit. Pour x fixé, l'équation différentielle
$$\frac{d}{dt} g_t^X(x) = X\left(g_t^X\right),$$
fonction de t avec la condition initiale
$$g_0^X(x) = x,$$
admet une solution unique g_t^X définie au voisinage du point x_0 et dépendant de façon $\mathcal{C}^\infty$ de la condition initiale. Donc g_t^X est localement un difféomorphisme. Dès lors pour chaque point $x_0 \in M$, on peut trouver un voisinage $U(x_0) \subset M$, un nombre réel positif $\varepsilon \equiv \varepsilon(x_0)$ tels que pour tout $t \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$, l'équation différentielle en question avec sa condition initiale admet une solution unique $g_t^X(x)$ différentiable définie dans $U(x_0)$ et vérifiant la relation de groupe
$$g_{t+s}^X(x) = g_t^X \circ g_s^X(x),$$
avec $t, s, t+s \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$. En effet, posons
$$x_1 = g_t^X(x), \quad t \text{ fixé},$$

et considérons la solution de l'équation différentielle satisfaisant dans le voisinage du point x_0 à la condition initiale

$$g_{s=0}^X = x_1.$$

Cette solution vérifie la même équation différentielle et coincide en un point

$$g_t^X(x) = x_1,$$

avec la fonction g_{t+s}^X. Donc, par unicité de la solution de l'équation différentielle, les deux fonctions sont localement égales. Par conséquent, l'application g_t^X est localement un difféomorphisme. Rappelons que le champ de vecteurs X est supposé différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) et à support compact K. Du recouvrement de K formé par des ouverts $U(x)$, on peut extraire un sous-recouvrement fini (U_i), puisque K est compact. Désignons par ε_i les nombres ε correspondants aux U_i et posons

$$\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_i), \quad g_t^X(x) = x, \quad x \notin K.$$

Dès lors, l'équation en question admet une solution unique g_t^X sur $M \times]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ vérifiant la relation du groupe

$$g_{t+s}^X = g_t^X \circ g_s^X,$$

l'inverse de g_t^X étant g_{-t}^X et donc g_t^X est un difféomorphisme pour t suffisamment petit.
b) Construction de g_t^X pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après a), il suffit de construire g_t^X pour $t \in]-\infty, -\varepsilon_0[\cup]\varepsilon_0, \infty[$. Nous allons voir que les applications g_t^X se définissent d'après la loi de multiplication du groupe. Notons que t peut s'écrire sous la forme

$$t = k\frac{\varepsilon_0}{2} + r,$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \left[0, \frac{\varepsilon_0}{2}\right[$. Posons, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_t^X = \underbrace{g_{\frac{\varepsilon_0}{2}}^X \circ \cdots \circ g_{\frac{\varepsilon_0}{2}}^X}_{k-\text{fois}} \circ \; g_r^X,$$

et pour $t \in \mathbb{R}_-^*$,

$$g_t^X = \underbrace{g_{-\frac{\varepsilon_0}{2}}^X \circ \cdots \circ g_{-\frac{\varepsilon_0}{2}}^X}_{k-\text{fois}} \circ \; g_r^X.$$

Les difféomorphismes $g_{\pm\frac{\varepsilon_0}{2}}^X$ et g_r^X ont été définis dans a), et on en déduit que pour tout réel t, g_t^X est un difféomorphisme défini globalement sur M. $\square$

Corollaire 9 *Toute solution de l'équation différentielle*

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = X\,(x\,(t))\,,\ \ x \in M,$$

avec la condition initiale x (pour $t = 0$), est indéfiniment prolongeable. La valeur de la solution $g_t^X(x)$ à l'instant t est différentiable par rapport à t et à la condition initiale x.

Avec un léger abus de notation, on peut écrire l'équation précédente sous la forme du système d'équations différentielles (2.1) avec les conditions initiales $x_1, ..., x_m$ pour $t = 0$.

Au champ de vecteurs X est lié l'opérateur différentiel L_X d'ordre 1. Il s'agit de la différentiation des fonctions suivant la direction du champ de vecteurs X. On a

$$L_X : \mathcal{C}^\infty\,(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty\,(M)\,,\ F \longmapsto L_X F,$$

où

$$L_X F(x) = \left.\frac{d}{dt}F\left(g_t^X(x)\right)\right|_{t=0},\ x \in M.$$

Ici $\mathcal{C}^\infty\,(M)$ désigne l'ensemble des fonctions $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'opérateur L_X est linéaire

$$L_X\,(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) = \alpha_1 L_X F_1 + \alpha_2 L_X F_2,\ \ (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})\,,$$

et satisfait à la formule de Leibniz

$$L_X\,(F_1 F_2) = F_1 L_X F_2 + F_2 L_X F_1.$$

Comme $L_X F(x)$ ne dépend que des valeurs de F au voisinage de x, on peut donc appliquer l'opérateur L_X à des fonctions définies seulement au voisinage d'un point, sans avoir besoin de les prolonger à toute la variété M. Soit $(x_1, ..., x_m)$ un système de coordonnées locales sur M. Dans ce système le champ de vecteurs X a pour composantes $f_1, \ldots, f_m$ et le flot g_t^X est défini par le système d'équations différentielles (2.1). Donc la dérivée de $F = F\,(x_1, ..., x_m)$ suivant la direction de X s'écrit

$$L_X F = f_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + f_m \frac{\partial F}{\partial x_m}.$$

Autrement dit, dans les coordonnées $(x_1, ..., x_m)$ l'opérateur L_X s'écrit

$$L_X = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_m \frac{\partial}{\partial x_m},$$

ceci n'est autre que la forme générale de l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre.

2.2 Commutativité des champ de vecteurs

Définition 10 *On dit que deux champs de vecteurs X_1 et X_2 sur une variété M commutent (ou sont commutatifs) si et seulement si les flots correspondants commutent*

$$g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x) = g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x), \ \forall x \in M.$$

Le résultat suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante, fort utile, pour vérifier la commutativité de deux champs de vecteurs.

Théorème 11 *Deux champs de vecteurs X_1 et X_2 sur une variété M commutent si et seulement si*

$$[L_{X_1}, L_{X_2}] \equiv L_{X_1}L_{X_2} - L_{X_2}L_{X_1} = 0.$$

Démonstration : *a*) Condition nécessaire. Montrons tout d'abord que : $\forall F \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\forall x \in M$, alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) - F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\right)\Big|_{t_2=t_1=0} = \left(L_{X_1}L_{X_2} - L_{X_2}L_{X_1}\right)F(x).$$

En effet, d' après la définition de L_{X_2}, on a

$$\frac{\partial}{\partial t_2}F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\Big|_{t_2=0} = L_{X_2}F\left(g_{t_1}^{X_1}(x)\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\Big|_{t_2=t_1=0} &= \frac{\partial}{\partial t_1}L_{X_2}F\left(g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\Big|_{t_1=0}, \\
&= \frac{\partial}{\partial t_1}G\left(g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\Big|_{t_1=0} \text{ où } G \equiv L_{X_2}F, \\
&= L_{X_1}G(x) \text{ par définition de } L_{X_1}, \\
&= L_{X_1}L_{X_2}F(x).
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1}F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\Big|_{t_1=0} = L_{X_1}F\left(g_{t_2}^{X_2}(x)\right),$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1}F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\Big|_{t_2=t_1=0} = L_{X_2}L_{X_1}F(x).$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\Big|_{t_1=0} &- \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\Big|_{t_2=t_1=0} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) - F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\right)\Big|_{t_2=t_1=0}, \\
&= L_{X_1} L_{X_2} F(x) - L_{X_2} L_{X_1} F(x).
\end{aligned}$$

