Introduction aux équations aux dérivées partielles (EDP)

(*Master Maths*)

2014-2015

A. Lesfari

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr
Site Web : http://lesfari.com

Le programme porte sur les notions suivantes : Équations elliptiques : Solutions généralisées des problèmes aux limites, Problèmes de valeurs propres, Régularité des solutions généralisées, Solutions classiques, Solutions classiques des équations de Laplace et de Poisson. Équations hyperboliques : Propriétés des solutions de l'équation des ondes, Problème de Cauchy pour l'équation des ondes, Problèmes mixtes, Solutions généralisées du problème de Cauchy. Équations paraboliques : Propriétés des solutions de l'équation de la chaleur, Problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur, Problèmes mixtes.

Table des matières

Chapitre 1

Généralités et notations

Une équation dans laquelle figure une fonction f de plusieurs variables indépendantes $x_1, ..., x_n$ et des dérivées partielles de f par rapport à ces variables, c-à-d., une équation de la forme

$$F\left(x_1, ..., x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^m f}{\partial x_n^m}\right) = 0,$$

est une équation aux dérivées partielles.

Note : dans la suite, on utilisera indifféremment à la place de f, les notations u ou z.

Une telle équation est dite d'ordre m quand elle contient au moins une dérivée d'ordre m sans en contenir d'autres d'ordre supérieur. Toute fonction $u = f(x_1, ..., x_n)$ qui satisfait identiquement à cette équation est une solution de celle-ci. L'équation ci-dessus est dite linéaire lorsque F est une combinaison linéaire de f et ses dérivées.

Exemple 1 *L'équation*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

est du 1^{er} *ordre, non linéaire.*

Exemple 2 *L'équation*

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x + y + u,$$

est du 1^{er} *ordre, linéaire non homogène.*

Exemple 3 *L'équation de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

est du $2^{ème}$ *ordre, linéaire et homogène.*

Exemple 4 *L'équation de Poisson*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=g(x,y,z),$$

est du $2^{\text{ème}}$ *ordre, linéaire non homogène.*

On appelle problème aux limites, une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière ou bord du domaine sur lequel elle est posée. Le problème est bien posé si pour toute donnée ($2^{\text{ème}}$ membre, domaine, données au bord, etc.), il admet une solution unique et si cette solution dépend continûment de la donnée.

Un système d'équations aux dérivées partielles est dit normal par rapport à l'une des n variables indépendantes $x_1,...,x_n$ dont dépendent les m inconnues $u_1,...,u_m$ du sytème, quand il peut être mis sous la forme d'un système de m équations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{s_1}u_1}{\partial x_l^{s_1}} &= \Phi_1\left(x_1,...,x_n,u_1,...,u_m,...,\frac{\partial^j u_i}{\partial x_l^{k_1}...\partial x_,^{k_n}},...\right),\\ &\vdots\\ \frac{\partial^{s_m}u_m}{\partial x_l^{s_m}} &= \Phi_m\left(x_1,...,x_n,u_1,...,u_m,...,\frac{\partial^j u_i}{\partial x_l^{k_1}...\partial x_,^{k_n}},...\right),\end{aligned}$$

ou sous forme condensée

$$\frac{\partial^{s_\nu}u_\nu}{\partial x_l^{s_\nu}}=\Phi_\nu\left(x_1,...,x_n,u_1,...,u_m,...,\frac{\partial^j u_i}{\partial x_l^{k_1}...\partial x_,^{k_n}},...\right),\quad \nu=1,2,...,m$$

Ici x_l désigne la variable indépendante concernée, Φ_ν étant une fonction analytique des $x_1,...,x_n,u_1,...,u_m$ ainsi que les dérivées $\frac{\partial^j u_i}{\partial x_l^{k_1}...\partial x_,^{k_n}}$. De plus, toute dérivée figurant dans Φ_ν satisfait à la condition : $j=k_1+\cdots+k_n\leq s_i$ et $k_l<s_i$.

Exemple 5 *Le système*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= u\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\end{aligned}$$

est normal par rapport à la variable x. Ce système peut s'écrire aussi sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u\frac{\partial v}{\partial y},\end{aligned}$$

et il est donc également normal par rapport à la variable y.

Exemple 6 *Le système*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y},
\end{aligned}$$

est normal par rapport à la variable x. Contrairement à l'exemple précédent, le système ici n'est pas normal par rapport à la variable y.

Rappel (*Fonction analytique de plusieurs variables*) : une fonction de n variables $f(x_1, ..., x_n)$ est analytique dans un domaine D si pour tout point $(a_1, ..., a_n) \in D$, elle est dans un voisinage de celui-ci, représentable par une série entière

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum_{\substack{\nu_j = 0 \\ 1 \leq j \leq n}} c_{\nu_1, ..., \nu_n} (x_1 - a_1)^{\nu_1} ... (x_n - a_n)^{\nu_n}.$$

Lorsque cette série converge pour $|x_j - a_j| = \xi_j > 0$, $1 \leq j \leq n$, on est assuré de sa convergence absolue et uniforme dans tout pavé

$$|x_j - a_j| \leq n_j < \xi_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

Dans ce pavé, la dérivation terme à terme est justifiée :

$$\frac{\partial^{k_1 + \cdots k_n} f}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} (a_1, ..., a_n) = k_1! ... k_n! c_{k_1, ..., k_n}.$$

Soit le système de m équations

$$\frac{\partial^{s_j} u_j}{\partial x^{s_j}} = \Phi_j \left(x, y_1, ..., y_n, u_1, ..., u_n, ..., \frac{\partial^k u_i}{\partial x^{k_0} \partial y_1^{k_1} ... \partial y_n^{k_n}} \right), \quad 1 \leq j \leq m$$

relatif à m fonctions $u_1, ..., u_m$ de $n+1$ variables $x, y_1, ..., y_n$, normal par rapport à la variable x. Le problème de Cauchy consiste à déterminer une solution satisfaisant aux conditions aux frontières :

$$\begin{aligned}
u_j(a, y_1, ..., y_n) &= g_{j,0}(y_1, ..., y_n), \\
\frac{\partial u_j}{\partial x}(a, y_1, ..., y_n) &= g_{j,1}(y_1, ..., y_n), \\
&\vdots \\
\frac{\partial^{s_j - 1} u_j}{\partial x^{s_j - 1}}(a, y_1, ..., y_n) &= g_{j,s_j - 1}(y_1, ..., y_n),
\end{aligned}$$

lesquelles sont relatives au plan $x = a$.

Théorème 7 *(Cauchy-Kowalewski). Si les m fonctions $\Phi_1, ..., \Phi_m$ et les $s_1 + \cdots + s_m$ fonctions $g_{j,k}$ sont des fonctions analytiques de leurs arguments, le problème de Cauchy possède une solution analytique. Cette solution est unique.*

L'idée de la démonstration consiste à développer les solutions sous forme de séries entières. Ce théorème d'existence et d'unicité se trouvera établi dès que nous aurons vérifié que ces séries sont convergentes ; on utilise à cette fin la méthode des fonctions majorantes.

Afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy, on se trouve conduit à imposer aux conditions aux frontières certaines conditions : analycité ou dérivabilité jusqu'à un ordre suffisamment élevé. Or, en pratique, il y parfois lieu d'envisager divers types de discontinuités pour ces conditions. La notionde solution généralisée, introduite par le mathématicien russe Sobolev, a pour but de tenir compte de telles éventualités. Cette notion sera précisée plus loi lors de l'étude de la formulation variationnelle des EDP. On se contente ici de rappeler que $u(x_1, ..., x_n)$ est dite solution généralisée d'une équation aux dérivées partielles quand elle est la limite d'une suite uniformément convergente $(u_j(x_1, ..., x_n))$ de solutions de cette équation. On devra donc donc avoir dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{j\to\infty} \left(\sup_{p\in\Omega} |u_j(p) - u(p)| \right) = 0.$$

On peut aussi avoir avantage dans certains cas à substituer à la condition de convergence uniforme impoée à la suite des solutions u_j, la condition mois stricte de convergence en moyenne quadratique,

$$\lim_{j\to\infty} \int\int ... \int |u_j - u|^2 dx_1 dx_2 ... dx_n = 0.$$

Cette notion se généralise aisément à un système d'équations aux dérivées partielles. De plus amples informations sur les solutions généralisées seront données plus loin.

Exemple 8 *Soit à résoudre le problème de Cauchy constitué par l'équation du 1^{er} ordre :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

et la condition

$$u(0, y) = \varphi(y),$$

où φ est supposé continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. On a la solution évidente

$$u(x, y) = \varphi(x + y), \quad a \leq x + y \leq b$$

Mais si φ n'est pas dérivable pour $a \leq x+y \leq b$, tout en étant continu, on peut trouver une suite de fonctions $(\varphi_j(x))$, qui converge uniformément vers $\varphi(x)$ pour $a \leq x+y \leq b$, chaque fonction φ_j de la suite étant dérivable sur ce même intervalle. La limite $\varphi(x)$ de la suite fournit la solution généralisée $\varphi(x+y)$.

Exemple 9 *Si dans l'équation (des cordes vibrantes) :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

le problème de Cauchy fait intervenir les conditions aux frontières

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \begin{cases} mx & si\ x \in [0, \frac{1}{2}] \\ m(1-x) & si\ x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,y) &= u(1,y) = 0, \quad y > 0 \end{aligned}$$

la condition $u(x,0) = \varphi(x)$ correspond à une fonction qui n'est pas dérivable en $x = \frac{1}{2}$. Cependant, la solution (voir plus loin, chap. 3)

$$u(x,y) = \frac{\varphi(x-y) + \varphi(x+y)}{2},$$

pourra être considérée ici comme une solution généralisée (dès qu'on est assuré que la suite $(\varphi_j(x))$ convergeant uniformément vers $\varphi(x) = u(x,0)$ engendre une suite de solutions $u_j(x,y)$ convergeant uniformément vesr la solution formelle).

Chapitre 2

Équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre

Définition 10 *Une équation dans laquelle figure une fonction f de plusieurs variables indépendantes $x_1, ..., x_n$ et des dérivées partielles du 1^{er} ordre de f par rapport à ces variables, c'est-à-dire une équation de la forme*

$$F\left(x_1, ..., x_n, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = 0,$$

est dite une équation aux dérivées partielles (en abrégé : EDP) du 1^{er} ordre. Toute fonction $f(x_1, ..., x_n)$ qui satisfait identiquement à cette équation est une solution de celle-ci.

Dans la suite, on utilisera souvent à la place de f les notations u ou z.

Dans le cas de deux variables x, y, on a

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Exemple 11

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Longleftrightarrow f(x, y) = \varphi(y).$$

Exemple 12

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow f(x, y) = \varphi(x).$$

Exemple 13

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x).$$

Si g est intégrable et G est l'une de ses primitives, alors $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) - G(x)) = 0$, d'où $f(x, y) = G(x) + \varphi(y)$.

Remarque 14 *La solution générale d'une équation aux dérivées partielles du 1^{er} ordre dépend d'une fonction arbitraire.*

Soit le système différentiel

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= \varphi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\ &\vdots\\ \frac{dy_n}{dx} &= \varphi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n),\end{aligned}$$

de solution générale

$$y_1 = f_1(x, c_1, c_2, ..., c_n), ..., y_n = f_n(x, c_1, c_2, ..., c_n).$$

Si ces équations peuvent être résolues par rapport à $c_1, c_2, ..., c_n$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) &= c_1,\\ &\vdots\\ \Phi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) &= c_n.\end{aligned}$$

Définition 15 *Les fonctions $\Phi_1, ..., \Phi_n$, constantes si l'on remplace $y_1, ..., y_n$, par les solutions du système sont dites intégrales premières du système. En général, on appelle intégrale première d'un système différentiel toute fonction de $x, y_1, ..., y_n$ qui se réduit à une constante si l'on remplace $y_1, ..., y_n$ par une solution du système. Si Φ est une telle intégrale première, on a donc*

$$\Phi(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) = constante.$$

Exercice 2.1 *Déterminer deux intégrales premières du système*

$$\frac{dy_1}{dx} = y_3 - y_2, \qquad \frac{dy_2}{dx} = y_1 - y_3, \qquad \frac{dy_3}{dx} = y_2 - y_1.$$

Réponse : $\Phi_1 = y_1 + y_2 + y_3$, $\Phi_2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

Définition 16 *Si le système différentiel*

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= \varphi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n),\\ &\vdots\\ \frac{dy_n}{dx} &= \varphi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n),\end{aligned}$$

admet n intégrales premières indépendantes, alors la solution générale est définie implicitement en égalant ces intégrales premières à n constantes arbitraires.

