Le théorème de Sard

A. Lesfari
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^m$ est dit de mesure nulle si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement dénombrable de cubes tels que leur volume total soit inférieur à ε. Dans ce cas, on dit que le complémentaire $\mathbb{R}^m \backslash A$ est un ensemble dense dans $\mathbb{R}^m$. De même, pour une variété M de dimension m, un ensemble $B \subset M$ est dit de mesure nulle dans M si pour toute carte $(\mathcal{U}, \psi)$ de M, l'image $\psi(A \cap B)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^m$.

Soient M, N deux variétés différentiables et $\varphi : M \longrightarrow N$ une application lisse. Un point $x \in M$ est dit critique de φ si la différentielle

$$d\varphi_x : T_x \longrightarrow T_{\varphi(x)},$$

a un rang strictement inférieur à $\dim M$, autrement dit si φ n'est pas une submersion au point x. Si $C \subset M$ est l'ensemble des points critiques (ou lieu critique) de φ, alors on dira que $\varphi(C)$ est l'ensemble des valeurs critiques de φ et $N \backslash \varphi(C)$ n'est autre que l'ensemble des valeurs régulières de φ. Notons que pour $\dim M < \dim N$, tout point de la variété M est un point critique de φ et dans ce cas les valeurs critiques sont les points de l'ensemble $\varphi(M)$. Nous allons étudier le théorème (ou lemme comme on l'appelle parfois) de Sard qui sera utilisé dans proposition 11.2.1. Il permet d'avoir des informations utiles sur l'ensemble $\varphi(C)$ des valeurs critiques. Nous verrons que celui-ci est négligeable même dans le cas où l'ensemble C des points critiques n'est pas négligeable ou même considérable.

Théorème 1 *Soient $\varphi : M \longrightarrow N$ une application lisse et C l'ensemble de ses points critiques. Alors l'ensemble des valeurs critiques $\varphi(C)$ de φ est de mesure nulle dans N. En outre, l'ensemble des valeurs régulières $N \backslash \varphi(C)$ est dense dans N.*

Démonstration : Soit $(\mathcal{U}_j, \psi_j)$ une suite de cartes de M telle que les ouverts $\mathcal{U}_j$ forment un recouvrement de M et pour tout j, $\varphi(\mathcal{U}_j)$ soit contenu dans une carte de N. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que pour tout j, l'ensemble $\varphi(C \cap \mathcal{U}_j)$ est de mesure nulle. Il suffit évidemment de prouver le résultat au cas où $M = \mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $N = \mathbb{R}^n$. La preuve va se faire par récurrence sur m. Pour $m = 0$, le résultat est évident car il y a au plus un point dans l'ensemble des points critiques $C \equiv C_0$ de φ. En posant

$$C_k = \left\{ x \in \mathcal{U} : \frac{\partial^\alpha \varphi(x)}{\partial x^\alpha} = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ tel que } |\alpha| \leq k \right\}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

on obtient une suite décroissante de fermés

$$C \equiv C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_k \supset C_{k+1} \supset \cdots$$

et on note que $\varphi(C_k \backslash C_{k+1})$ est mesurable.
(i) Montrons que $\varphi(C_0 \backslash C_1)$ est de mesure nulle. En effet, soient $\xi \in C_0 \backslash C_1$ et $\varphi_1, ..., \varphi_n$ les fonctions coordonnées de φ. Comme $\xi \notin C_1$, alors parmi les dérivées partielles d'ordre 1 de φ, il existe une qui est non nulle en ξ. On peut moyannant un changement de coordonnées supposer que c'est $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\xi)$. Le rang de l'application

$$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x_1, ..., x_m) \longmapsto (\varphi_1(x_1, ..., x_m), x_2, ..., x_m),$$

est égal à m au point ξ. D'après le théorème d'inversion local, il existe donc un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de ξ dans $\mathcal{U}$ tel que f induise un difféomorphisme de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{W} \equiv f(\mathcal{V})$ de $f(\xi)$ dans $\mathbb{R}^m$. L'ensemble $C_0 \backslash C_1$ peut être recouvert par une famille dénombrable d'ensembles $\mathcal{V}$. En remplaçant φ par l'application composée

$$g \equiv \varphi \circ f^{-1} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

et $\mathcal{U}$ par $\mathcal{W}$, l'application g envoie $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{R}^n$. En outre, les valeurs critiques de g sont les mêmes que celles de la restriction de φ à $\mathcal{V}$. Autrement dit, l'ensemble des points critiques C' de g coincide avec $f(\mathcal{V} \cap C)$ et donc $g(C') = \varphi(\mathcal{V} \cap C)$ est l'ensemble des valeurs critiques de g. Dès lors, si $pr\mathbb{R}^k$ désigne la projection canonique de $\mathbb{R}^k$ sur sa première composante, on peut supposer que $pr\mathbb{R}^n.\varphi = pr\mathbb{R}^m$. Autrement dit, chaque point $(t, x_2, ..., x_m) \in \mathcal{W}$ est envoyé par l'application g vers le point $g(t, x_2, ..., x_m)$ de l'hyperplan $t \times \mathbb{R}^{n-1}$. Pour tout t, les dérivées partielles de l'application partielle

$$g^t : \left(t \times \mathbb{R}^{m-1}\right) \cap \mathcal{W} \longrightarrow t \times \mathbb{R}^{n-1},$$

induite par g vérifient

$$\det \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = \det \left(\frac{\partial (g^t)_i}{\partial x_j} \right),$$