Donc si X_1 et X_2 commutent sur la variété M c'est-à-dire si

$$g_{X_1}^{t_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x) = g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x),\ \forall x \in M,$$

alors d'après la formule ci-dessus,

$$\left(L_{X_1} L_{X_2} - L_{X_2} L_{X_1}\right) F(x) = 0,\ \forall F \in \mathcal{C}^\infty(M),\ \forall x \in M,$$

et par conséquent

$$L_{X_1} L_{X_2} = L_{X_2} L_{X_1}.$$

$b)$ Condition suffisante. Montrons que

$$g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x) = g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x), \forall x \in M,$$

ou encore que

$$F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) = F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right),\ \forall F \in \mathcal{C}^\infty(M),\ \forall x \in M.$$

Posons

$$\xi = g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x),\ \zeta = g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x),$$

et développons en série de Taylor la fonction $F(\xi) - F(\zeta)$ autour de $t_1 = t_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
F(\xi) - F(\zeta) = \quad & F(x) - F(x) \\
& + t_1 \left(\frac{\partial}{\partial t_1}(F(\xi) - F(\zeta))\right)\Big|_{t_1=t_2=0} \\
& + t_2 \left(\frac{\partial}{\partial t_2}(F(\xi) - F(\zeta))\right)\Big|_{t_1=t_2=0} \\
& + \frac{t_1^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}(F(\xi) - F(\zeta))\right)\Big|_{t_1=t_2=0} \\
& + \frac{t_2^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}(F(\xi) - F(\zeta))\right)\Big|_{t_1=t_2=0} \\
& + t_1 t_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}(F(\xi) - F(\zeta))\right)\Big|_{t_1=t_2=0} \\
& + \circ\left(t_1^3, t_2^3, t_1^2 t_2, t_1 t_2^2\right).
\end{aligned}$$

Calculons les différents termes. On a

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial t_1} F(\xi)\right|_{t_1=t_2=0} &= \left.\frac{\partial}{\partial t_1} F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\right|_{t_1=t_2=0}, \\
&= L_{x_1}\, F\left(g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\big|_{t_2=0}, \\
&= L_{x_1} F(x). \\
\left.\frac{\partial}{\partial t_1} F(\zeta)\right|_{t_1=t_2=0} &= \left.\frac{\partial}{\partial t_1} F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\right|_{t_1=t_2=0}, \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial t_1} G\left(g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\right|_{t_1=0} \text{ où } G = F g_{t_2}^{X_2}\big|_{t_2=0}, \\
&= L_{x_1} G(x), \\
&= L_{x_1}\, F\left(g_{t_2}^{X_2}\right)\big|_{t_2=0}, \\
&= L_{x_1} F(x).
\end{aligned}
$$

Dès lors,

$$\left.\frac{\partial}{\partial t_1}\left(F(\xi) - F(\zeta)\right)\right|_{t_1=t_2=0} = 0.$$

Par symétrie, on a aussi

$$\left.\frac{\partial}{\partial t_2}\left(F(\xi) - F(\zeta)\right)\right|_{t_1=t_2=0} = 0.$$

De même, on a

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left(F(\xi) - F(\zeta)\right)\right|_{t_1=t_2=0} = \left.\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left(F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) - F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\right)\right|_{t_1=t_2=0}.$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_1} F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) &= \frac{\partial}{\partial t_1} F\left(g_{t_1}^{X_1}(y)\right) \text{ où } y = g_{t_2}^{X_2}(x), \\
&= L_{X_1} F\left(g_{t_1}^{X_1}(y)\right). \\
\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) &= \frac{\partial}{\partial t_1} L_{X_1} F\left(g_{t_1}^{X_1}(y)\right), \\
&= L_{X_1} L_{X_1} F\left(g_{t_1}^{X_1}(y)\right), \\
&= L_{X_1} L_{X_1} F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) \underset{t_1=t_2=0}{\longrightarrow} L_{X_1} L_{X_1} F(x). \\
\frac{\partial}{\partial t_1} F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) &= \frac{\partial}{\partial t_1} G\left(g_{t_1}^{X_1}(x)\right) \text{ où } G = F g_{t_2}^{X_2}, \\
&= L_{X_1} G\left(g_{t_1}^{X_1}(x)\right). \\
\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) &= \frac{\partial}{\partial t_1} L_{X_1} G\left(g_{t_1}^{X_1}(x)\right), \\
&= L_{X_1} L_{X_1} G\left(g_{t_1}^{X_1}(x)\right), \\
&= L_{X_1} L_{X_1} F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) \underset{t_1=t_2=0}{\longrightarrow} L_{X_1} L_{X_1} F(x).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\left.\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} (F(\xi) - F(\zeta))\right|_{t_1=t_2=0} = 0.
$$

Il s'en suit, par symétrie, que

$$
\left.\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} (F(\xi) - F(\zeta))\right|_{t_1=t_2=0} = 0.
$$

Par ailleurs, on déduit de la condition nécessaire et du fait que les champs de vecteurs X_1 et X_2 commutent, la relation suivante

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} (F(\xi) &- F(\zeta))|_{t_1=t_2=0} \\
&= \left.\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left(F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) - F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\right)\right|_{t_1=t_2=0}, \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left(L_{X_2} L_{X_1} - L_{X_1} L_{X_2}\right) F(x), \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) - F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) = \circ\left(t_1^3, t_2^3, t_1^2 t_2, t_1 t_2^2\right).
$$

Considérons tout d'abord des temps t_1 et t_2 de l'ordre de ε. On a un écart entre les deux nouveaux points de la variété, suivant que l'on applique le champ X_1 avant X_2, ou l'inverse, de l'ordre de ε^3,

$$
F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) - F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) = o\left(\varepsilon^3\right).
$$

Maintenant, si t_1 et t_2 sont des temps fixés quelconques, quadrillons l'espace entre les deux chemins par des carrés de côté ε. Chaque carré représente le petit espace parcouru pendant un petit temps ε, soit suivant le champ X_1, soit suivant le champ X_2. On a trouvé que lorsque l'espace entre deux chemins diffère d'un carré on obtient une différence de ε^3. En modifiant par étapes successives le chemin parcouru d'un carré, on obtient

$$F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) - F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) \leq \frac{t_1 t_2}{\varepsilon^2} o\left(\varepsilon^3\right),$$

par le fait qu'on a $\frac{t_1}{\varepsilon} \times \frac{t_2}{\varepsilon}$ étapes intermédiaires. Ceci est valable pour tout ε, il suffit de prendre ε suffisament petit, tendant vers zéro, pour que

$$\frac{t_1 t_2}{\varepsilon^2} o\left(\varepsilon^3\right) = t_1 t_2 o\left(\varepsilon\right) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

2.3 Variétés difféomorphes aux tores réels

Théorème 12 . *On suppose que la variété différentiable M de dimension m est compacte, connexe, muni de m champs de vecteurs différentiables (de classe $\mathcal{C}^\infty$) $X_1, ..., X_m$ commutant deux à deux et linéairement indépendants en chaque point de M. Alors, la variété M est difféomorphe à un tore réel de dimension m.*