Soit le système différentiel

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f_1(x,y,z),\\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x,y,z).\end{aligned}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction Φ soit une intégrale première de ce système est

$$\Phi(x,y(x),z(x)) = \text{constante},$$

donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}.\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}.\frac{dz}{dx} = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}.f_1(x,y,z) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}.f_2(x,y,z) = 0,$$

c'est l'équation aux dérivées partielles associée au système différentiel. Par conséquent, on a

Proposition 17 *Une fonction $\Phi(x,y,z)$ est une intégrale première d'un système différentiel si et seulement si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles associée.*

Définition 18 *Soit f une fonction de deux variables. Une équation aux dérivées partielles linéaire du 1^{er} ordre est une relation de la forme*

$$P(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y} = R(x,y,z),$$

où P, Q, R sont des fonctions de x, y, z définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Soit $z = f(x,y)$ une solution de l'équation précédente. Posons

$$\Phi(x,y,z) = f(x,y) - z.$$

On a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -1.$$

L'équation précédente s'écrit

$$P(x,y,z)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial \Phi}{\partial y} + R(x,y,z)\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)}\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles peut être considérée d'après ce qui précéde, comme associée au système différentiel

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)},\\ \frac{dz}{dx} &= \frac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)},\end{aligned}$$

ou sous forme plus symétrique

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Ce système est appelé système caractéristique de l'équation aux dérivées partielles. Dès lors, on a

Proposition 19 *Les solutions de l'équation aux dérivées partielles :*

$$P(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial f}{\partial y} = R(x,y,z),$$

sont définies par

$$\Phi(x,y,z) = 0,$$

où Φ *représente l'intégrale première la plus générale du système caractéristique :*

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Remarque 20 *Comme* Φ *s'exprime au moyen de deux intégrales premières indépendantes* Φ_1 *et* Φ_2*, donc l'intégration de l'équation aux dérivées partielles se trouve ramenée à la recherche de deux intégrales premières de son système caractéristique.*

Exercice 2.2 *Soit* $z = f(x,y)$*. Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = z.$$

Réponse : La solution générale de l'équation en question est

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0,$$

ou

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

où φ est une fonction arbitraire.

Exercice 2.3 *Trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

<u>*Réponse*</u> : L'intégrale générale est de la forme

$$\Phi(x^2 + y^2, z) = 0,$$

d'où

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

où φ est une fonction arbitraire.

Exercice 2.4 *Soit $z = f(x, y)$. Déterminer la solution générale de l'équation*

$$y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = z.$$

<u>*Réponse*</u> : La solution générale est donc

$$z = (x + y)\varphi(x^2 - y^2),$$

où φ est une fonction arbitraire.

Exercice 2.5 *Intégrer*

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

<u>*Réponse*</u> : La solution générale s'écrit

$$\Phi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}, z\right) = 0,$$

d'où

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right),$$

où φ est une fonction arbitraire.

Exercice 2.6 *Déterminer la solution générale $u = f(x, y, z)$ de l'équation*

$$yz\frac{\partial f}{\partial x} + xz\frac{\partial f}{\partial y} - xy\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

<u>*Réponse*</u> : $u = \Phi(x^2 - y^2, y^2 + z^2)$.

Exercice 2.7 *Soit $z = f(x, y)$. Déterminer la surface vérifiant l'équation*

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy,$$

et passant par la circonférence : $x^2 + y^2 = 16$, $z = 3$.

Réponse : $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, la surface cherchée est une sphère de centre 0 et de rayon 5.

Exercice 2.8 *Déterminer la surface générale de l'équation*

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = -xy,$$

et la surface intégrale passant par la courbe : $y = x^2$, $z = x^3$.

Réponse : On trouve l'équation $\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)^6 = xy + z^2$.

Exercice 2.9 *Déterminer la surface vérifiant l'équation*

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 4,$$

et passant par la parabole : $y^2 = z$, $x = 0$.

Réponse : On obtient l'équation : $z = x^2 + y^2$ (paraboloïde de révolution).

Exercice 2.10 *Résoudre l'équation aux dérivées partielles*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = xy^2,$$

sur l'ouvert $\Omega =]0, +\infty[\times] - \infty, +\infty[\subset \mathbb{R}^2$, en utilisant le changement de variable : $u = x$, $v = xy$.

Réponse : La solution de l'équation proposée est $f(x, y) = -xy^2 + \varphi(xy)$.

Exercice 2.11 *Résoudre l'équation aux dérivées partielles*

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = x,$$

à l'aide des coordonnées polaires.

Réponse : La solution de l'équation en question est $f(x, y) = y + \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

Exercice 2.12 *On se propose dans cet exercice de déterminer les surfaces telles que si A est la projection sur le plan $x0y$ d'un point p appartenant à l'une d'elles et B l'intersection de la normale en p avec $x0y$, alors l'aire du triangle OAB reste constante.*

Réponse : L'équation générale des surfaces en coordonnées cylindriques : (r, θ, z), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x}$, est

$$\frac{1}{2C} z^2 = \theta + \varphi(r).$$

Exercice 2.13 *Soit $z = f(x, y)$. Déterminer la solution générale de l'équation*

$$xy\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (x - y)z.$$

Réponse : La solution générale est $z = \frac{\varphi(x+y)}{xy}$, où φ est une fonction arbitraire.

Exercice 2.14 *Même question pour l'équation*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{z^2}{x}.$$

Réponse : La solution générale est $z = \frac{x\varphi(xy)}{x+\varphi(xy)}$, où φ est une fonction arbitraire.

Exercice 2.15 *Déterminer la surface intégrale de l'équation*

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + 1,$$

passant par l'hélice circulaire : $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$.

Réponse : L'équation la surface intégrale dans un système de coordonnées cylindriques : (r, θ, z), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan \frac{y}{x} = t$, est $z = \frac{\theta + \tan(\ln r)}{1 - \theta \tan(\ln r)}$.

Exercice 2.16 *Déterminer la surface intégrale de l'équation*

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = (x + y)z^2,$$

passant par la courbe : $x = t$, $y = -t^2$, $z = t^3$.

Réponse : Les équations paramétriques de la surface intégrale passant par la courbe en question sont :

$$x = \frac{t}{2}((1 - t)e^s + (1 + t)e^{-s}), \qquad y = \frac{t}{2}((1 - t)e^s - (1 + t)e^{-s}),$$

$$z = \frac{t^3}{1 + (t^4 - t^5)(1 - e^s)}.$$

Exercice 2.17 *Déterminer la solution de l'équation*

$$xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+x^2y\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2+y^2)z,$$

passant par la droite : $x=2y,\ z=1$.

<u>*Réponse*</u> : On obtient la solution $z=\frac{3xy}{2(x^2-y^2)}$.

On utilise les mêmes méthodes pour étudier une équation de la forme

$$a_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=b,$$

où $a_1,...,a_n,b$ sont fonctions de $x_1,...,x_n,z$. Le système caractéristique est

$$\frac{dx_1}{a_1}=\cdots=\frac{dx_n}{a_n}=\frac{dz}{b}.$$

On détermine n intégrales premières indépendantes :

$$\varphi_1(x_1,...,x_n,z)=c_1,...,\varphi_n(x_1,...,x_n,z)=c_n,$$

et la solution générale de l'équation ci-dessus s'écrit sous la forme

$$\Phi(\varphi_1,...,\varphi_n)=0,$$

où Φ est une fonction dérivable arbitraire.

Chapitre 3

Équations aux dérivées partielles du $2^{\text{ème}}$ ordre

(équations hyperboliques, équations paraboliques, équations elliptiques,...)

Définition 21 *Soit f une fonction de deux variables x et y. On appelle équation aux dérivées partielles du $2^{\text{ème}}$ ordre, une relation de la forme*

$$F\left(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = 0,$$

faisant intervenir f et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2.

Exemple 22

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = g(y),$$

d'où

$$f(x, y) = xg(y) + h(y),$$

où g et h sont des fonctions arbitraires.

Exemple 23

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \varphi(x),$$

d'où

$$f(x, y) = \Phi(x) + \Psi(y),$$

où Φ et Ψ sont des fonctions arbitraires.

Remarque 24 *La solution d'une équation aux dérivées partielles du $2^{\text{ème}}$ ordre dépend de deux fonctions arbitraires.*

Considérons une équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$a(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2b(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right), \tag{3.1}$$

où $z=f(x,y)$ est la fonction inconnue et a, b, c, F sont des fonctions données dans un domaine $D\subset\mathbb{R}^2$. On cherche une solution z de l'équation ci-dessus en supposant que la valeur de z sur une courbe γ ainsi que celle de ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont connues. Autrement dit, (*problème de Cauchy*) on cherche une solution z de cette équation connaissant z et la dérivée normale $\frac{\partial z}{\partial n}$ sur la courbe γ (c-à-d., le produit scalaire du gradient de z par le vecteur normal unitaire).

Définition 25 *Une caractéristique (Monge) pour l'équation ci-dessus est une courbe dans D satisfaisant à l'équation différentielle :*

$$a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+c=0. \tag{3.2}$$

L'équation (3.1) est dite du type :

(i) *hyperbolique* dans D si en tout point de D, $b^2-ac>0$. Dans ce cas, on peut résoudre l'équation (3.2) localement ce qui montre que par tout point passent deux caractéristiques réelles. On montre que la transformation

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}x+y,\\ \eta &= \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a}x+y,\end{aligned}$$

où $a\neq 0$, ramène l'équation (3.1) à une équation du type

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=F\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial z}{\partial\xi},\frac{\partial z}{\partial\eta}\right),$$

et s'appelle forme canonique de type hyperbolique.

Exemple 26 *L'équation des cordes vibrantes :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=k^2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

où $z(x,t)$ est le déplacement du point d'abcisse x à l'instant t. C'est une équation hyperbolique ($a=1$, $b=0$, $c=-k^2$). Elle se généralise à trois dimensions spaciales en l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=k^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

(ii) *parabolique* si $b^2 - ac = 0$. Dans ce cas, les deux caractéristiques sont confondues. Supposons que $a \neq 0$ et posons

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{b}{a}x + y,\\ \eta &= -\frac{b}{a}x + y.\end{aligned}$$

L'équation (3.1) s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right),$$

et s'appelle forme canonique de type parabolique.

Exemple 27 *L'équation de la chaleur :*

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

où t est le temps, z est la température d'un corps et α une constante. C'est une équation parabolique ($a = \alpha^2$, $b = c = 0$).

(iii) *elliptique* si $b^2 - ac < 0$. Dans ce cas, les caractéristiques sont imaginaires. Si $a \neq 0$, la transformation

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{b}{a}x + y,\\ \eta &= \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}x.\end{aligned}$$

permet d'écrire l'équation (3.1) sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right),$$

et s'appelle forme canonique de type elliptique.

Exemple 28 *L'équation des fonctions harmoniques (ou équation de Laplace à deux variables) :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

est elliptique ($a = c = 1$, $b = 0$). En dimension trois, l'équation de Laplace (ou équation du potentiel) s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Soit
$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) = g(x),$$
l'équation du $2^{\text{ème}}$-ordre linéaire non homogène où $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, les coefficients $a_{ij}(x)$, $1 \leq i, j \leq n$ sont réels, les solutions u de cette équation appartiennent à $\mathcal{C}^2(\Omega)$, la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique. Soient $x_0 \in \Omega$ un point arbitraire et $\lambda_1(x_0), ..., \lambda_n(x_0)$ les valeurs propres de la matrice $A(x_0)$ (ces valeurs propres sont évidemment réelles). On note $n_+ = n_+(x_0)$ le nombre de valeurs propres positives, $n_- = n_-(x_0)$ le nombre de valeurs propres négatives, $n_0 = n_0(x_0)$ le nombre de valeurs propres nulles et $n = n_+ + n_- + n_0$. L'équation aux dérivées partielles ci-dessus est dite

- elliptique (au point x_0) si $n_+ = n$ ou $n_- = n$. Elle est elliptique sur un ensemble $E \subset \Omega$, si elle l'est en tout point de E. Par exemple, l'équation de Poisson : $\Delta u = f$, où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, est elliptique dans $\mathbb{R}^n$.
- hyperbolique (au point x_0) si ($n_+ = n - 1$ et $n_- = 1$) ou ($n_+ = 1$ et $n_- = n - 1$). Elle est hyperbolique sur un ensemble $E \subset \Omega$, si elle l'est en tout point de E.
- parabolique (au point x_0) si $n_0 > 0$. Elle est parabolique sur un ensemble $E \subset \Omega$, si elle l'est en tout point de E. Par exemple, l'équation de la chaleur : $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\partial u}{\partial x_n} = g(x)$, est parabolique dans $\mathbb{R}^n$.