où
$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \star & \frac{\partial g_i^t}{\partial x_j} \end{array}\right),$$
est la matrice jacobienne g. Donc un point appartenant à $t \times \mathbb{R}^{m-1}$ est critique pour g^t si et seulement si il est un point critique de g. En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'application g^t, on en déduit que l'ensemble de ses valeurs critiques sont de mesure nulle dans $t \times \mathbb{R}^{n-1}$. Dès lors, l'intersection $g(C') \cap (t \times \mathbb{R}^{n-1})$ est un ensemble de mesure nulle pour tout $t \in \mathbb{R}$ et d'après le théorème de Fubini, l'ensemble des valeurs critiques $g(C')$ est aussi de mesure nulle.
(ii) Supposons maintenant que $k \geq 1$ et montrons que $\varphi(C_k \backslash C_{k+1})$ est de mesure nulle. En effet, soit $\xi \in C_k \backslash C_{k+1}$. Dès lors, il existe une dérivée partielle v d'ordre j de φ qui est non nulle au point ξ et que l'une de ses dérivées premières n'est pas nulle :
$$v(\xi) = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_j}(\xi) \neq 0.$$
Par un changement de coordonnées, on peut supposer que $j = 1$. L'application définie par
$$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x_1, ..., x_m) \longleftrightarrow (v(x_1, ..., x_m), x_2, ..., x_m),$$
est de rang m au point ξ. D'après le théorème d'inversion local, f est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de ξ dans $\mathcal{U}$ sur un voisinage $\mathcal{W}$ de $(0, \xi_2, ..., \xi_m)$ dans $\mathbb{R}^m$. L'image $f(C_k \cap \mathcal{V})$ par f est contenu dans l'hyperplan $v(\xi) = 0$. Dès lors, l'application f envoie $C_k \cap \mathcal{V}$ dans $0 \times \mathbb{R}^{m-1}$. Considérons comme précédemment l'application
$$g \equiv \varphi \circ f^{-1} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$
et sa restriction
$$g_r : \left(0 \times \mathbb{R}^{m-1}\right) \cap \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$
L'hypothèse de récurrence entraîne que l'ensemble des valeurs critiques de g_r est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$. Les points critiques de l'application g sont les mêmes que ceux de la restriction g_r ; tout point de l'ensemble $f(C_k \cap \mathcal{V})$ est un point critique de g_r puisque toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à k s'annulent en ces points et en particulier le rang de φ est inférieur à n. Dès lors, l'ensemble $g_r \circ f(C_k \cap \mathcal{V})$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$ et cet ensemble n'est autre que $\varphi(C_k \cap \mathcal{V})$. Comme l'ensemble $C_k \backslash C_{k+1}$ peut être recouvert par une famille dénombrable de voisinages $\mathcal{V}$, on en déduit que $\varphi(C_k \backslash C_{k+1})$ est de mesure nulle.

(iii) On montre enfin que l'ensemble $\varphi(C_k)$ est de mesure nulle pour k suffisamment grand ; $k > \frac{m}{n} - 1$. En effet, soit K un cube de longueur d'arête d dans $\mathcal{U}$. Il résulte de la formule de Taylor et de la définition de C_k que

$$\varphi(\xi + h) = \varphi(\xi) + R(\xi, h),$$

où

$$\|R(\xi, h)\| \leq \alpha \|h\|^{k+1}, \quad (\alpha = \text{constante})$$

pour tout $\xi \in C_k \cap K$ et tout point $\xi + h \in K$. Divisons chaque arête du cube K en l sous-intervalles de longueur $\frac{d}{l}$. On obtient ainsi une partition de K en l^m cubes, chacun d'arête $\frac{d}{l}$ et de volume $\frac{d^m}{l^m}$. Désignons par K_1 l'un de ces cubes qui contient le point $\xi \in C_k$. Pour tout point $\xi + h \in K_1$, on a $\|h\| \leq \sqrt{m}\frac{d}{l}$. Dès lors, l'ensemble $\varphi(K_1)$ est contenu dans un cube d'arête $\frac{\beta}{l^{k+1}}$ où $\beta \equiv 2\alpha(\sqrt{m}d)^{k+1}$ et de centre $\varphi(\xi)$ dans $\mathbb{R}^n$. L'ensemble $\varphi(C_k \cap K)$ est donc contenu dans la réunion des l^m cubes dont le volume total V satisfait à

$$V \leq l^m \left(\frac{\beta}{l^{k+1}} \right)^n = \beta^n l^{m-n(k+1)}.$$

Par hypothèse, on a $k + 1 > \frac{m}{n}$, donc pour $d \to \infty$, le volume V tend vers 0, d'ou le résultat.
Passons maintenant à la preuve que l'ensemble des valeurs régulières $N \backslash \varphi(C)$ est dense dans N. En effet, raisonnons par l'absurde en supposant que l'ensemble $N \backslash \varphi(C)$ n'est pas dense dans N. Dans ce cas, on peut trouver un ouvert $\emptyset \neq \Omega \subset N$ dont tous les éléments sont des valeurs critiques. Par hypothèse, la variété N est lisse, donc Ω est difféomorphe à un ouvert Δ de $\mathbb{R}^p$. Comme Δ n'est pas de mesure nulle, l'ouvert Ω est aussi de mesure non nulle ce qui est en contradiction avec le fait que l'ensemble des valeurs critiques de φ est de mesure nulle. Ce qui achève la preuve du théorème. □

Exemple 1 *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

est lisse. L'ensemble des points critiques de φ est $]-\infty, 0]$ tandis que l'ensemble des valeurs critiques de φ n'est autre que $\{0\}$.