Démonstration : Définissons l'application

$$g : \mathbb{R}^m \longrightarrow M, \ \ (t_1, ..., t_m) \ \longmapsto g\left(t_1, ..., t_m\right),$$

où

$$g\left(t_1, ..., t_m\right) = g_{t_1}^{X_1} \circ \cdots \circ g_{t_m}^{X_m}\left(x\right) = g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}\left(x\right), \ x \in M.$$

a) L'application g est un difféomorphisme local. En effet, soit

$$g_r \equiv g\left|_U : U \longrightarrow M, \ (t_1, ..., t_m) \longmapsto g_r\left(t_1, ..., t_m\right) = g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{X_1}^{t_1}\left(x\right),\right.$$

la restriction de g sur un voisinage U de $(0, ..., 0)$ dans $\mathbb{R}^m$ avec

$$x = g_r\left(0, ..., 0\right).$$

Montrons que l'application g_r est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a

$$\frac{\partial}{\partial t_1} g_{t_1}^{X_1} = X_1(x) = \left(\frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{dx_m}{dt}\right),$$

avec

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} & = f_1 (x_1, ..., x_m), \\ & \vdots \\ \frac{dx_m}{dt} & = f_m (x_1, ..., x_m), \end{cases}$$

où $f_1, ..., f_m$ sont des fonctions de la variété M dans $\mathbb{R}$. De même, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} g_{t_1}^{X_1} &= (\frac{d^2 x_1}{dt^2}, ..., \frac{d^2 x_m}{dt^2}), \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}, ..., \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \right), \\ \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} g_{t_1}^{X_1} &= (\frac{d^3 x_1}{dt^3}, ..., \frac{d^3 x_m}{dt^3}), \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_k \partial x_l} \frac{dx_k}{dt} \frac{dx_l}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \frac{d^2 x_k}{dt^2}, ..., \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_k \partial x_l} \frac{dx_k}{dt} \frac{dx_l}{dt} + \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \frac{d^2 x_k}{dt^2} \right), \end{aligned}$$

etc...Toutes ces expressions ont un sens car par hypothèse toutes les fonctions $f_1, ..., f_m$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Un raisonnement similaire, montre que $g_{t_2}^{X_2}, ..., g_{t_m}^{X_m}$ sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit que $g_r (t_1, ..., t_m)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrons maintenant que la matrice jacobienne de g_r en $(0, \ldots, 0)$ est inversible. Pour celà, posons

$$g_r (t_1, ..., t_m) \equiv (G_1 (t_1, ..., t_m), ..., G_m (t_1, ..., t_m)).$$

On a

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial t_m} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial t_m} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_r}{\partial t_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial t_m} \end{pmatrix}, \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1} (x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t_m} g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1} (x) \end{pmatrix}, \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

car les champs de vecteurs $X_1, ..., X_m$ sont linéairement indépendants en chaque point de M. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage suffisamment petit $V \subset U$ de $(0, \ldots, 0)$ et un voisinage W de x tels que g_r induise une bijection de V sur W dont la réciproque

$$g_r^{-1} : W \longrightarrow V,$$

soit de classe $\mathcal{C}^\infty$. Autrement dit, g_r est un difféomorphisme de V sur $g_r (V)$. Notons que ce résultat est local car même si la matrice jacobienne ci-dessus

est inversible pout tout $(t_1, ..., t_m)$, alors l'inverse "globale" de g_r n'existe pas nécessairement.
b) L'application g est surjective. En effet, soit $y \in M$ et déterminons $(t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$g(t_1, ..., t_m) = g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) = y.$$

Nous avons montré dans la partie a) que g est un difféomorphisme local. Donc pour tout point x_1 contenu dans un voisinage de x, il existe $(t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) = x_1.$$

Comme la variété M est connexe, on peut relier le point x au point y par une courbe $\mathcal{C}$. Soit B_1 une boule ouverte dans M contenant le point x_1. Cette boule existe puisque M est compacte. Soit $x_2 \in \mathcal{C}$ tel que x_2 soit contenu dans la boule B_1. On raisonne comme précédemment, l'application g étant un difféomorphisme local, alors il existe $(t'_1, ..., t'_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$g'_{t_m X_m} \circ \cdots \circ g'_{t_1 X_1}(x_1) = x_2.$$

Donc

$$x_2 = g'_{t_m X_m} + t_m \circ \cdots \circ g'_{t_1 X_1} + t_1(x).$$

De même, soit B_2 une boule ouverte dans M contenant le point x_2. Soit $x_3 \in \mathcal{C}$ tel que x_3 soit contenu dans la boule B_2. Comme l'application g est un difféomorphisme local, alors il existe $(t''_1, ..., t''_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$g''_{t_m X_m} \circ \cdots \circ g''_{t_1 X_1}(x_2) = x_3.$$

Donc

$$x_3 = g''_{t_m X_m} + t'_m + t_m \circ \cdots \circ g''_{t_1 X_1} + t'_1 + t_1(x).$$

En continuant ainsi, on montre (après un nombre k fini d'étapes) l'existence d'un point $\left(t_1^{(k-1)}, ..., t_m^{(k-1)}\right) \in \mathbb{R}^m$, tel que :

$$g_{t_m X_m}^{(k-1)} \circ \cdots \circ g_{t_1 X_1}^{(k-1)}(x_{k-1}) = x_k,$$

où $x_k \in \mathcal{C}$, x_k contenu dans une boule ouverte B_{k-1} de M, avec $B_{k-1} \ni x_{k-1}$. Donc

$$x_k = g_{t_m X_m}^{(k-1)} + t_m^{(k-2)} + \cdots + t'_m + t_m \circ \cdots \circ g_{t_1 X_1}^{(k-1)} + t_1^{(k-2)} + \cdots + t'_1 + t_1(x), \ k \text{ fini.}$$

Cette construction montre qu'on peut, en un nombre k fini d'étapes, recouvrir la courbe $\mathcal{C}$ reliant le point x au point y par des voisinages de x; le point y jouant le rôle de x_k. Notons que l'application g ne peut être injective. En effet, si g est injective, on aurait d'après la partie a) une bijection entre un compact

M et un non compact $\mathbb{R}^m$, ce qui est absurde.
c) Le groupe stationnaire

$$\Lambda = \left\{(t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m : g(t_1, ..., t_m) = g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) = x\right\},$$

est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^m$ indépendant du point $x \in M$. En effet, notons tout d'abord que $\Lambda \neq \emptyset$ car $(0, ..., 0) \in \Lambda$. Soit $(t_1, ..., t_m) \in \Lambda$, $(t'_1, ..., t'_m) \in \Lambda$. On a

$$g(t_1, ..., t_m) = g(t'_1, ..., t'_m) = x.$$

Puisque les champs de vecteurs $X_1, ..., X_m$ sont commutatifs, alors

$$\begin{aligned}
g(t_1 + t'_1, ..., t_m + t'_m) &= g_{t_m+t'_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1+t'_1}^{X_1}(x), \\
&= g_{t'_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t'_1}^{X_1} \circ g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x), \\
&= g_{t'_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t'_1}^{X_1}(x), \\
&= x, \\
g(-t_1, ..., -t_m) &= g_{-t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{-t_1}^{X_1}(x), \\
&= g_{-t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{-t_1}^{X_1} \circ g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x), \\
&= g_{-t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{-t_1}^{X_1} \circ g_{t_1}^{X_1} \circ \cdots \circ g_{t_m}^{X_m}(x), \\
&= g_{-t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{-t_2}^{X_2} \circ g_{t_2}^{X_2} \circ \cdots \circ g_{t_m}^{X_m}(x), \\
&\vdots \\
&= g_{-t_m}^{X_m} \circ g_{t_m}^{X_m}(x), \\
&= x.
\end{aligned}$$

D'où $(t_1 + t'_1, ..., t_m + t'_m) \in \Lambda$ et $(-t_1, ..., -t_m) \in \Lambda$. Donc Λ est stable pour l'addition, l'inverse de $(t_1, ..., t_m)$ est $(-t_1, ..., -t_m)$ et par conséquent Λ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^m$. Montrons que Λ est indépendant de x. Soit

$$\Lambda' = \left\{(t'_1, ..., t'_m) \in \mathbb{R}^m : g(t'_1, ..., t'_m) = g_{t'_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t'_1}^{X_1}(y) = y\right\}.$$

Par la surjectivité, on peut trouver $(s_1, ..., s_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$g_{s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{s_1}^{X_1}(x) = y,$$