Notons brièvement que dans le langage des formes quadratiques, on peut reformuler ceci comme suit : posons $L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ (opérateur), et associons à L la forme quadratique à n variables $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$:
$$\varphi(x_0, \xi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\xi_i\xi_j, \quad x_0 \in \Omega.$$
L'équation en question est dite : - elliptique (au point x_0) si la forme φ est définie positive ou négative (au point x_0). - parabolique (au point x_0) si la forme φ est semi-définie positive ou négative (au point x_0). - hyperbolique (au point x_0) si la forme φ est indéfinie non dégénérée (au point x_0).

Une équation n'est pas nécessairement du même type d'un point à l'autre. Par exemple, l'équation de Tchaplyguin ($n = 2$),
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + T(x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = g(x),$$
avec

- $T(x_1)$ positive pour $x_1 > 0$, est elliptique.
- $T(x_1)$ négative pour $x_1 < 0$, est hyperbolique.
- $T(x_1)$ nulle pour $x_1 = 0$, est parabolique.

Proposition 29 *Toute solution de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation des cordes vibrantes :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

est de la forme

$$z = g(x-t) + h(x+t),$$

où g et h sont des fonctions quelconques de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 3.1 *On se propose d'étudier pour l'équation des cordes vibrantes, le problème de Cauchy : étant données deux fonctions $u, v \in \mathcal{C}^2[a,b]$, trouver une solution $z(x,t)$ de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

telle que pour $t = 0$ et $x \in [a,b]$,

$$z(x,0) = u(x), \qquad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) = v(x).$$

<u>*Réponse*</u> : On obtient

$$z(x,t) = g(x-t) + h(x+t) = \frac{1}{2}\left(u(x-t) + u(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} v(\tau)d\tau\right).$$

(cette expression n'a de sens que si $x-t, x+t \in [a,b]$ car u et v ne sont définis que sur cet intervalle).

Remarque 30 *Supposons que dans une équation n'interviennent que des dérivées partielles par rapport à une même variable. On peut donc étudier une telle équation comme une équation différentielle ordinaire tandis que les constantes d'intégration doivent être considérées comme des fonctions de la variable joueant le rôle d'un paramètre. De même, si dans une équation n'apparaissent que des dérivées partielles d'une même dérivée partielle par rapport à l'une des variables alors on peut étudier une telle équation en considérant cette dernière dérivée partielle comme une inconnue intermédiaire.*

Exercice 3.2 *Intégrer l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x + y,$$

<u>*Réponse*</u> : On a $z = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 y}{2} + g_1(y)x + g_2(y)$, où g_1 et g_2 sont des fonctions arbitraires de y.

Exercice 3.3 *Déterminer la solution de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (1+y^2)z,$$

vérifiant les conditions initiales suivantes :

$$z(0,y) = y, \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(0,y) = 0.$$

Réponse : On obtient $z(x,y) = y\cosh\left(x\sqrt{1+y^2}\right)$.

Exercice 3.4 *Résoudre l'équation*

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,$$

Réponse : On a

$$f(x,y) = \int \varphi\left(\frac{x}{y}\right)dx + \psi(y) = y\int \varphi(t)dt + \psi(y) = y\Phi\left(\frac{x}{y}\right) + \psi(y),$$

où Φ et ψ sont des fonctions arbitraires.

Remarque 31 *Pour réduire l'équation aux dérivéeés partielles (4.2.1) à sa forme canonique, on peut raisonner (de manière équivalente) comme suit :*

(i) Si $b^2 - ac > 0$, alors l'équation (4.2.1) est hyperbolique. L'équation (4.2.2) possède deux intégrales

$$\varphi(x,y) = C_1, \qquad \psi(x,y) = C_2.$$

Ce sont deux familles de caractéristiques réelles. En posant

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y),$$

on ramène l'équation (4.2.1) à sa forme canonique :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

(ii) Si $b^2 - ac = 0$, alors l'équation (4.2.1) est parabolique. L'équation (4.2.2) possède une intégrale

$$\varphi(x,y) = C.$$

Les deux familles de caractéristiques se confondent. On pose

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y),$$

où ψ est une fonction arbitraire telle que : $\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} \neq 0$. On ramène ainsi l'équation (4.2.1) à sa forme canonique :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

(iii) Si $b^2 - ac < 0$, alors l'équation (4.2.1) est elliptique. L'équation (4.2.2) possède deux intégrales

$$\varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C_1, \qquad \varphi(x,y) - i\psi(x,y) = C_2.$$

En posant

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y),$$

on réduit l'équation (4.2.1) à sa forme canonique :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 \eta} = \Phi\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

Exercice 3.5 *Réduire à la forme canonique l'équation aux dérivées partielles :*

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Réponse : On obtient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0.$$

Exercice 3.6 *En utilisant le changement de variable : $u = x$, $v = \frac{x}{y}$, déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ solutions de l'équation aux dérivées partielles de l'exercice précédent, sur l'ouvert $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[\subset \mathbb{R}^2$.*

Réponse : La solution de l'équation proposée est

$$f(x,y) = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + \psi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Exercice 3.7 *Réduire à la forme canonique l'équation aux dérivées partielles :*

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Réponse : On obtient

$$2\xi\eta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\right) + \eta\frac{\partial z}{\partial \xi} + \xi\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0.$$

Exercice 3.8 *On considère l'équation aux dérivées partielles de fonction inconnue $z(x,y)$, de classe $\mathcal{C}^2$:*

$$x^4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

a) Déterminer ses caractéristiques.
b) Former l'intégrale générale de cette équation.
c) Déterminer des solutions élémentaires de cette équation par la méthode de séparation des variables.

Réponse : a) L'équation des caractéristiques est

$$x^4\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-1=0,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\pm\frac{1}{x^2},$$

d'où,

$$y=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{x}+C_1\\ -\frac{1}{x}+C_2\end{array}\right.\qquad (C_1, C_2:\ \text{constantes}).$$

b) On trouve,

$$z(x,y)=\frac{x}{2}\left(g\left(\frac{1}{x}+y\right)+h\left(-\frac{1}{x}+y\right)\right).$$

c) On obtient

$$\lambda>0,\quad z(x,y)=x\left(Ae^{-\sqrt{\lambda}y}+Be^{\sqrt{\lambda}y}\right)\left(Ce^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{x}}+De^{\frac{\sqrt{\lambda}}{x}}\right),$$

$$\lambda=0,\quad z(x,y)=(A+By)(Cx+D),$$

$$\lambda<0,\quad u(x)=x\left(A\cos\sqrt{-\lambda}y+B\sin\sqrt{-\lambda}y\right)\left(C\cos\frac{\sqrt{-\lambda}}{x}+D\sin\frac{\sqrt{-\lambda}}{x}\right),$$

où A, B, C, D sont des constantes.

Exercice 3.9 *Déterminer la solution de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\sin(\alpha x-\omega t),$$

qui satisfait aux conditions initiales

$$z(x,0)=0,\qquad \frac{\partial z}{\partial t}(x,0)=0.$$

Réponse : On a

$$z(x,t)=\frac{\sin\alpha(x-kt)}{2\alpha(\alpha-\lambda)}+\frac{\sin\alpha(x+kt)}{2\alpha(\alpha+\lambda)}+\frac{\sin(\alpha x-\omega t)}{\lambda^2-\alpha^2},\quad \lambda\equiv\frac{\omega}{k}.$$

Exercice 3.10 *Résoudre l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}-6\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0.$$

Réponse : L'équation proposée admet l'intégrale générale

$$z(x,y)=f(x)+g(2x+y)+h(-3x+y),$$

où f, g et h sont des fonctions arbitraires.

Exercice 3.11 *(Problème de Dirichlet). Etant donné un domaine Ω dont le bord $\partial\Omega$ est une courbe et $\varphi:\partial\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue, chercher une fonction $f\in\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que :*

$$\begin{cases}\Delta f=0 & \textit{dans } \Omega\\ f=\varphi & \textit{sur } \partial\Omega\end{cases}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace.

Exercice 3.12 *(Problème de Neumann). Sous les mêmes hypothèses (exercice précédent) sur Ω et étant donnée une fonction continue $\psi:\partial\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, déterminer une fonction $f\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})\cap\mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que :*

$$\begin{cases}\Delta f=0 & \textit{dans } \Omega\\ \frac{\partial f}{\partial n}=\psi & \textit{sur } \partial\Omega\end{cases}$$

où $\frac{\partial f}{\partial n}$ représente la dérivation suivant le vecteur unitaire normal extérieur.

Pour l'étude des problèmes de Dirichlet et de Neumann via la formulation variationnelle, voir plus loin.

Chapitre 4

Formulation variationnelle des EDP

(espaces de Sobolev, problèmes de Dirichlet, problèmes de Neumann,...)

On note $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, le symbole nabla ∇ représente le gradient de u,

$$\nabla u(x) = gradu(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}),$$

et div désigne l'opérateur divergence, il s'applique à une fonction vectorielle,

$$div(v_1(x), ..., v_n(x)) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n},$$

le symbole Δ désigne le laplacien de u,

$$\Delta u(x) = div \nabla u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Espaces de Sobolev

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un ouvert. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées partielles, au sens des distributions sont identifiables à des fonctions localement intégrables qui sont aussi dans $L^2(\Omega)$;

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que : } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Autrement dit, une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est dans $H^1(\Omega)$ s'il existe $v_1, ..., v_n \in L^2(\Omega)$ tels que :

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega v_i \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), 1 \leq i \leq n$$

où $\mathcal{D}(\Omega)$ (que l'on note également $C_c^\infty(\Omega)$) désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω. Et d'après la théorie des distributions, les v_i sont notées $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (uv + \nabla u.\nabla v)d\Omega,$$

est complet ; c'est un espace de Hilbert (espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme $(u,u)^{\frac{1}{2}}$). On note

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (u^2 + \|\nabla u\|^2)d\Omega\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $n \geq 2$ un entier, l'espace de Sobolev $H^n(\Omega)$ est défini par

$$H^n(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que : } \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq n\right\},$$

où

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \qquad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \qquad \partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^n(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq n} \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx,$$

$H^n(\Omega)$ est un espace de Hilbert et on note la norme associée

$$\|u\|_{H^n(\Omega)} = \sqrt{(u,u)}.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ désigne l'adhérence (fermeture) de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$:

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)},$$

c'est-à-dire les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont les limites dans $H^1(\Omega)$ des suites de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$. Muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert (en tant que sous-espace fermé d'un espace de Hilbert $H^1(\Omega)$). Si Ω est un ouvert borné, alors on a $H_0^1(\Omega) \subsetneqq H^1(\Omega)$ et si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

Les fonctions de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, peuvent avoir des singularités. Les propriétés essentielles de $H^1(\Omega)$ qui seront utiles dans l'étude des problèmes aux limites, dépendent de la régularité de la frontière de l'ouvert Ω. Dans le cas où Ω est régulier, par exemple de classe C^1 (c'est-à-dire que sa frontière est localement le graphe d'une fonction C^1), les fonctions de cet espace ont une trace (voir ci-dessous) sur le bord $\partial\Omega$ de Ω, elle se prolonge en un opérateur linéaire continu de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ et va jouer un rôle cruciale dans ce qui va suivre.

Pour décrire cette notion de trace, considérons un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, de classe C^1. Comme l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω est un fermé, alors lorsque Ω est borné on a $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$. L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et (théorème de trace) l'application trace

$$\gamma_0 : \left(\mathcal{D}(\overline{\Omega}), \|.\|_{H^1(\Omega)}\right) \longrightarrow \left(C^0(\partial\Omega), \|.\|_{L^2(\partial\Omega)}\right), \quad u \longmapsto u|_{\partial\Omega},$$

est une application linéaire continue qui se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$; c'est la trace de u sur $\partial\Omega$ notée également γ_0,

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega), \quad u \longmapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}.$$

En particulier (continuité), on a

$$\exists C > 0, \forall u \in H^1(\Omega), \|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)},$$

la norme de γ_0 étant

$$\|\gamma_0\| = \sup_{0 \neq u \in H^1(\Omega)} \frac{\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}}{\|u\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Il faut bien noter que les fonctions de $L^2(\Omega)$ n'ont pas nécessairement une trace sur le bord. Par contre grâce au théorème de trace, les fonctions de $H^1(\Omega)$ ont bien une trace sur le bord.

On a les inégalités suivantes où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné et $C \equiv C_\Omega > 0$ ne dépend que de Ω :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \ \text{(inégalité de Poincaré)}$$

$$\forall u \in H^1(\Omega), \|u - \langle u\rangle_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \ \text{(inégalité de Poincaré-Wirtinger)}$$

où

$$\langle u\rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx,$$

est la moyenne de u sur $\mathbb{R}$ et $|\Omega| = \int_\Omega dx$.

Pour le comportement sur le bord $\partial\Omega$, on montre que si Ω est un ouvert borné de classe C^1 et si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, alors

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \Longleftrightarrow u \in H_0^1(\Omega).$$

En terme de l'application trace γ_0, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est le noyau de γ_0,

$$H_0^1(\Omega) = \ker\gamma_0 = \left\{u \in H^1(\Omega); \gamma_0(u) = 0 \text{ dans } L^2(\partial\Omega)\right\}.$$

La notion de trace permet d'introduire la formule de Green (intégration par parties en dimension > 1) pour les fonctions de $H^1(\Omega)$. Plus précisément, soient Ω un ouvert borné de classe C^1 et $u, v \in H^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)d\sigma,$$

où $n = (n_i)_{1\leq i\leq n}$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ et $d\sigma$ est la mesure superficielle du bord $\partial\Omega$.

L'image Im γ_0 de l'application trace γ_0 n'est pas $L^2(\partial\Omega)$, mais un sous-espace plus petit que $L^2(\Omega)$, dense dans $L^2(\partial\Omega)$ et constitué de fonctions en quelque sorte plus régulières. Cet espace de Sobolev fractionnaire est noté $H^{1/2}(\partial\Omega)$ et il est défini par

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ u \in L^2(\partial\Omega) : (x, y) \longmapsto \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{(n+1)/2}} \in L^2(\partial\Omega \times \partial\Omega) \right\},$$

ou encore

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \left\{ u \in L^2(\partial\Omega) : \exists v \in H^1(\Omega), \gamma_0(v) = u \in L^2(\partial\Omega\partial) \right\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{v\in H^1(\Omega), \gamma_0 v = u} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Dès lors, on montre qu'il existe une application linéaire continue (on dit aussi opérateur de relèvement), $R : H^{1/2}(\partial\Omega) \longrightarrow H^1(\Omega)$ vérifiant,

$$\forall u \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad \gamma_0 o R(u) = u.$$

De même, on peut introduire dans $H^n(\Omega)$ la notion de trace et obtenir des formules de Green. Par exemple pour $n = 2$ (cas qui va intervenir par la suite), on sait que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ étant un ouvert borné de classe C^1, alors (théorème de trace) l'application trace définie par

$$\gamma_1 : \left(\mathcal{D}(\overline{\Omega}), \|.\|_{H^2(\Omega)}\right) \longrightarrow \left(C^0(\partial\Omega), \|.\|_{L^2(\partial\Omega)}\right), \quad u \longmapsto \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega},$$

est une application linéaire continue qui se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$; c'est la trace de u sur $\partial\Omega$ notée aussi γ_1,

$$\gamma_1 : H^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega), \quad u \longmapsto \gamma_1(u) = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}.$$

En particulier (continuité),

$$\exists C > 0, \forall u \in H^2(\Omega), \|\gamma_1(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)},$$

la norme de γ_1 étant

$$\|\gamma_1\| = \sup_{0\neq u\in H^2(\Omega)} \frac{\left\| \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega}\right\|_{L^2(\partial\Omega)}}{\|u\|_{H^2(\Omega)}}.$$

Pour les fonctions de $H^2(\Omega)$ on a une formule de Green : si Ω est un ouvert borné de classe C^1, $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega \Delta u(x)v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)v(x)d\sigma,$$

où $\frac{\partial u}{\partial n} = n.\text{grad } u$ est la dérivée normale de u sur $\partial\Omega$, c-à-d.,

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = n(x).\nabla u(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de solutions aux problèmes que nous allons étudier, on utilise le théorème de Lax-Milgram suivant :

Soit E un espace de Hilbert, $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire
- continue, c-à-d., $\exists M_a > 0$, $\forall u, v \in E$, $|a(u,v)| \leq M_a\|u\|\|v\|$,

et
- coercive, c-à-d., $\exists \alpha > 0$, $\forall u \in E$, $a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2$.

Si $l : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue c-à-d., $v \longmapsto l(v)$ est linéaire et $\exists C > 0 : \forall v \in E$, $|l(v)| \leq C\|v\|$, alors la formulation variationnelle :

$$\textit{Trouver } u \in E \textit{ tel que} : \forall v \in E,\ a(u,v) = l(v),$$

admet une solution unique dans E. En outre, cette solution dépend continûment de la forme linéaire l.

Par ailleurs, lorsque les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites et si en outre la forme bilinéaire a est symétrique ($a(u,v) = a(v,u)$), alors u est l'unique solution du problème de minimisation suivant :

$$\textit{Trouver } u \in E \textit{ tel que} : J(u) \leq J(v),$$

où J est définie pour $v \in E$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v).$$

La solution u est caractérisée par

$$J(u) = \min_{v \in E} J(v).$$

Réciproquement, si $u \in E$ est un point de minimum de $J(v)$, alors u est l'unique solution de la formulation variationnelle ci-dessus.

Problèmes de Dirichlet et de Neumann

Considérons le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, $\partial\Omega$ son bord et f une fonction donnée.

La formulation classique de (4.1) consiste à chercher $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, solution de ce problème. Autrement dit, une fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite solution classique de ce problème si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ et u vérifie (4.1).

Soit $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $v = 0$ sur $\partial\Omega$. En multipliant l'équation $-\Delta u = f$ par v et en intégrant par parties, on obtient (en vertu de la formule de Green et de la condition homogène au bord) l'expression

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \int_\Omega f v dx,$$

pour toute fonction $v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ avec $v = 0$ sur$\partial\Omega$. Si E désigne l'espace de ces fonctions, alors la transformation du problème classique (4.1) en

$$\textit{Trouver } u \in E, \forall v \in E, \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = \int_\Omega f v dx, \tag{4.2}$$

consiste à écrire la formulation variationnelle du problème. Notons la dualité qui existe entre la formulation classique (4.1) qui peut s'écrire

$$\textit{Trouver } u \in E, \forall x \in \Omega, -\Delta u(x) = f(x), \tag{4.3}$$

et la formulation variationnelle (4.2), entre l'espace des points Ω et l'espace des fonctions E. L'existence et l'unicité de solution à (4.2) s'obtient à l'aide du théorème de Lax-Milgram qui fournit des conditions suffisantes pour qu'un problème de la forme

$$\textit{Trouver} \quad u \in E, \, \forall v \in E, \, a(u, v) = l(v),$$

(où a est une forme bilinéaire et l une forme linéaire), admet une solution unique. Pour que les termes de (4.2) aient un sens, il suffit (régularité) que

$u, v \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. On sait que dans le théorème de Lax-Milgram, E est un espace de Hilbert. Or ici l'espace $E = \{u \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, n'est pas un espace de Hilbert car il n'est pas complet. Pour remédier à ce problème, on fait appel aux espaces de Sobolev qui joueront le rôle de complétés d'espaces de ce type et constituent le bon cadre fonctionnel pour l'étude de ce genre de problèmes aux limites.

Dans ce qui va suivre, on va utiliser les espaces de Sobolev, les dérivées seront au sens des distributions et les conditions aux limites au sens de la théorie des traces. L'étude de ce type de problèmes via l'approche variationnelle consiste tout d'abord à

- *établir une formulation variationnelle*,

ensuite

- *montrer que cette formulation possède une solution unique*,

et enfin

- *prouver l'équivalence avec le problème initial.*

Nous allons appliquer cette démarche avec plus de détail à l'étude de quelques problèmes ci-dessous. Rappelons (voir chapite 1) qu'un problème est dit bien posé (au sens de Hadamard) s'il admet pour toute donnée (second membre, ouvert, données au bord, etc.), une solution unique et si celle-ci dépend continûment de la donnée.

Problème de Dirichlet *"homogène" :*

Etant donné un ouvert Ω borné de classe C^1, de frontière $\partial\Omega$, on cherche une solution au problème de Dirichlet avec conditions aux limites homogènes,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.4}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ une fonction donnée. On multiplie l'équation $-\Delta u = f$ par une fonction v et on intégre sur Ω,

$$\int_\Omega -(\Delta u)v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Puis on effectue une intégration par parties (formule de Green), ce calcul est formel pour le moment et sera justifié ci-dessous,

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}.v d\sigma = \int_\Omega f v dx,$$

où $d\sigma$ est la mesure superficielle du bord $\partial\Omega$. (On utilisera ici et plus loin indifféremment la notation dx ou $d\Omega$). On souhaite que u et v soient dans un même espace de Hilbert E et que $v = 0$ sur le bord $\partial\Omega$, d'où

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Une condition suffisante pour que $\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$ ait un sens est $\nabla u, \nabla v \in L^2(\Omega)$; il suffit de considérer composante par composante. Par hypothèse, $f \in L^2(\Omega)$, donc pour que $\int_\Omega fv dx$ ait un sens, il suffit que $v \in L^2(\Omega)$. L'idée est de choisir l'espace $E = H_0^1(\Omega)$ et celui-ci va en outre nous permettre de faire disparaitre l'intégrale sur le bord ci-dessus. Dès lors, la formulation variationnelle (ou formulation faible) de ce problème est

$$\textit{Trouver } u \in H_0^1(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega fv dx. \tag{4.5}$$

Pour montrer que cette formulation variationnelle admet une solution unique, on applique le théorème de Lax-Milgram avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx, \qquad l(v) = \int_\Omega fv dx,$$

sur l'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Notons que a est une forme bilinéaire sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. La continuité de a résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$ et rappelons que :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré, il existe une constante $C \equiv C_\Omega > 0$ tel que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

c-à-d.,

$$\int_\Omega u^2 d\Omega \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega.$$

Comme

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) d\Omega \leq (1+C) \int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega,$$

alors il existe une constante $\alpha \equiv \frac{1}{1+C} > 0$ tel que :

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)},$$

donc a est coercive. Enfin, l est linéaire sur $H_0^1(\Omega)$ et sa continuité résulte aussi de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad |l(v)| = \left|\int_\Omega f v d\Omega\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

(ce qui est équivalent à dire que $l \in H^{-1}(\Omega)$, dual topologique de $H_0^1(\Omega)$). Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant satisfaites, on en conclut qu'il existe une unique fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de la formulation variationnelle (4.5). (Notons que l'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram sur l'espace $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ de $H^1(\Omega)$. Dans ce cas, a et l sont évidemment continues et la coercivité de a résulte de l'inégalité de Poincaré. Signalons que lorsque l'ouvert Ω n'est pas borné, on n'est plus assuré de l'existence de la solution). On vient de prouver que la formulation variationnelle (4.5) possède une solution unique et pour montrer l'équivalence avec le problème initial, on procède comme suit : on suppose que l'on dispose d'une solution régulière au problème (4.5), en général dans l'espace $H^2(\Omega)$ (on parle de solution forte). Par hypothèse Ω est un ouvert borné de classe C^1. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$; on a $v = 0$ sur le bord $\partial\Omega$ et donc

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = -\int_\Omega (\Delta u) v dx,$$

en vertu de la formule de Green. En tenant compte de (4.5), on obtient pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\Delta u + f) f dx = 0,$$

et comme $f \in L^2(\Omega)$, alors

$$\Delta u + f = 0,$$

presque partout dans Ω. On déduit du théorème de trace que la trace sur le bord $\partial\Omega$ de toute fonction de $H_0^1(\Omega)$ est nulle dans $L^2(\Omega)$. Dès lors, $u = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$. Finalement, on a obtenu le problème (4.4).

Par ailleurs, la forme bilinéaire a étant symétrique $(a(u,v) = a(v,u))$, on montre que si $u \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution de la formulation variationnelle (4.5), alors u est l'unique point de minimum de

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v dx, \quad v \in H_0^1(\Omega),$$

c-à-d.,

$$J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v).$$

Réciproquement, si $u \in H_0^1(\Omega)$ est un point de minimum de $J(v)$, alors u est l'unique solution de la formulation variationnelle (4.5).