Soit $(t'_1, ..., t'_m) \in \Lambda'$. On a

$$\begin{aligned}
g_{t'_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t'_1}^{X_1}(y) &= y, \\
g_{t'_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t'_1}^{X_1} \circ g_{s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{s_1}^{X_1}(x) &= g_{s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{s_1}^{X_1}(x), \\
g_{-s_m+t'_m+s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{-s_1+t'_1+s_1}^{X_1}(x) &= x, \\
g_{t'_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t'_1}^{X_1}(x) &= x.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(t_1', ..., t_m') \in \Lambda$ et donc Λ ne dépend pas de x. Pour montrer que Λ est discret, on considère un voisinage V suffisamment petit du point $(0, ..., 0)$ et un voisinage W du point x. D'après a), l'application g est un difféomorphisme local, donc

$$g : V \longrightarrow W,$$

est bijective et par conséquent aucun point de $W\backslash\{(0, ..., 0)\}$ n'est envoyé sur x ; les points du sous-groupe Λ n'ont aucun point d'accumulation dans $\mathbb{R}^m$..
d) La variété M est difféomorphe à un tore réel de dimension m. En effet, puisque Λ est le noyau de g, il existe une surjection canonique

$$\widetilde{g} : \mathbb{R}^m/\Lambda \rightarrow M, \quad [(t_1, ..., t_m)] \mapsto \widetilde{g}\,[(t_1, ..., t_m)] = g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) .$$

En effet, soient $(t_1, ..., t_m)$ et $(s_1, ..., s_m)$ tels que :

$$\widetilde{g}\,[(t_1, ..., t_m)] = \widetilde{g}\,[(s_1, ..., s_m)] .$$

On a

$$g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) = g_{s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{s_1}^{X_1}(x) ,$$

d'où

$$\begin{aligned} g_{-s_1}^{X_1} \circ \cdots \circ g_{-s_m}^{X_m} \circ g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) &= g_{-s_1}^{X_1} \circ \cdots \circ g_{-s_m}^{X_m} \circ g_{s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{s_1}^{X_1}(x) , \\ &= g_{-s_1}^{X_1} \circ \cdots \circ g_{-s_{m-1}}^{X_{m-1}} \circ g_{s_{m-1}}^{X_{m-1}} \circ \cdots \circ g_{s_1}^{X_1}(x) , \\ &\;\vdots \\ &= g_{-s_1}^{X_1} \circ g_{s_1}^{X_1}(x) , \\ &= x. \end{aligned}$$

Comme $X_1, ..., X_m$ sont commutatifs, alors

$$g_{t_m - s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1 - s_1}^{X_1}(x) = x,$$

et d'après ce qui précéde, on a

$$\begin{aligned} [(t_1 - s_1, ..., t_m - s_m)] &= 0, \\ [(t_1, ..., t_m) - (s_1, ..., s_m)] &= 0, \\ [(t_1, ..., t_m)] &= [(s_1, ..., s_m)] . \end{aligned}$$

Par conséquent $\widetilde{g}$ est un difféomorphime. $\square$

Remarque 13 *En général , pour tout sous-groupe discret de $\mathbb{R}^m$, il existe k vecteurs linéairement indépendants tels que ce groupe soit l'ensemble de toutes* *leurs combinaisons linéaires entières. Par conséquent, le groupe stationnaire* Λ *(voir point c) dans la preuve du théorème) peut s'écrire sous la forme*

$$\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_k, \ 1 \leq k \leq m,$$

où $e_1, ..., e_m$ *sont des vecteurs linéairement indépendants. En effet, pour fixer les idées, prenons* $m = 2$ *c'est-à-dire*

$$\Lambda = \left\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : g\left(t_1, t_2\right) = g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}\left(x\right) = x\right\}.$$

Ici, trois cas sont possibles :
i) $\Lambda = \{0\}$,
ii) $\Lambda = \mathbb{Z}e_1$,
iii) $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$.
Le cas i) est à rejeter car nous avons un difféomorphisme entre $\mathbb{Z}^2/ \ \{0\}$ *(non compact) et* M *un compact, ce qui est impossible. Le second cas* $\mathbb{Z}^2/ \ \mathbb{Z}e_1$ *(un cylindre) est aussi à rejeter pour les mêmes raisons que dans le premier cas. Il reste le dernier cas , qui est valable, puisque* $\mathbb{Z}^2/ \ \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ *est un tore de dimension* 2.

3 Principe variationnel et applications

3.1 Principe variationnel, Equations de Lagrange

Soit

$$\gamma = ((t, q) : q(t) = q, t_1 \leq t \leq t_2),$$

une courbe définie sur une variété différentiable et reliant deux points $t = t_1$ et $t = t_2$. Considérons la fonctionnelle

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt, \tag{3.1}$$

où $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}$ et

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (q, \dot{q}, t) \longmapsto L(q, \dot{q}, t),$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Le problème variationnel consiste à trouver la fonction $q(t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec

$$q(t_1) = a, \quad q(t_2) = b, \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

telle que l'intégrale (3.1) (dite intégrale d'action ou tout simplement action) soit extrémale (maximale ou minimale). Géométriquement, on cherche l'arc de la courbe joignant le point $A(t_1, a)$ au point $B(t_1, b)$ admettant une tangente qui varie continûment pour lesquel l'intégrale (3.1) soit stationnaire. Cette dernière signifie que si on considère la fonction

$$t \longmapsto q(t) + \varepsilon x(t),$$

avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$ petit et $x(t)$ une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant à $x(t_1) = x(t_2) = 0$. Alors la fonction Φ est stationnaire pour q si

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \varepsilon x(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{x}(t), t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt = \circ(\varepsilon).$$

En désignant par $\delta\varphi$ la différentielle partielle d'une fonction $\varphi(\alpha, ...)$,

$$\delta\varphi = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0},$$

on symbolise souvent le fait que l'intégrale (3.1) est extrémale en écrivant $\delta\Phi = 0$, lors d'une variation (indiquée par la lettre δ) fonctionnelle des chemins. Celà signifie que la différence entre cette intégrale évaluée le long de la trajectoire réelle et l'intégrale évaluée le long de n'importe quelle trajectoire virtuelle infiniment voisine est un infiniment petit du second ordre.

Exemple 14 *Dans le cas particulier où $L = \sqrt{1 + c^2}$,i.e.,*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{q}^2},$$

on obtient la longueur de la courbe γ.

Remarque 15 *En mécanique lagrangienne et hamiltonienne (voir plus loin), L est appelée le lagrangien du principe variationnel et il est égal à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Le principe dit de Hamilton est*

$$\delta\Phi = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt = 0,$$

avec $\delta q_i(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ pour le mouvement réel du système à étudier.

Proposition 16 *La fonctionnelle (3.1) est différentiable [1] et sa différentielle $F(h)$ est donnée par*

$$F(h) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h dt + \left.\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h \right)\right|_{t_1}^{t_2}.$$

[1] Rappelons que la fonctionnelle Φ est différentiable si

$$\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F + R,$$

où F désigne la différentielle de Φ et telle que : $F(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha F(h_1) + \beta F(h_2)$ et $R(h, \gamma) = \circ(h^2)$. On dit aussi que F (resp. h) est une variation de la fonctionnelle Φ (resp. la courbe γ).

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}\Phi(\gamma+h)-\Phi(h) &= \int_{t_1}^{t_2}(L(q+h,\dot{q}+\dot{h},t)-L(q,\dot{q},t)dt,\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}h+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{h}\right)dt+\circ(h^2).\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}F(h) &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}h+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{h}\right)dt,\\ R &= \circ(h^2),\end{aligned}$$

on obtient

$$\Phi(\gamma+h)-\Phi(\gamma)=F+R.$$

D'un autre côté et par intégration par parties, on a

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{h}dt=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}h\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}h\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}dt,$$

et par conséquent

$$F(h)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}h\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}h\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)dt,$$

ce qui termine la preuve. □

Définition 17 *Une courbe γ est dite extrémale d'une fonctionnelle différentiable (3.1) si et seulement si pour tout h, $F(h,\gamma)=0$.*

Théorème 18 *La courbe γ est extrémale de la fonctionnelle (3.1) si et seulement si l'équation différentielle (dite d'Euler-Lagrange) est satisfaite :*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0. \tag{3.2}$$

Démonstration : D'après la proposition précédente, on a

$$F(h)=\int_{t_1}^{t_2}h\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right)dt,$$

car $h(t_1)=h(t_2)=0$. La suite de la preuve utilise le lemme fondamental du calcul variationnel : Si $f(t)$ est une fonction continue sur $[t_1,t_2]$ telle que pour toute fonction $g(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en t_1 et t_2, on ait $\int_{t_1}^{t_2}f(t)g(t)dt=0$

alors $f(t) = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$. Donc d'après ce lemme appliqué aux fonctions $f(t) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$ et $g(t) = h(t)$, on a

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

La réciproque est évidente car si cette dernière équation est satisfaite alors on a bien $F(h) = 0$. $\square$

Exemple 19 *Géodésiques dans le plan et sur une surface : Dans un domaine suffisamment petit entourant deux points d'une surface S, on appelle géodésique une ligne qui réalise le plus court chemin entre ces deux points. Ainsi, dans le plan euclidien, les géodésiques sont les droites et sur une sphère les géodésiques sont les grands cercles. Dans le plan, la longueur de l'arc de courbe d'équation $q = q(t)$ qui joint le point $A(t_1, a)$ au point $B(t_1, b)$ est*

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{q}^2} dt.$$

L'équation d'Euler-Lagrange avec $L = \sqrt{1 + \dot{q}^2}$ s'écrit

$$\frac{\dot{q}}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}} = constante.$$

D'où $\dot{q}$ est constante, les extrémales sont des droites, le plus court chemin entre A et B est réalisé par le segment de droite AB. Dans le cas d'une surface S, supposons que soit donnée une représentation paramétrique en fonction des paramètres u, v. L'élément d'arc ds s'exprime par

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Rechercher le plus court chemin sur la surface S entre deux points $A(u = t_1, v = v_1)$ et $B(u = t_2, v_2)$ revient à chercher la fonction $v = v(u)$ qui rende minimale l'intégrale

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2} du,$$

et qui prenne pour t_1 la valeur v_1 et pour t_2 la valeur v_2. On en déduit l'équation différentielle des géodésiques

$$\frac{d}{du} \frac{F + G\dot{v}}{\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}} = \frac{\frac{\partial E}{\partial v} + 2\frac{\partial F}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial G}{\partial v}\dot{v}^2}{2\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}}.$$

3.2 Transformation de Legendre

Nous allons voir qu'à l'aide d'une transformation dite de Legendre, on peut associer aux équations de Lagrange (3.2) qui sont des équations du second ordre, un système de $2n$ équations différentielles du premier ordre appelé équations canoniques de Hamilton. Mais avant celà, rappelons tout d'abord ce qu'est une transformation de Legendre. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe, $f"(x) > 0$. La transformation de Legendre de f est une fonction $G(s)$ d'une nouvelle variable s définie comme suit : Considérons dans le plan des (x, y), le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = sx$, $s \in \mathbb{R}$. Déterminons un point $x = x(s)$ tel que la distance verticale

$$F(s, x) \equiv sx - f(x),$$

soit maximale. Autrement dit, $x = x(s)$ est le point le plus éloigné de la droite par rapport à la direction de l'axe des y. En ce point (s'il existe, il est unique puisque f est convexe), on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = s - f'(x) = 0,$$

et la tangente $y = f'(x)$ est parallèle à la droite $y = sx$. Dès lors, on définit la fonction $G(s)$ en posant

$$G(s) = F(s, x(s)) = \max_x (sx - f(x)).$$

Exemple 20 *Soit $f(x) = x^2$. On a $F(s, x) = sx - x^2$ et $\frac{\partial F}{\partial x} = s - 2x = 0$. D'où $x(s) = \frac{s}{2}$ et dès lors $G(s) = F(s, x(s)) = \frac{s^2}{4}$.*

La transformation de Legendre est involutive. Deux fonctions f et g sont dites duales (au sens de Young) si elles se déduisent l'une de l'autre par la transformation de Legendre. En fait la transformation de Legendre peut-être considérée comme un procédé qui permet de passer des fonctions définies sur un espace vectoriel à des fonctions sur l'espace dual. Un des intérêts de cette transformation est d'exprimer une fonction en fonction de sa dérivée première et non de la variable elle-même.

On suppose maintenant que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}^n$ avec $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$; la forme quadratique $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx, dx\right)$ étant définie positive. La transformation de Legendre de f est une nouvelle fonction $G(s)$ de plusieurs variables $s = (s_1, ..., s_n)$ définie de façon similaire au cas précédent à l'aide des formules :

$$G(s) = F(s, x(s)) = \max_x F(s, x) = \max_x ((s, x) - f(x)), \quad s = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

De manière plus explicite, prenons le cas d'une fonction $f(x_1,...,x_n;\lambda_1,...,\lambda_m)$ dépendant de $n+m$ variables et supposée deux fois continûment dérivables par rapport aux x_i et une fois par rapport aux λ_i. On introduit de nouvelles variables $s_1,...,s_n$ par les formules de transformations

$$s_1=\frac{\partial f}{\partial x_1},...,s_n=\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

On suppose que ces formules sont inversibles en exigeant par exemple que le déterminant de la matrice hessienne $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ soit non nul. Les quantités $\lambda_1,...,\lambda_m$ apparaissent simplement comme des paramètres dans la transformation. Introduisons maintenant la fonction G en posant

$$G(s_1,...,s_n;\lambda_1,...,\lambda_m)=\sum_{i=1}^n s_ix_i-f(x_1,...,x_n;\lambda_1,...,\lambda_m).$$

Dans cette égalité, on suppose évidemment que les x_i sont exprimés par rapport aux s_i. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial s_k} &= \sum_{i=1}^n\frac{\partial x_i}{\partial s_k}s_i+x_k-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial s_i}\frac{\partial u_i}{\partial s_k},\\ &= \sum_{i=1}^n\frac{\partial x_i}{\partial s_k}(s_i-\frac{\partial f}{\partial s_i})+x_k,\\ &= x_k,\end{aligned}$$

car $s_i=\frac{\partial f}{\partial s_i}$, $1\leq i\leq n$. De même, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \lambda_k} &= \sum_{i=1}^n\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k}s_i-\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k}-\frac{\partial f}{\partial \lambda_k},\\ &= \sum_{i=1}^n\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k}(s_i-\frac{\partial f}{\partial x_i})-\frac{\partial f}{\partial \lambda_k},\\ &= -\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}.\end{aligned}$$

Dès lors, les formules de la transformation de Legendre s'écrivent sous la forme

$$G(x_1,...,x_n;\lambda_1,...,\lambda_n)=\sum_{i=1}^n s_ix_i-f(x_1,...,x_n;\lambda_1,...,\lambda_n),$$

$$s_i=\frac{\partial f}{\partial x_i},\qquad x_i=\frac{\partial G}{\partial s_i},\qquad \frac{\partial G}{\partial \lambda_k}=-\frac{\partial f}{\partial \lambda_k}.$$

3.3 Equations canoniques de Hamilton

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$, $q = (q_1, ..., q_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\dot{q} = (\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n) \in \mathbb{R}^n$. L'application

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (q, \dot{q}, t) \longmapsto L(q, \dot{q}, t),$$

est dite fonction lagrangienne si L et $\frac{\partial L}{\partial q}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et si L est un polynôme du second degré en les variables $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n$. On définit n nouvelles variables $p = (p_1, ..., p_n)$ en posant

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t).$$

On considère le hamiltonien défini par la fonction

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (p, q, t) \longmapsto H(p, q, t),$$

où

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_1, ..., q_n, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, t),$$

avec H, $\frac{\partial H}{\partial q}$ et $\frac{\partial H}{\partial p}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Notons que cette expression n'est rien d'autre qu'une transformation de Legendre appliquée sur le lagrangien L, aux variables $\dot{q}_i$; les variables $\dot{q}_i$ et t étant passives. Ici aussi le déterminant de la matrice hessienne de L par rapport aux $\dot{q}_i$ est non nul. En différentiant l'équation ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt., \end{aligned}$$

car $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. D'après l'équation d'Euler-Lagrange, on a