(Note : Si la solution u de la formulation variationnelle (4.5) n'est plus supposée régulière et s'il en est de même de l'ouvert Ω, alors dans ce cas il faut utiliser un autre raisonnement car on ne peut plus utiliser la formule de Green ni même le théorème de trace si Ω n'est pas régulier. Notons que chaque composante de ∇u appartient à $L^2(\Omega)$. D'après (4.5) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \left| \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx \right| = \left| \int_\Omega f v dx \right| \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Or $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, donc l'inégalité ci-dessus montre que ∇u possède une divergence (au sens faible)[1] dans $L^2(\Omega)$. Autrement dit,

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx = - \int_\Omega (div \nabla u) v dx.$$

Dès lors,

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega (div \nabla u + f) v dx = 0,$$

et on en déduit que[2]

$$div \nabla u + f = 0,$$

presque partout dans Ω. Comme $f \in L^2(\Omega)$ et $div \nabla u = \Delta u$, alors

$$div \nabla u = -f = \Delta u \in L^2(\Omega).$$

Par conséquent, on a retrouvé l'équation : $-\Delta u = f$, presque partout dans Ω. Ainsi que $u = 0$, presque partout sur $\partial\Omega$ si l'ouvert Ω est régulier. Or si l'ouvert n'est pas régulier, on ne peut pas déduire du théorème de trace que $u = 0$, presque partout sur $\partial\Omega$. Cependant l'utilisation de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ nous incite de façon formelle à dire que $u = 0$ sur le bord $\partial\Omega$).

---

[1] Soit $\zeta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\zeta \in L^2(\Omega)^m$. On dit que ζ possède une divergence (au sens faible) dans $L^2(\Omega)$ s'il existe $w \in L^2(\Omega)$ tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega \zeta(x) . \nabla \varphi(x) dx = - \int_\Omega w(x) \varphi(x) dx.$$

On note : $w = div \zeta$ (divergence faible). Par ailleurs, on montre que si $\zeta \in L^2(\Omega)^m$ et s'il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left| \int_\Omega \zeta(x) . \nabla \varphi(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

alors ζ possède une divergence (au sens faible)).

[2] Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$, alors $f(x) = 0$ presque partout dans Ω.

Problème de Dirichlet "non homogène" :

Sous les mêmes hypothèses sur Ω, on cherche une solution au problème de Dirichlet avec conditions aux limites non homogènes,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$ sont des fonctions données. On montre que ce problème admet une unique solution (faible) $u \in H^1(\Omega)$. Notons d'abord qu'en raisonnant comme dans le cas homogène, on multiplie l'équation aux dérivées partielles : $-\Delta u = f$ par une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ (pour annuler le terme sur le bord), on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx,$$

via la formule de Green. La formulation variationnelle est

$$\textit{Trouver} \quad u \in E, \forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx,$$

où

$$E = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_0(u) = g \in L^2(\partial\Omega)\},$$

et γ_0 est l'application trace. Comme l'espace des solutions n'est pas le même que celui des fonctions v, alors pour pouvoir utiliser le théorème de Lax-Milgram, on va "symétriser" le problème. Comme Ω est un ouvert borné de classe C^1 et $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, alors l'application trace γ_0 sur $\partial\Omega$ de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ est telle que :

$$\gamma_0(\zeta) = g, \quad \zeta \in H^1(\Omega).$$

En posant $v = u - \zeta$ (ici ζ joue le rôle d'un relèvement que nous avons noté précédemment R), le problème ci-dessus se ramène à celui-ci

$$\begin{cases} -\Delta v = & f + \Delta\zeta \text{ dans } \Omega \\ v = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour établir la formulation variationnelle de ce problème et appliquer les résultats obtenus précédemment, on va raisonner un peu différamment (il faut noter que pour $\zeta \in H^1(\Omega)$, $\Delta\zeta \notin L^2(\Omega)$ mais $\Delta\zeta \in \mathcal{D}'(\Omega)$ où $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions). Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle -\Delta v, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle + \langle \Delta\zeta, \varphi\rangle,$$

c'est-à-dire (en tenant compte de la dérivation au sens des distributions),

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle = \langle f, \varphi\rangle - \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle,$$

ou encore (les termes dans les crochets appartiennent à $L^2(\Omega)$),

$$\int_\Omega \nabla v.\nabla\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx - \int_\Omega \nabla\zeta.\nabla\varphi dx.$$

La formulation variationnelle du problème ci-dessus est donc

Trouver $v \in H_0^1(\Omega)$, $\forall w \in H_0^1(\Omega)$, $\int_\Omega \nabla v.\nabla w dx = \int_\Omega f w dx - \int_\Omega \nabla\zeta.\nabla w dx.$

Dès lors, on applique le théorème de Lax-Milgram avec

$$a(v,w) = \int_\Omega \nabla v.\nabla w dx, \qquad l(w) = \int_\Omega f w dx - \int_\Omega \nabla\zeta.\nabla w dx.$$

On a montré précédemment que la forme a est bilinéaire, continue et coercive sur l'espace $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Notons que l est linéaire et elle est continue car

$$\begin{aligned}
|l(w)| &= \left| \int_\Omega f w dx - \int_\Omega \nabla\zeta.\nabla w dx \right|, \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\zeta\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}, \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla\zeta\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}, \\
&\leq C\|\nabla w\|_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

où $C \equiv max\left\{\|f\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla\zeta\|_{L^2(\Omega)}\right\}$. Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant satisfaites, on en déduit que ce problème, c-à-d.,

Trouver $v \in H_0^1(\Omega)$, $\forall w \in H_0^1(\Omega)$, $a(v,w) = l(w)$,

admet une solution unique. Comme $u = v + \zeta$, alors u est une solution (faible) du problème proposé. En outre, cette solution est unique (en effet, si $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ avec $\gamma_0(u_1) = \gamma_0(u_2) = g \in L^2(\partial\Omega)$ et

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u_1.\nabla w dx = \int_\Omega \nabla u_2.\nabla w dx = \int_\Omega f w dx,$$

alors, $u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ et on a

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2).\nabla w dx = \int_\Omega f w dx.$$

Le théorème de Lax-Milgram affirme que ce problème possède une solution unique et comme 0 est solution, alors $u_1 - u_2 = 0$).

On montre également à l'aide du théorème de Lax-Milgram que la solution v vérifie

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H^1(\Omega)} &\leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\zeta\|_{L^2(\Omega)}\right), \\
&\leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\zeta\|_{H^1(\Omega)}\right), \\
&\leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\zeta\|_{H^{1/2}(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

où C ne dépend que de Ω et on a une estimation similaire pour la solution $u = v + \zeta \in H^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right).$$

Problème de Neumann "homogène" :

Sous les mêmes hypothèses sur Ω, on cherche une fonction u telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et n est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω. On suppose qu'il existe une solution (forte) $u \in H^2(\Omega)$ à ce problème. On multiplie l'équation $-\Delta u + u = f$ par $v \in H^1(\Omega)$ et on intégre sur Ω. D'où

$$\int_\Omega (-(\Delta u)v + uv) d\Omega = \int_\Omega fv d\Omega,$$

et d'après la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega (\nabla u . \nabla v + uv) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_\Omega fv d\Omega.$$

Or $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$ (mais u n'est pas connu sur le bord), donc la formulation variationnelle de ce problème est

$$\textit{Trouver } u \in H^1(\Omega),\ \forall v \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega (\nabla u . \nabla v + uv) d\Omega = \int_\Omega fv d\Omega.$$

Pour montrer que cette formulation admet une solution unique, on va utiliser le théorème de Lax-Milgram avec

$$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u . \nabla v + uv) d\Omega, \qquad l(v) = \int_\Omega fv d\Omega,$$

La forme a est bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Elle est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \quad |a(u, v)| = \left| \int_\Omega (\nabla u . \nabla v + uv) d\Omega \right| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

En outre a est coercive car $a(v, v) = \|v\|^2_{H^1(\Omega)}$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Enfin, l est linéaire sur $H^1(\Omega)$ et sa continuité découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad |l(v)| = \left| \int_\Omega fv d\Omega \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont satisfaites et on en déduit qu'il existe une unique fonction $u \in H^1(\Omega)$ solution de la formulation variationnelle ci-dessus. Le problème proposé et la formulation variationnelle étant équivalents, la solution obtenue est aussi l'unique solution du problème en question. Vérifions avec plus de détail que si u est solution du problème proposé avec $u \in H^2(\Omega)$, alors u est aussi solution du problème variationnelle ci-dessus. La réciproque est également vraie. Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution du problème proposé et supposons en outre que $u \in H^2(\Omega)$. En multipliant l'équation $-\Delta u + u = f$ par $v \in H^1(\Omega)$ et en intégrant par parties, on obtient la formulation variationnelle ci-dessus. Réciproquemet, soit u solution de cette formulation variationnelle. Celle-ci peut s'écrire dans l'espace des distributions $D'(\Omega)$ sous la forme :

$$\langle \Delta u, \Delta v\rangle + \langle u, v\rangle = \langle f, v\rangle,$$

où $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. On retrouve ainsi l'équation $-\Delta u + u = f$. Supposons en outre que la solution u de la formulation variationnelle appartienne à l'espace $H^2(\Omega)$ (en fait l'hypothèse $u \in H^2(\Omega)$ ne pose pas de problème car comme $f \in L^2(\Omega)$, alors la solution du problème variationnelle ci-dessus est régulière au sens $H^2(\Omega)$). Comme précédemment, une intégration par parties fournit l'expression

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega (-\Delta u + u) v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_\Omega f v d\Omega,$$

dont les termes ont bien un sens car $-\Delta u \in L^2(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^2(\Omega)$ puisque $u \in H^2(\Omega)$. Cette expression peut encore s'écrire sous la forme

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad (-\Delta u + u, v)_{L^2(\Omega)} - (f, v)_{L^2(\Omega)} = -\left(\frac{\partial u}{\partial n}, v\right)_{L^2(\Omega)}.$$

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ et il en est de même de $\gamma_0(H^1(\Omega))$ dans $L^2(\partial\Omega)$, γ_0 étant l'application trace. Comme $-\Delta u + u = f$, alors on en déduit que : $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

(Note : Lors de l'étude du problème proposé, on peut être tenté de faire entrer la condition aux limites dans l'espace de recherche de la solution, c'est-à-dire dans l'espace $\left\{v \in H^1(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$. Or pour $v \in H^1(\Omega)$, $\frac{\partial v}{\partial n}$ n'a pas de sens sur $\partial\Omega$ car comme nous l'avons déjà signalé les fonctions de $L^2(\Omega)$ n'ont pas nécessairement une trace sur le bord $\partial\Omega$. Il est inutile non plus d'essayer de choisir l'espace $\left\{v \in H^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right\}$. Ce dernier est un sous-espace fermé de $H^2(\Omega)$. On ne peut pas utiliser le théorème de Lax-Milgram puisque la forme bilinéaire a n'est pas coercive. Si on munit cet espace de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$, on aura certes la coercivité de a mais une autre difficulté apparait : cet espace muni de cette norme n'est pas un espace de Hilbert car il n'est pas complet et on ne peut donc pas à nouveau appliquer le théorème de Lax-Milgram).

Problème de Neumann "non homogène" :

Sous les mêmes hypothèses sur Ω, on cherche une fonction u telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ et n est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω. Il suffit de raisonner comme précédemment. La formulation variationnelle de ce problème est

Trouver $u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + uv)dx = \int_\Omega fvdx + \int_{\partial\Omega} gvd\sigma.$

Ensuite en utilisant le théorème de Lax-Milgram avec

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u.\nabla v + uv)dx, \qquad l(v) = \int_\Omega fvdx + \int_{\partial\Omega} gvd\sigma,$$

on montre que cette formulation admet une solution unique. Enfin, on prouve l'équivalence avec le problème proposé ; que cette solution est aussi solution du problème aux limites en question. (Comme a est symétrique, alors si $u \in H^1(\Omega)$ est l'unique solution de la formulation variationnelle ci-dessus, u est l'unique point de minimum (c-à-d., $J(u) = \min_{v \in H^1(\Omega)} J(v)$) de

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - l(v), \quad v \in H^1(\Omega).$$

Réciproquement, si $u \in H^1(\Omega)$ est un point de minimum de $J(v)$, alors u est l'unique solution de la formulation variationnelle ci-dessus).