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i,$$

donc

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Comme la différentielle de la fonction $H = H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, t)$ est donnée par

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

on en déduit par comparaison, les expressions suivantes :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

D'où,

Théorème 21 *Les équations d'Euler-Lagrange (3.2) sont équivalentes au système canonique de Hamilton*

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{cases} \tag{3.3}$$

pour $i = 1, ..., n.$

Ces équations d'Hamilton constituent un système de $2n$ équations différentielles ordinaires du premier ordre et sont connues lorsqu'on connait la fonction H (hamiltonien) défini ci-dessus. En mécanique hamiltonienne, H est égal à la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. L'espace $\mathbb{R}^{2n}$ des $2n$-uples de nombres $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$ porte le nom d'espace de phase du problème et les équations (3.3) déterminent un champ de vecteurs hamiltonien sur $\mathbb{R}^{2n}$. Notons que lorsque l'hamiltonien ne dépend pas explicitement de t (i.e., cas des systèmes consevatifs), on a

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

en vertu des équations (3.3) et du fait que $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Dès lors $H = constante$, et cette équation exprime la conservation de l'énergie totale. Géométriquement, cette équation représente selon les différentes valeurs attribuables à la constante, une famille de surfaces sur laquelle le point (p, q) représentatif du système, démeure pendant tout le mouvement.

3.4 Transformation canonique

Nous avons montré précédemment que les équations d'Euler-Lagrange sont équivalentes aux équations canoniques de Hamilton. Contrairement à ce qu'on pouvait croire l'avantage de ces dernières ne réside pas dans la forme des équations qui sont en général aussi difficiles à résoudre dans l'une que dans l'autre formulation. En fait pour les équations de Lagrange on ne peut les simplifier que par des transformations de variables qui ne portent que sur les coordonnées q_i tandis que pour les équations d'Hamilton, on peut transformer aussi bien en q_i qu'en p_i. Or une transformation quelconque ne transforme pas un système hamiltonien en un système hamiltonien, seules les transformations canoniques ont cet effet. Si g désigne une application différentiable de l'espace de phase $\mathbb{R}^{2n}$, alors g est une transformation canonique si pour tout contour fermé $\mathcal{C}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} pdq = \oint_{g\mathcal{C}} pdq, \tag{3.4}$$

ou ce qui est équivalent si g préserve la forme symplectique

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i, \tag{3.5}$$

i.e., $g^*\omega = \omega$ ou encore si

$$\int\int_S \omega = \int_{gS} \omega, \tag{3.6}$$

où S est la surface limitée par le contour $\mathcal{C}$. Il est à noter que dans le cas d'un domaine de $\mathbb{R}^{2n}$ simplement connexe, les définitions ci-dessus sont équivalentes. Par contre, si le domaine de $\mathbb{R}^{2n}$ n'est pas simplement connexe alors on a les implications suivantes : (3.4) $\Rightarrow$ (3.5) $\Leftrightarrow$ (3.6). Le produit de deux transformations canoniques est une transformation canonique. De même l'inverse d'une transformation canonique est une transformation canonique. Dès lors, l'ensemble des transformations canoniques forme un groupe. Une transformation canonique préserve la forme des crochets de Poisson et donc des équations de Hamilton.

3.5 Equation d'Hamilton-Jacobi

L'équation d'Hamilton-Jacobi est une équation aux dérivées partielles nonlinéaire. Sa résolution nécessite la connaissance d'une transformation canonique, en général très difficile à trouver. Par exemple pour le problème des trois corps, il est impossible de séparer l'équation d'Hamilton-Jacobi. Cependant dans des cas particuliers où les variables sont séparables, on peut déterminer la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi et donc intégrer le système hamiltonien par quadratures.

Considérons les équations canoniques d'Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{cases}$$

d'hamiltonien

$$H \equiv H(p,q,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L, \tag{3.7}$$

où L est le lagrangien et $p = (p_1, ..., p_n)$, $q = (q_1, ..., q_n)$. Soient $P_i = P_i(p, q, t)$, $Q_i = Q_i(p, q, t)$ des transformations canoniques et

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(p, q, t) = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \mathcal{L}, \tag{3.8}$$

l'hamiltonien exprimé dans les nouvelles variables où $\mathcal{L}$ est le lagrangien, $P = (P_1, ..., P_n)$, $Q = (Q_1, ..., Q_n)$ et

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Théorème 22 *La transformation*

$$p, q \longmapsto P(p, q, t), Q(p, q, t)$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (p_i dq_i - P_i dQ_i) - (H - \mathcal{H})dt,$$

est exacte.

Démonstration : Condition nécessaire, d'après le principe de moindre action de Hamilton, on a

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= 0, \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - \mathcal{L}) dt = 0.$$

Cette condition est satisfaite en général par

$$L - \mathcal{L} = \frac{dS}{dt}, \tag{3.10}$$

où S est une fonction (appelée fonction génératrice). Et effectivement, on a

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dS = \delta(S(t_2) - S(t_1)) = 0,$$

car les variables canoniques sont identiques aux instants t_1 et t_2. En tenant compte des équations (3.7) et (3.8), l'équation (3.10) s'écrit

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H} \right) = \frac{dS}{dt},$$

ou encore

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - P_i dQ_i\right) - (H - \mathcal{H})dt = dS, \tag{3.11}$$

ce qui montre que la forme ω est exacte. Notons que la fonction S ne dépend que de $2n+1$ variables car p, q, P, Q, t sont liés par $2n$ équations : $P_i = P_i(p, q, t)$, $Q_i = Q_i(p, q, t)$.
Condition suffisante, de l'expression

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

on tire la relation

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt = dF, \tag{3.12}$$

où F est une fonction quelconque. Cette forme différentielle s'appelle invariant de Poincaré-Cartan. En retranchant (3.11) de (3.12), on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i - \mathcal{H} dt = dF - dS \equiv d\lambda, \tag{3.13}$$

ou

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i\right) - \sum_{i=1}^{n} Q_i dP_i - \mathcal{H} dt = d\lambda,$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i dP_i + \mathcal{H} dt = d\left(\sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i\right) + d\lambda \equiv d\mu. \tag{3.14}$$

Les formes différentielles (3.13) et (3.14) sont exactes si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}, \\ \frac{\partial Q_i}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \end{aligned}$$

respectivement. Les variables canoniques P_i et Q_i ne dépendent que de t, d'où

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}, \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Soit $S = S(q, Q, t)$ une fonction de $2n + 1$ variables $q = (q_1, ..., q_n)$, $Q = (Q_1, ..., Q_n)$ et t. On a

$$dS = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i \right) + \frac{\partial S}{\partial t} dt,$$

et en comparant avec (3.11), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \\ P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}, \\ \mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H. \end{array} \right. \tag{3.15}$$

De même, si $S = S(q, P, t)$ on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \\ Q_i = -\frac{\partial S}{\partial P_i}, \\ \mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H. \end{array} \right.$$

On obtient des formules similaires en supposant que S dépend d'autres coordonnées par exemple $S(p, Q, t)$, $S(p, P, t)$. De toutes les façons, quelle que soit la transformation canonique considérée, la fonction génératrice S et les hamiltoniens H, $\mathcal{H}$ sont reliés par l'équation

$$\mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H.$$

Considérons un système d'hamiltonien $H(p, q, t)$ et cherchons une transformation canonique dépendant de t telle que le nouveau hamiltonien $\mathcal{H}(P, Q, t)$ soit nul. Déterminons donc $S(= S(q, Q, t)$ dépendant de $2n+1$ variables de façon à ce que $\mathcal{H} = 0$. Nous allons voir que cette méthode qui consiste à rendre $\mathcal{H} = 0$ implique que les nouvelles variables P et Q sont des constantes. En effet, les équations (3.15) et (3.9) se réduisent respectivement à

$$\left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \\ P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}, \\ \mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = 0, \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} = 0, \end{array} \right.$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_i = a_i, \\ P_i = b_i, \end{array} \right.$$

où a_i et b_i sont des constantes. On peut déterminer p_i et q_i à l'aide de la transformation canonique et donc la solution du système. Pour cela, il faut déterminer la fonction génératrice S et celle-ci s'obtient en résolvant l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0.$$

Comme $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, le hamiltonien $H(p_i, q_i, t)$ s'écrit $H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right)$ et l'équation ci-dessus devient

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right).$$

Cette équation aux dérivées partielles s'appelle équation d'Hamilton-Jacobi. Cette équation dépend de n variables $q_1, ..., q_n$, de t et de n constantes d'intégration $a_1, ..., a_n$. En fait cette équation dépend de $n+1$ constantes. Or la fonction S n'apparaît dans l'équation d'Hamilton-Jacobi que sous forme de dérivées partielles par rapport à t et à q_i. Dès lors si S est une solution de cette équation alors $S + c$ est une autre solution où c est une constante arbitraire. On peut donc faire apparaître une des $n+1$ constantes d'intégration dans la solution complète sous la forme d'une constante additive. Comme seules les dérivées partielles de la fonction génératrice interviennent dans les équations de transformation, alors on peut négliger cette constante additive et écrire la solution sous la forme $S = S(q_1, ..., q_n, a_1, ..., a_n, t)$. On a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i} . \frac{dq_j}{dt}.$$

On déduit de l'équation d'Hamilton-Jacobi, l'expression

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} . \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right) &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} . \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i} . \frac{dq_j}{dt}, \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} . \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i}\left(\frac{dq_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right), \\
&= 0,
\end{aligned}$$

puisque $\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ le long d'une extrémale. Donc

$$\frac{\partial S}{\partial a_i}(q, a_i, t) = a_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

où a_i sont des constantes et ces équations peuvent être résolues pour les q_i en termes de a_i, c_i et de t,

$$q_i = q_i(a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n, t), \tag{3.16}$$

en supposant que le déterminant hessien

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i}\right) \neq 0.$$

Ensuite, en insérant la solution (3.16) dans la relation

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_1, ..., q_n, a_1, ..., a_n, t),$$

on obtient les p_i comme fonctions de a_i, c_i et t,

$$p_i = p_i(a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n, t). \tag{3.17}$$

Les expressions (3.16) et (3.17) constituent donc la solution complète des équations canoniques de Hamilton. Les constantes $a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n$ sont déterminées par les conditions initiales. Par conséquent, on a le résultat (théorème de Jacobi) suivant :

Théorème 23 *Soit $S(q_1, ..., a_1, ..., a_n, t)$ une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, dépendant de n paramètres $a_1, ..., a_n$ et supposons que :* $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i}\right) \neq 0$. *Alors les équations canoniques d'Hamilton*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

s'intégrent par quadratures et les dérivées partielles $\frac{\partial S}{\partial a_i}$, $1 \leq i \leq n$, sont des intégrales premières des équations canoniques ci-dessus.

Supposons que le hamiltonien H ne dépend pas explicitement de t. Posons $H = H(p, q)$. De la relation

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

on tire

$$H = a_1 \equiv \text{constante}.$$

Comme précédemment, cherchons une fonction génératrice S de façon à ce que : $\mathcal{H} = 0$. L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0,$$

d'où
$$\frac{\partial S}{\partial t}+a_1=0,$$
et en séparant les variables (i.e., la variable séparée étant t), on obtient une équation de la forme
$$S(q_i,a_i,t)=-a_1t+S'(q_i,a_i),\quad i\geq 2 \tag{3.18}$$
Comme
$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=\frac{\partial S'}{\partial q_i},$$
l'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit
$$H\left(\frac{\partial S'}{\partial q_i}\right)=a_1,\quad i\geq 2$$
et le problème consiste à déterminer la solution complète $S'(q_i,a_i)$ de cette équation. La fonction génératrice est donnée par (3.18) et les nouvelles variables s'écrivent
$$P_i=-\frac{\partial S}{\partial q_i}=c_i,\quad i\geq 2$$
car
$$\dot{P}_i=-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}=0.$$
En particulier, on a
$$c_1=P_1=--\frac{\partial S}{\partial a_1}=t--\frac{\partial S'}{\partial Q_1}.$$

Supposons maintenant que la fonction génératrice s'écrit comme $S=S(q,P,t)$. Dès lors, les variables p et Q sont définies par
$$\begin{aligned} p_i &= -\frac{\partial S}{\partial q_i},\\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}, \end{aligned}$$
avec
$$\mathcal{H}=\frac{\partial S}{\partial t}+H.$$
L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit
$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(q_i,\frac{\partial S}{\partial q_i},t\right)=0,$$

et le problème consiste à déterminer une solution $S(q_i, a_i, t)$ de cette équation avec

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial S}{\partial a_i} = c_i, \\ P_i &= a_i. \end{aligned}$$

Et ainsi de suite, on obtient les solutions de l'équation d'Hamilton-Jacobi ci-dessus en répétant le même procédé que celui utilisé précédemment pour la fonction génératrice $S(q, Q, t)$.

On vient de voir que lorsque l'hamiltonien H ne dépend pas explicitement de t, on peut conclure à la séparabilité de t dans l'équation d'Hamilton-Jacobi. De même, on note que lorsque les coordonnées sont cycliques (une coordonnée q_i est cyclique si $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$ alors ces derniers sont toujours séparables, le nouveau hamiltonien $\mathcal{H}$ ne dépend plus que des nouvelles impulsions et on peut dans ce cas résoudre aisément les équations de Hamilton. Prenons à titre d'exemple le cas d'un système pour lequel H est une constante du mouvement, disons a, et que q_1 est une coordonnée cyclique. Donc

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0,$$

ce qui implique : $p_1 = b =$ constante. L'équation d'Hamilton-Jacobi s'écrit dans ce cas sous la forme

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_2, ..., q_n, b\right) = a. \tag{3.19}$$

Afin d'utiliser la méthode de séparation des variables, on pose

$$S = S_1(q_1, a) + S'(q_2, ..., q_n, a).$$

Dès lors,

$$H\left(\frac{\partial S'}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S'}{\partial q_n}, q_2, ..., q_n, b\right) = a,$$

et comme

$$p_1 = b = \frac{\partial S_1}{\partial q_1},$$

alors

$$S_1 = bq_1,$$

à une constante près. Donc b est la constante de séparation et on obtient

$$S = bq_1 + S'(q_2, ..., q_n, a).$$

Celle-ci ressemble à l'équation (3.18) obtenue dans le cas ou l'hamiltonien H ne dépend pas explicitement de t. Celà est dû au fait que puisque $H = a$ alors

t peut-être assimilée à une coordonnée cyclique. On obtient donc des résultats similaires à ceux obtenus précédemment.

Supposons maintenant que q_1 n'est pas cyclique mais que toutes les autres coordonnées $q_2, ..., q_n$ sont cycliques. Dans ce cas, on a

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 2, ..., n$$

d'où

$$p_i = b_i, \quad i = 2, ..., n$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi, s'écrit

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1, b_2, ..., b_n, b\right) = a,$$

et on procède comme précédemment. On considère

$$S = S_1(q_1, a) + S_2(q_2, a) + \cdots + S_n(q_n, a).$$

Puisque

$$p_i = b_i = \frac{\partial S_i}{\partial q_i}, \quad i = 2, ..., n$$

alors

$$S_i = b_i q_i \quad i = 2, ..., n$$

et donc

$$S = S_1' q_1, a) + \sum_{i=2}^{n} b_i q_i,$$

avec $H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1, b_2, ..., b_n, b\right) = a$. Cette dernière équation différentielle ordinaire en q_1 peut être résolue par quadratures, on obtient aisément sa solution S_1 et par conséquent la solution complète S.