Note : Le fait d'avoir ajouté un terme d'ordre zéro au Laplacien dans les deux problèmes précédents nous a aidé lors de l'étude de la coercivité de la forme bilinéaire a. Nous allons voir ci-dessous une variante de ces problèmes mais sans ajout du terme d'ordre zéro.

Un autre problème de Neumann "non homogène" :

On cherche une fonction u telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert connexe de classe C^1, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ et n est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω. Supposons que l'on dispose d'une solution forte $u \in H^2(\Omega)$. En multipliant l'équation $-\Delta u = f$ par $v \in H^1(\Omega)$ et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$

En tenant compte de la condition sur $\partial\Omega$ (au sens des traces) pour u, il vient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v d\sigma. \tag{4.6}$$

Considérons l'espace

$$\widetilde{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \cap \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u dx = 0 \right\},$$

dont la norme est celle de $H^1(\Omega)$. La formulation variationnelle de ce problème est

$$\textit{Trouver } u \in \widetilde{H}^1(\Omega),\ \forall v \in \widetilde{H}^1(\Omega),\ \textstyle\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v d\sigma.$$

Posons

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx, \qquad l(v) = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v d\sigma.$$

La continuité de la forme bilinéaire a sur $\widetilde{H}^1(\Omega)$ est évidente. Pour la coercivité, il suffit d'utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger mentionnée précédemment. La forme l est linéaire et on a

$$|l(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

L'application trace $H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ étant continue, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Dès lors, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall v \in \widetilde{H}^1(\Omega), \quad |l(v)| \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

L'existence et l'unicité d'une solution u faible résulte dès lors du théorème de Lax-Milgram et on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \right),$$

où C est une constante ne dépendant que de Ω. En outre, on montre que réciproquement toute solution forte $u \in H^2(\Omega)$ du problème non homogène ci-dessus vérifie dans $\widetilde{H}^1(\Omega)$ (4.6), c-à-d., une solution faible. On montre aussi que toute solution faible est une solution de l'équation aux dérivées partielles au sens des distributions. Notons enfin que pour $u \in H^1(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ n'a pas de sens sur le bord $\partial\Omega$ mais on montre que $\frac{\partial u}{\partial n}$ s'identifie à un élément de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ dual de l'espace $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Exercice 4.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et de frontière $\partial\Omega$. A l'aide de l'approche variationnelle, démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u + u = f & \textit{dans } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

Exercice 4.2 *Même question pour les problèmes aux limites suivants :*

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u = f & \textit{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = g & \textit{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta u + u = f & \textit{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + cu = g & \textit{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, $c \geq 0$ et n est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.

Chapitre 5

Problèmes concernant des opérateurs plus généraux ; à coefficients variables

(solutions classiques, solutions généralisées, fonctions et valeurs propres, problèmes mixtes)

Les problèmes étudiés dans ce chapitre utilisent les méthodes expliquées dans le chapitre précédent, peuvent être considérés comme des variantes des précédents et fournissent d'autres informations supplémentaires. Ces problèmes concernent des opérateurs plus généraux ; à coefficients variables.

Solutions classiques, Solutions généralisées :

($\bullet$) Les équations de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div(k(x)\nabla u(x,t)) + a(x)u(x,t) = g(x,t),$$

sont hyperboliques. L'équation des ondes

$$\Box u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = g(x,t),$$

est l'exemple le plus simple d'une équation hyperbolique.

($\bullet\bullet$) Les équations de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div(k(x)\nabla u(x,t)) + a(x)u(x,t) = g(x,t),$$

sont paraboliques. L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x,t) = g(x,t),$$

est l'exemple le plus simple d'une équation parabolique.

($\bullet\bullet\bullet$) Les équations de la forme

$$Lu \equiv div(k(x)\nabla u) - a(x)u = g(x), \tag{5.1}$$

sont elliptiques.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On suppose que les coefficients de cette équation sont réels et $a(x) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $k(x) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, $k(x) \geq k_0 > 0$, $\forall x \in \Omega$. En général, les fonctions $u(x)$ et $g(x)$ sont à valeurs complexes.

Une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ qui satisfait à l'équation (5.1) et sur le bord $\partial\Omega$ à la condition

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \text{ (donnée)} \tag{5.2}$$

s'appelle solution (classique) du problème de Dirichlet (1^{er} problème aux limites) pour l'équation (5.1).

Une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ satisfaitsant dans Ω l'équation (5.1) et sur $\partial\Omega$ la condition

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \tag{5.3}$$

($\sigma(x) \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ et $\varphi(x)$ données), est dite solution (classique) du $3^{\text{ème}}$ problème aux limites pour l'équation (5.1) (on admet que $\sigma(x) \geq 0$).

Lorsque $\sigma(x) \equiv 0$, dans (5.3), on a le problème de Neumann ($2^{\text{ème}}$ problème aux limites).

Quand $n = 1$, l'équation (5.1) se ramène à l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$(k(x)u')' - a(x)u = g(x), \quad \Omega =]\alpha, \beta[$$

Les conditions aux limites des deux premiers problèmes considérés deviennent

$$\begin{cases} u|_{x=\alpha} = \varphi_0 \\ u|_{x=\beta} = \varphi_1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (-u' + \sigma_0 u)|_{x=\alpha} = \varphi_0 \\ (-u' + \sigma_1 u)|_{x=\beta} = \varphi_1 \end{cases}$$

où φ_0, φ_1, $\sigma_0 \geq 0$, $\sigma_1 \geq 0$, sont des constantes données.

Soit $u(x)$, solution classique dans Ω du problème de Dirichlet (5.1), (5.2). En multipliant l'équation (5.1) par une fonction quelconque $\overline{v}(x) \in \dot{\mathcal{C}}^1(\Omega)$ (ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^1(\Omega)$ à support borné) et en intégrant sur Ω, on obtient à l'aide de la formule de Green, l'expression suivante :

$$\int_\Omega (k\nabla u \nabla \overline{v} + au\overline{v})dx = -\int_\Omega g\overline{v}dx \tag{5.4}$$

(comme la fonction v est à support borné, alors $\int_{\partial\Omega}(\cdots) = 0$). Si on suppose qu'en outre $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$, c-à-d.,

$$u(x) \in \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, ..., n \right\},$$

(la dérivation est au sens des distributions) et $g(x) \in L^2(\Omega)$, alors l'expression (5.4) est valable pour toutes les fonctions $v(x) \in \dot{\mathcal{C}}^1(\overline{\Omega})$ et de plus pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ (adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$. (En effet, soient $v \in H_0^1(\Omega)$ arbitraire et $(v_k(x))$ une suite de fonctions de $\dot{\mathcal{C}}^1(\overline{\Omega})$ convergeant vers v pour la norme de $H^1(\Omega)$. Toute fonction $v_k(x)$ vérifie (5.4). Par passage à la limite lorsque $k \to \infty$, on établit la validité de (5.4) pour v). Dès lors, la solution classique $u \in H^1(\Omega)$ du problème (5.1), (5.2), satisfait pour $g \in L^2(\Omega)$, l'identité intégrale (5.4), pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

On appelle solution généralisée (on parle également de solution faible) du problème (5.1), (5.2), $g \in L^2(\Omega)$, une fonction $u \in H^1(\Omega)$ qui satisfait, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, l'identité (5.4) et la condition aux limites (5.2). L'égalité signifie l'égalité des éléments de $L^2(\partial\Omega)$ et $u|_{\partial\Omega}$ est la trace de u. En fait cette notion de solution généralisée ne généralise pas complètement la solution classique car $u(x)$ classique ne devient une solution généralisée que sous des hypothèses supplémentaires de nature "globale" à savoir $u \in H^1(\Omega)$ et $Lu \in L^2(\Omega)$ avec L l'opérateur de (5.1).

Pour introduire la notion de solution généralisée du $3^{\text{ème}}$ (et du $2^{\text{ème}}$) problème aux limites relatif à (5.1), on procède comme suit : soit $u(x)$ solution classique du $3^{\text{ème}}$ problème aux limites (5.1), (5.3). Supposons que $g(x) \in L^2(\Omega)$, $\varphi(x) \in L^2(\partial\Omega)$. En multipliant l'équation (5.1) par une fonction quelconque $\overline{v}(x) \in H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, on obtient à l'aide de la formule de Green, l'expression suivante :

$$\int_\Omega (k\nabla u \nabla \overline{v} + au\overline{v})dx + \int_{\partial\Omega} k\sigma u\overline{v}dS = -\int_\Omega f\overline{v}dx + \int_{\partial\Omega} k\varphi\overline{v}dS, \tag{5.5}$$

vérifiée par la solution classique $u(x)$, $\forall v(x) \in H^1(\Omega)$.

On appelle solution généralisée du $3^{\text{ème}}$ problème aux limites (ou du problème de Neumann si $\sigma(x) \equiv 0$) pour l'équation (5.1), $g \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$, une fonction $u \in H^1(\Omega)$ qui vérifie pour tout $v \in H^1(\Omega)$, l'identité (5.5).

Les fonctions v de (5.4) et (5.5) ont été supposées complexes, mais elles peuvent également être à valeurs réelles.

L'étude des solutions classiques des problèmes aux limites est une tache plus délicate. On procède comme suit : on construit la solution généralisée, puis après avoir établi (sous certaines hypothèses) sa régularité, on montre qu'il s'agit d'une solution classique.

Démontrons l'existence et l'unicité de le solution généralisée dans un cas simple : considérons le cas de conditions aux limites homogènes c-à-d., quand $\varphi = 0$. Dans ce cas la solution généralisée du problème (5.1), (5.2), est par définition une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaisant pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ à l'identité (5.4). La solution généralisée du $3^{\text{ème}}$ (ou du $2^{\text{ème}}$) problème aux limites (5.1), (5.3) est pour $\varphi = 0$, une fonction $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant pour tout $v \in H^1(\Omega)$, l'identité (poser $\varphi = 0$ dans (5.5)),

$$\int_\Omega (k\nabla u \nabla \overline{v} + au\overline{v})dx + \int_{\partial\Omega} k\sigma u\overline{v}dS = -\int_\Omega g\overline{v}dx. \tag{5.6}$$

Soit $a(x) \geq 0$ dans Ω. On introduit dans $H_0^1(\Omega)$ le produit scalaire

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega (k\nabla u \nabla \overline{v} + au\overline{v})dx,$$

(équivalent à $(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \nabla \overline{v} + u\overline{v})dx$), et (5.4) peut s'écrire sous la forme

$$(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = -(g,v)_{L^2(\Omega)}, \tag{5.7}$$

avec $g \in L^2(\Omega)$ fixe, $(g,v)_{L^2(\Omega)}$ une fonctionnelle linéaire définie sur $H_0^1(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$. Comme

$$\left|(g,v)_{L^2(\Omega)}\right| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}.\|v\|_{H_0(\Omega)},$$

(C étant une constante positive indépendante de g et v), alors cette fonctionnelle est bornée et de norme au plus égale à $C\|g\|_{L^2(\Omega)}$. D'après un théorème de Riesz[1], on trouve dans $H_0^1(\Omega)$ une fonction f telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (g,v)_{L^2(\Omega)} = (f,v)_{H_0(\Omega)}.$$

Cette fonction est unique et satisfait à l'inégalité

$$\|f\|_{H_0^(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par conséquent, $H_0^1(\Omega)$ contient une seule fonction $u = f$ vérifiant (5.7). On a donc prouvé le résultat suivant :

Proposition 32 *Si $a(x) \geq 0$ dans Ω, on associe à tout $g \in L^2(\Omega)$ une solution généralisée unique u du problème (5.1), (5.2) (pour $\varphi = 0$) et*

$$\|u\|_{H_0(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)},$$

où C est une constante positive indépendante de g.

[1] Soient E un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(.,.)$ et l une forme linéaire continue sur E. Alors, il existe un unique $h \in E$ tel que : $l(f) = (f,h)$, $\forall h \in E$.