Lorsqu'une coordonnée q_i et la dérivée $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ peuvent être regroupées en une combinaison de la forme $\varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i\right)$, alors q_i est séparable. Autrement dit, une coordonnée q_i est séparable si elle figure avec l'impulsion p_i dans l'hamiltonien sous forme d'une fonction $\varphi(p_i, q_i)$. Dans ce cas, on cherche les solutions de l'équation sous la forme

$$S = S_i(q_i, b) + S'(q_j, b),$$

où $j = 1, ..., n$, $j \neq i$. L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$H\left(\frac{\partial S'}{\partial q_j}, q_j, \varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i\right)\right) = a.$$

Cette équation se résout facilement pour φ,

$$\varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i\right) = \psi\left(\frac{\partial S'}{\partial q_j}, q_j, a\right).$$

En utilisant la méthode de séparation de variables, on pose

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i\right) &= \text{constante},\\ \psi\left(\frac{\partial S'}{\partial q_j}, q_j, a\right) &= \text{constante}.\end{aligned}$$

Dans la première équation, la séparation de la variable q_i a été effectuée. En outre, si dans la seconde équation une variable est séparable, on peut dans ce cas répéter la procédure ci-dessus et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les variables soient séparées. Lorsque ceci est possible (i.e., toutes les variables sont séparables), alors l'équation d'Hamilton-Jacobi est complètement séparable et le système hamiltonien correspondant s'intégre par quadratures.

Nous allons appliquer ces méthodes à la résolution de deux exemples simples.

Exemple 24 *Considérons l'oscillateur harmonique défini par le hamiltonien*

$$H \equiv H(p,q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi correspondante s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = 0.$$

Comme H ne dépend pas explicitement de t, on peut conclure à la séparabilité de t dans cette équation et donc chercher une solution sous la forme

$$S = S_1(q) + S_2(t). \tag{3.20}$$

L'équation ci-dessus se réduit à

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = -\left(\frac{dS_2}{dt}\right).$$

D'après la méthode de séparation des variables, chacun de ces termes doit être constant. Soit c cette constante. Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 &= c,\\ \frac{dS_2}{dt} &= -c,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{2m}\int\sqrt{c-\frac{1}{2}m\omega^2q^2}dq, \\ S_2 &= -ct, \end{aligned}$$

à une constante près. En substituant ces expressions dans (3.20), on obtient

$$S = \sqrt{2m}\int\sqrt{c-\frac{1}{2}m\omega^2q^2}dq - ct = S(q,c,t).$$

D'après ce qui précède, on identifie la constante c avec la nouvelle quantité de mouvement P et puisque Q est une constante, on nomme cette dernière a. Dès lors,

$$a = Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial c},$$

i.e.,

$$a = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dq}{\sqrt{c-\frac{1}{2}m\omega^2q^2}} - t,$$

d'où l'on tire l'expression de q en termes constantes d'intégration c et a,

$$q = \sqrt{\frac{2c}{m\omega^2}}\sin\omega(t+a).$$

Pour l'impulsion p, on a

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S_1}{\partial q}, \\ &= \sqrt{2m}\sqrt{c-\frac{1}{2}m\omega^2q^2}, \\ &= \sqrt{2mc}\cos\omega(t+a). \end{aligned}$$

La constante c s'identifie à l'énergie totale du système. Notons que l'on peut déterminer les constantes c et a à partir des conditions initiales. Plus précisément, en désignant par p_0 et q_0 les valeurs de p et q en $t = 0$, on obtient

$$c = \frac{1}{2m}p_0^2 + \frac{m\omega^2}{2}q_0,$$

et

$$a = \frac{1}{\omega}arctg\ m\omega\frac{q_0}{p_0}.$$

Exemple 25 *Considérons le problème de Kepler sur le mouvement d'un point matériel de masse m, mobile dans un plan fixe et attiré par une force (dite newtonienne) vers l'origine (un centre fixe). Cette force est proportionnelle à l'inverse du carré de sa distance à l'origine. Le point matériel est repéré par des coordonnées polaires (r, θ) de pôle l'origine. Ce point matériel étant dans un champ central de potentiel $-\frac{k}{r}$ où k est un nombre strictement supérieur à 0, alors l'hamiltonien est ici défini par*

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}.$$

Les équations canoniques du mouvement sont

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2}, \\ \dot{p}_\theta &= \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que p_θ est constant. Ici aussi H ne dépend pas explicitement de t et puisque

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta},$$

alors l'équation d'Hamilton-Jacobi correspondante s'écrit

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{k}{r} = 0.$$

La coordonnée θ étant cyclique, on cherche une solution sous la forme

$$S = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(t). \tag{3.21}$$

L'équation ci-dessus devient

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{k}{r} = -\frac{dS_3}{dt}.$$

On utilise la méthode de séparation des variables,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{k}{r} &= c, \\ \frac{dS_3}{dt} &= -c, \end{aligned}$$

où c est une constante. D'où

$$\begin{aligned} \left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 &= -r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + 2mkr + 2mcr^2, \qquad (3.22) \\ S_3 &= -ct, \end{aligned}$$

à une constante près. Dans l'équation (3.22), on note que le terme de gauche est indépendant de r *et ne dépend que de* θ*. Quand au terme de droite, il ne dépend que de* r*. On applique donc à nouveau la méthode de séparation des variables :*

$$\begin{aligned} \frac{dS_2}{d\theta} &= a, \\ r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 - 2mkr - 2mcr^2 &= -a^2, \end{aligned}$$

où a *est une constante. D'où*

$$\begin{aligned} S_2 &= a\theta, \\ S_1 &= \int \sqrt{-\frac{a^2}{r^2} + 2\frac{mk}{r} + 2mc}dr, \end{aligned}$$

en ne considérant que la racine positive. En insérant les expressions de S_1*,* S_2 *et* S_3 *dans (3.21), on obtient*

$$S = \int \sqrt{-\frac{a^2}{r^2} + 2\frac{mk}{r} + 2mc}dr + a\theta - ct.$$

La suite consiste à identifier les constantes a *et* c *avec les nouvelles quantités de mouvement* P_r *et* P_θ *respectivement. On désigne les constantes* Q_r *et* Q_θ *par* b_1 *et* b_2 *respectivement. Dès lors,*

$$\begin{aligned} b_1 &= Q_r = \frac{\partial S}{\partial P_r} = \frac{\partial S}{\partial a}, \\ b_2 &= Q_\theta = \frac{\partial S}{\partial P_\theta} = \frac{\partial S}{\partial c}. \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} a\int \frac{dr}{r^2\sqrt{-\frac{a^2}{r^2} + 2\frac{mk}{r} + 2mc}} &= \theta - b_1, \\ m\int \frac{dr}{\sqrt{-\frac{a^2}{r^2} + 2\frac{mk}{r} + 2mc}} &= t + b_2. \end{aligned}$$

L'intégration de ces équations ne pose aucun problème ; la première fournit l'équation de l'orbite (il suffit d'effectuer le changement de variable $r = \frac{1}{u}$*) et la seconde équation détermine* r *en fonction de* t*. Les constantes* a *et* c *s'identifient respectivement au moment cinétique et à l'énergie totale. L'orbite est une ellipse si* $c = 0$*, une parabole si* $c > 0$ *et une hyperbole si* $c < 0$*.*

Références

[1] Arnold, V.I. : Ordinary differential equations. 3Ed., Springer-Textbook, 1992.

[2] Arnold, V.I., : Mathematical methods in classical mechanics. 2Ed., Springer-Verlag, 1989.

[3] Lesfari, A. : Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences, *Elemente der Mathematik*, Birkhäuser, Vol. 58, No 1, pp. 6-20 (2003).