Si $a(x) \geq 0$ dans Ω et l'une au moins des fonctions $a(x)$ ou $\sigma(x)$ n'est pas identiquement nulle, on munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (k\nabla u \nabla \overline{v} + au\overline{v})dx + \int_{\partial\Omega} k\sigma u\overline{v}dS, \tag{5.8}$$

équivalent au produit scalaire ordinaire, et l'identité (5.6) s'écrit

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = -(g, v)_{L^2(\Omega)}. \tag{5.9}$$

Etant donné la borne, pour $g \in L^2(\Omega)$ fixe, de la fonctionnelle $(g, v)_{L^2(\Omega)}$ linéaire en $v \in H^1(\Omega)$:

$$\left|(g, v)_{L^2(\Omega)}\right| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)} . \|v\|_{H^(\Omega)},$$

(où C est une constante positive indépendante de g et v), il existe dans $H^1(\Omega)$ (d'après le théorème de Riesz), une fonction h telle que :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad (g, v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{H^(\Omega)}.$$

Cette fonction est unique et on a

$$\|f\|_{H^(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dès lors, $H^1(\Omega)$ contient une fonction unique $u = h$ vérifiant (5.9). On a donc démontré le résultat suivant :

Proposition 33 *Si $a(x) \geq 0$ dans Ω et l'une au moins des fonctions $a(x)$ ou $\sigma(x)$ n'est pas identiquement nulle, alors le problème (5.1), (5.3) (avec $\varphi = 0$) admet pour tout $g \in L^2(\Omega)$ une solution généralisée unique u et on a*

$$\|u\|_{H^(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^2(\Omega)},$$

où C est une constante positive indépendante de g.

<u>*Fonctions et valeurs propres*</u> :

Une fonction $u(x) \neq 0$, s'appelle fonction propre du problème de Dirichlet pour l'opérateur

$$L = div(k(x)\nabla) - a(x),$$

s'il existe un nombre λ (valeur propre associée à $u(x)$) tels que : $u(x)$ est solution classique du problème

$$Lu = \lambda u, \quad x \in \Omega \tag{5.10}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Soit λ une valeur propre et $u(x)$ une fonction propre associée du problème de Dirichlet qui appartient à $H_0^1(\Omega)$. En multipliant (5.10) par $\overline{v} \in H_0^1(\Omega)$ quelconque et en intégrant sur Ω, on obtient

$$\int_\Omega (k\nabla u \nabla \overline{v} + au\overline{v})dx = -\lambda \int_\Omega u\overline{v}dx, \tag{5.11}$$

vérifiée par u, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

On appelle fonction propre généralisée du problème de Dirichlet relatif à l'opérateur L, une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ non nulle telle qu'il existe un nombre λ (valeur propre associée à $u(x)$) pour lequel u vérifie l'identité intégrale (5.11), $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Admettons que $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$. On appelle fonction propre du $3^{\text{ème}}$ problème aux limites (ou du problème de Neumann) relatif à l'opérateur

$$L = div(k(x)\nabla) - a(x),$$

une fonction $u(x) \neq 0$ telle qu'il existe un nombre λ (valeur propre associée à $u(x)$) et $u(x)$ est solution classique du problème :

$$Lu = \lambda u, \quad x \in \Omega$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u\right)\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Comme ci-dessus, u vérifie, pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (k\nabla u \nabla \overline{v} + au\overline{v})dx + \int_{\partial\Omega} k\sigma u\overline{v}dS = -\lambda \int_\Omega u\overline{v}dx. \tag{5.12}$$

De même, on appelle fonction propre généralisée du $3^{\text{ème}}$ problème aux limites (ou du problème de Neumann) relatif à l'opérateur L une fonction $u \in H^1(\Omega)$, non nulle telle qu'il existe un nombre λ (valeur propre associée à u) et u vérifie l'identité intégrale (5.12), $\forall v \in H^1(\Omega)$.

Proposition 34 *Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s, ...$ une suite de valeurs propres du 1^{er} ou du $3^{\text{ème}}$ (resp. $2^{\text{ème}}$) problème aux limites relatif à l'opérateur*

$$L = div(k(x)\nabla) - a(x).$$

Ces valeurs propres sont réelles et $\lambda_s \to -\infty$ pour $s \to \infty$. Celles du 1^{er}, du $3^{\text{ème}}$ ($\sigma \neq 0$) et du $2^{\text{ème}}$ ($\sigma = 0$) problème aux limites vérifient pour $a(x) \neq$ constante, l'inégalité

$$\lambda_s < -\min_{x \in \overline{\Omega}} a(x), \quad s = 1, 2, ...$$

Les valeurs propres de Neumann satisfont pour $a(x) = m =$ constante, à l'inégalité

$$\lambda_s \leq -m, \quad s = 1, 2, ...$$

et il existe une valeur propre simple égale à $-m$ et une fonction propre associée $\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$. Les fonctions propres généralisées $u_1(x), u_2(x), ...,$ des problèmes considérés forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$ c-à-d., toute fonction $g \in L^2(\Omega)$ se développe en série de Fourier

$$g = \sum_{s=1}^{\infty} g_s u_s, \quad g_s = (g, u_s)_{L^2(\Omega)},$$

convergente dans $L^2(\Omega)$. S'agissant de $g \in H_0^1(\Omega)$, cette série par rapport aux fonctions propres généralisées du problème de Dirichlet admet une limite dans $H_0^1(\Omega)$ et on a l'inégalité

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s||g_s|^2 \leq C\|g\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

S'agissant de $g \in H^1(\Omega)$, la série ci-dessus par rapport aux fonctions propres généralisées du $3^{\text{ème}}$ (et du $2^{\text{ème}}$) problème aux limites converge dans $H^1(\Omega)$ et on a l'inégalité

$$\sum_{s=1}^{\infty} |\lambda_s||g_s|^2 \leq C\|g\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Problèmes mixtes :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$,

$$Q_T = \{x \in \Omega, 0 < t < T\} \subset \mathbb{R}^n,$$

un cylindre de hauteur $T > 0$,

$$\Gamma_T = \{x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$$

la surface latérale de Q_T,

$$\Omega_\tau = \{x \in \Omega, t = \tau\},$$

une section de Q_T par le plan $t = \tau$,

$$\Omega_T = \{x \in \Omega, t = T\} \subset \mathbb{R}^n,$$

la base supérieure du cylindre Q_T, et

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega, t = 0\} \subset \mathbb{R}^n,$$

la base inférieure du cylindre Q_T.

Soit dans Q_T, $T > 0$, l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div(k(x)\nabla u) + a(x)u = g(x,t), \tag{5.13}$$

où

$$k(x) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \quad a(x) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \quad k(x) \geq k_0 = constante > 0.$$

Une fonction $u(x,t) \in \mathcal{C}^2(Q_T) \cap \mathcal{C}^1(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{\Omega}_0)$ qui vérifie dans Q_T l'équation (5.13), sur Ω_0 les conditions initiales

$$u|_{t=0} = \varphi,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi,$$

et sur Γ_T ou bien la condition aux limites

$$u|_{\Gamma_T} = \zeta,$$

ou bien

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\right|_{\Gamma_T} = \zeta,$$

(σ étant une fonction continue sur Γ_T), s'appelle solution (classique) respectivement du 1^{er} ou du $3^{\text{ème}}$ problème mixte relatif à l'équation (5.13). Si $\sigma = 0$ sur Γ_T, on est dans le $2^{\text{ème}}$ problème mixte. Pour l'étude de l'existence des solutions généralisées des problèmes mixtes, plusieurs méthodes sont possibles : fonctions propres, méthode de Fourier, technique de Galerkin qui constitue en même temps une méthode d'approximation, etc.).

Soit dans Q_T, $T > 0$, l'équation parabolique

$$\frac{\partial u}{\partial t} - div(k(x)\nabla u) + a(x)u = g(x,t), \tag{5.14}$$

où

$$k(x) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \quad a(x) \in \mathcal{C}(\overline{Q}_T), \quad k(x) \geq k_0 = constante > 0.$$

Désignons par $\mathcal{C}^{2r,r}(Q_T)$, $\forall r \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des fonctions $f(x,t)$ continues dans Q_T admettant des dérivées $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^\beta}$ continue dans Q_T, $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + 2\beta \leq 2r$. Pour $r = 0$, on a $\mathcal{C}^{0,0}(Q_T) = \mathcal{C}(Q_T)$. L'ensemble $\mathcal{C}^{2r,r}(Q_T)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{2r,r}(Q_T)} = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+2\beta\leq 2s} \max_{Q_T} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial t^\beta} \right|.$$

De même, on désigne par $\mathcal{C}^{r,0}(Q_T)$, $\forall r \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des fonctions $f(x,t)$ continues dans Q_T admettant des dérivées $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ continue dans Q_T, $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq r$. Pour $r = 0$, on a $\mathcal{C}^{0,0}(Q_T) = \mathcal{C}(Q_T)$. L'ensemble $\mathcal{C}^{r,0}(Q_T)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{r,0}(Q_T)} = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n \leq r} \max_{Q_T} \left| \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|.$$

Une fonction $u(x,t) \in \mathcal{C}^{2,1}(Q_T) \cap \mathcal{C}(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{\Omega}_0)$ vérifiant dans Q_T l'équation (5.14), sur Ω_0 la condition initiale

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{5.15}$$

et sur Γ_T la condition aux limites

$$u|_{\Gamma_T} = \zeta, \tag{5.16}$$

s'appelle solution classique du 1^{er} problème mixte pour l'équation (5.14). Une fonction $u(x,t) \in \mathcal{C}^{2,1}(Q_T) \cap \mathcal{C}(Q_T \cup \Gamma_T \cup \overline{\Omega}_0) \cap \mathcal{C}^{1,0}(Q_T \cup \Gamma_T)$ vérifiant dans Q_T l'équation (5.14), sur Ω_0 la condition (5.15) et sur Γ_T la condition aux limites

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u \right) \Big|_{\Gamma_T} = \zeta,$$

(où $\sigma(x)$ est une fonction continue sur Γ_T), est dite solution classique du $3^{\text{ème}}$ problème mixte pour l'équation (5.14). Lorsque $\sigma = 0$, on est dans le $2^{\text{ème}}$ problème mixte

Chapitre 6

Solutions classiques des équations de Laplace et de Poisson

<u>*Equation de Laplace*</u> :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouver et considérons l'équation

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0, \quad x \in \Omega$$

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant sur Ω l'équation de Laplace est dite harmonique. Si $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ est harmonique, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ mais u n'est pas nécessairement régulière ou continue sur le bord $\partial\Omega$.

Soient $\xi \in \mathbb{R}^n$, $r = \|x - \xi\|$ et $u(x) = v(x)$, v dépendant de r seul. Sans retreidre la généralité, on peut choisir $\xi = 0$. Comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= v'(x)\frac{x_i}{r}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right), \end{aligned}$$

alors $\Delta u = 0$ est équivalente à l'équation

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = 0.$$

Déterminons la solution de cette équation :
- Pour $n = 2$, l'équation ci-dessus s'écrit

$$rv'' + v' = 0 \Longleftrightarrow (rv')' = 0 \Longleftrightarrow rv' = a \equiv constante \Longleftrightarrow dv = a\frac{dr}{r}.$$

D'où,

$$v(r) = a \ln r + b, \quad (a, b = constantes)$$

- Pour $n > 2$, on obtient

$$v(r) = \frac{a}{r^{n-2}} + b, \quad (a, b = constantes)$$

Par conséquent, on a

Proposition 35 *Toutes les fonctions harmoniques dans $\mathbb{R}^n \backslash \{x = \xi\}$ et dépendant de la seule différence $|x - \xi|$ ont la forme*

$$\begin{cases} \dfrac{a}{|x-\xi|^{n-2}} + b, & n > 2 \\ a \ln |x - \xi| + b, & n = 2 \end{cases}$$

où a et b sont des constantes arbitraires.

Une fonction $u(x - \xi)$ harmonique dans $\mathbb{R}^n \backslash \{x = \xi\}$ définie par la formule

$$\varphi(x - \xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\epsilon_n |x-\xi|^{n-2}}, & n > 2 \\ -\dfrac{1}{2\pi} \ln |x - \xi|, & n = 2 \end{cases}$$

(où $\epsilon_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ est le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, ici Γ désigne la fonction gamma d'Euler), s'appelle solution fondamentale de l'équation de Laplace.

Equation de Poisson :

On considére l'équation

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

En tenant compte du fait que :

$$u = \varphi * f = \int_\Omega \varphi(x - y) f(y) dy,$$

on montre le résultat ci-dessous,

Proposition 36 *Soit $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$. Alors,*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-2)\epsilon_n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, & n > 2 \\ -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|).f(y) dy, & n = 2 \end{cases}$$

est bien définie et $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $-\Delta u = f$ sur $\mathbb{R}^n$.

Principe du maximum (unicité) :

Proposition 37 *Soient Ω un ouvert borné et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique sur Ω. On a*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u,$$

et si en outre, il exsite $\xi \in \Omega$ (connexe) avec $u(\xi) = \max_{\overline{\Omega}} u$, alors

$$u = constante,$$

sur Ω.

De même, on a des résultats analogues pour le *min* u. Il suffit de remplacer dans la proposition ci-dessus, u par $-u$.

Corollaire 38 *Soit $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique sur Ω telle que : $u = g$ sur $\partial\Omega$ où $g \geq 0$ avec la condition $g > 0$ en au moins un point de $\partial\Omega$. Alors $u > 0$ partout sur Ω.*

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

Proposition 39 *(unicité). Si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, alors il existe au plus une solution $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ au problème (6.1).*

Régularisation et représentation :

Nous avons déjà signalé que si $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ est harmonique, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ mais u n'est pas nécessairement régulière ou continue sur le bord $\partial\Omega$.

Proposition 40 *Soit $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n > 2$. Alors toute solution bornée de*

$$-\Delta u = f,$$

sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y) f(y) dy + C,$$

où C est une constante.

Les notions d'ouvert Ω borné de classe $\mathcal{C}^1$, de trace sur le bord $\partial\Omega$ et des formules de Green ont été introduites au chapitre 4.

Fonction de Green :

Soient Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \in \Omega$. On désigne par φ^x la fonction correctrice c-à-d., la solution du problème

$$\begin{cases} \Delta\varphi^x = 0 & \text{sur } \Omega \\ \varphi^x = \varphi(y-x) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et par G la fonction de Green de Ω c-à-d.,

$$G(x,y) = \varphi(y-x) - \varphi^x(y),$$

où $(x,y) \in \Omega^2$, $x \neq y$. On a

$$G(x,y) = G(y,x).$$

Proposition 41 *Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est solution du problème (6.1), alors*

$$u(x) = \int_\Omega f(y)G(x,y)dy - \int_{\partial\Omega} g(\sigma)\frac{\partial G}{\partial n}(x,\sigma)d\sigma.$$

Fonction de Green pour le demi-espace :

Soient

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\},$$

le demi-espace et

$$K(x,y) = \frac{2x_n}{d\epsilon_n \|x-y\|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, y \in \partial\mathbb{R}^n_+$$

le noyau de Poisson pour $\mathbb{R}^n_+$.

Proposition 42 *Soit*

$$u(x) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} g(y)K(x,y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$$

Alors, $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^n_+$ et

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = g(x_0), \quad \forall x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$$

Fonction de Green pour la boule :

Soient $B(0,r)$, $r>0$ la boule et

$$K(x,y)=\frac{r^2-\|x\|^2}{d\epsilon_n r\|x-y\|^n},\quad x\in B(0,r),\quad y\in\partial B(0,r)$$

le noyau de Poisson pour $B(0,r)$.

Proposition 43 *Soit*

$$u(x)=\int_{\partial B(0,r)}g(y)K(x,y)dy,\quad x\in B(0,r)$$

Alors, $u\in\mathcal{C}^\infty(B(0,r))$*,* $\Delta u=0$ *sur* $B(0,r)$ *et*

$$\lim_{x\to x_0}u(x)=g(x_0),\quad \forall x_0\in\partial B(0,r)$$

Solution fondamentale de l'équation de la chaleur homogène :

On considère l'équation homogène (équation de la chaleur) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0,$$

où $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ est un ouvert, $f:\mathbb{R}_+^*\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ et $u:\mathbb{R}_+^*\times\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}$ (inconnue).

On appelle solution fondamentale de l'équation ci-dessus, la fonction définie pour $x\in\mathbb{R}^n$, par

$$\varphi(t,x)\begin{cases}\dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

On montre que pour $t>0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t,x)dx=1.$$

$$\text{Problème de Cauchy }:\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0, & t>0, x\in\mathbb{R}^n\\ u(0,.)=g\end{cases}$$

Proposition 44 *Soit*

$$u(t,x)=\varphi(t,.)*g=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t,x-y)g(y)dy,$$

où $t>0$*,* $x\in\mathbb{R}^n$*,* $g\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$*. Alors,* $u\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^n)$*,*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)-\Delta u(t,x)=0,\quad t>0,\quad x\in\mathbb{R}^n$$

et

$$\lim_{(t,x)\to(0,x_0)}u(t,x)=g(x_0),\quad t>0,\quad x_0\in\mathbb{R}^n$$

On montre que si $g \geq 0$, $g \neq 0$, alors

$$\forall t > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad u(t,x) > 0.$$

Problème non homogène :

Pour le problème non homogène, on le résultat suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \qquad\quad u = 0, & t = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Proposition 45 *Soit*

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t-s, x-y) f(s,y) ds dy,$$

où $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in H_0^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$. *Alors,* $u \in H_0^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\lim_{(t,x) \to (0,x_0)} u(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n$$

En combinant les deux propositions précédentes, on obtient le résultat suivant :

Proposition 46

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x-y) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t-s, x-y) f(s,y) ds dy,$$

est solution du problème non homogène :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \qquad\quad u = g, & t = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Principe du maximum (unicité) :

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $T > 0$, $\Omega_T =]0, T[\times \Omega$ un cylindre parabolique et $\partial \Omega_T = \overline{\Omega}_T \backslash \Omega_T = \{0\} \times \Omega \times [0 : T] \times \partial \Omega$ est le bord parabolique.

Proposition 47 *Si* $u \in H^1(\Omega_T) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}_T)$ *est une solution de l'équation de la chaleur sur le cylindre parabolique* Ω_T, *alors*

$$\underset{\overline{\Omega}_T}{max}\, u = \underset{\partial \Omega_T}{max}\, u.$$

En outre, si l'ouvert Ω *est connexe et s'il existe* $(t_0, x_0) \in \Omega_T$ *tels que :* $(t_0, x_0) = \underset{\overline{\Omega}_T}{max}\, u$, *alors* $u =$ *constante sur* $\overline{\Omega}_{t_0}$.

Proposition 48 *Si $f \in \mathcal{C}(\Omega_T)$ et $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega_T)$, alors il existe au plus une solution $u \in H^1(\Omega_T) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega}_T)$ au problème suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & dans\ \Omega_T \\ u = g, & sur\ \partial\Omega_T \end{cases}$$

<u>*Problème de Cauchy*</u> :

Proposition 49 *(Principe du maximum). Si $u \in H^1(]0,T[) \times \mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ est solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & sur\ ]0,T[\times\mathbb{R}^n \\ u = g, & sur\ \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

et si

$$|u(t,x)| \leq Ae^{a|x|^2},$$

où A, a sont des constantes, alors

$$\underset{[0,T]\times\mathbb{R}^n}{sup}\ u = \underset{\mathbb{R}^n}{sup}\ g.$$

Proposition 50 *(Unicité). Soient $f \in\in \mathcal{C}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$. Alors, il existe au plus une solution $u \in H^1(]0,T[) \times \mathbb{R}^n) \times \mathcal{C}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & sur\ ]0,T[\times\mathbb{R}^n \\ u = g, & sur\ \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

telle que :

$$u(t,x)| \leq Ae^{a|x|^2},$$

où A, a sont des constantes.

Notons que sue les bornes, il existe une infinité de solution pour le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & \text{sur }]0,T[\times\mathbb{R}^n \\ u = 0, & \text{sur } \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Proposition 51 *(Régularité). Si $u \in H^1(\Omega_T)$ satisfait l'équation de la chaleur sur le cylindre parabolique Ω_T, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_T)$.*

Chapitre 7

Chapitres complémentaires

(équations de la physique mathématique, étude des EDP via l'analyse de Fourier et la transformée de Laplace, une équation aux dérivées partielles non linéaire : équation de Korteweg-de Vries)

Équations de la physique mathématique

Dans les exercices ci-dessous, on suppose que les conditions de validité des calculs sont satisfaites et la méthode utilisée sera celle de séparation de variables.

Problème 7.1 *(Résolution de l'équation de Laplace). En coordonnées cartésiennes x, y, z, l'équation de Laplace s'écrit*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

que l'on note aussi $\Delta u = 0$ où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ est l'opérateur de Laplace en coordonnées x, y, z. Déterminer les solutions particulières (bornées et continues) de cette équation, en coordonnées sphériques, par la méthode de séparation des variables.

Réponse : En introduisant les coordonnées sphériques r, θ, φ où

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

avec $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, on posera

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r).\Theta(\theta).\Phi(\varphi),$$

où $\Phi(\varphi)$ est uniforme et 2π-périodique, tandis que $R(r).\Theta(\theta)$ est un polynôme trigonométrique. On trouve

$$R(r) = Ar^l + Be^{-l-1}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad A, B = \text{constantes}.$$

(Pour que $R(0)$ soit fini, il faut que l'on ait $B = 0$),

$$\Phi(\varphi) = Ce^{-im\varphi} + De^{im\varphi}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad C, D = \text{constantes},$$

et

$$\Theta(x) = \Theta(\cos\theta) = P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta. \left.\frac{d^m P_l(x)}{dx^m}\right|_{x=\cos\theta},$$

où $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$ (polynômes de Legendre).

Problème 7.2 *Soit l'équation des ondes*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Résoudre cette équation par séparation de variables.

Réponse : On obtient $u(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ avec

$$\begin{aligned} T(t) &= A_1 e^{-ikct} + A_2 e^{ikct}, \\ X(x) &= B_1 e^{-ik_1 x} + B_2 e^{ik_1 x}, \\ Y(y) &= C_1 e^{-ik_2 y} + C_2 e^{ik_2 y}, \\ Z(z) &= D_1 e^{-ik_3 z} + D_2 e^{ik_3 z}, \end{aligned}$$

où $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, k, k_1, k_2, k_3$ sont des constantes.

Problème 7.3 *On reprend l'équation des ondes étudiée dans le problème précédent. Résoudre cette équation, en coordonnées cylindriques, par séparation de variables.*

Réponse : La solution cherchée est

$$u(r, \varphi, z, t) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)T(t),$$

où r, φ, z, sont des coordonnées cylindriques

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

avec $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$, et

$$\begin{aligned} R(r) &= D_1 J_l(\sqrt{k^2 - m^2}\, r) + D_2 Y_l(\sqrt{k^2 - m^2}\, r), \\ \Phi(\varphi) &= C_1 e^{-il\varphi} + C_2 e^{il\varphi}, \\ Z(z) &= B_1 e^{-imz} + B_2 e^{imz}, \\ T(t) &= A_1 e^{-ikct} + A_2 e^{ikct}, \end{aligned}$$

où $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, k, m, l$ sont des constantes et J_l, Y_l sont des fonctions de Bessel :

$$J_l(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^l \sum_{k=l}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+l)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k},$$

$$\begin{aligned} Y_l(t) &= \frac{2}{\pi} J_l(t) \left(\ln \frac{t}{2} + \gamma\right) \\ &\quad -\frac{1}{\pi} \left(\frac{t}{2}\right)^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(l+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \left(\sum_{p=1}^{l+k} \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p}\right) \\ &\quad -\frac{1}{\pi} \left(\frac{t}{2}\right)^{-l} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(l-k-1)!}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}. \end{aligned}$$

où $\gamma = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} dt - \ln k\right) = 0,57721...$ est la constante d'Euler.

Problème 7.4 *On reprend à nouveau l'équation des ondes étudiée dans les problèmes précédents. Résoudre cette équation, en coordonnées sphériques, par séparation de variables.*

Réponse : La solution cherchée est

$$u(r, \varphi, z, t) = R(r).\Theta(\theta).\Phi(\varphi).T(t),$$

où r, θ, φ, sont des coordonnées sphériques

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

avec $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, et

$$\begin{aligned} R(r) &= \sqrt{\frac{k}{s}} \left(C_1 J_{l+\frac{1}{2}}(kr) + C_2 J_{-(l+\frac{1}{2})}(kr)\right), \\ \Theta(\theta) &= = \sin^m \theta. \left.\frac{d^m P_l(x)}{dx^m}\right|_{x=\cos\theta}, \\ \Phi(\varphi) &= B_1 e^{-im\varphi} + B_2 e^{im\varphi}, \\ T(t) &= A_1 e^{-ikct} + A_2 e^{ikct}, \end{aligned}$$

où $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, c, m$ sont des constantes, $l \in \mathbb{N}^*$,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l,$$

sont des polynômes de Legendre et J_l est la fonction de Bessel :

$$J_l(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^l \sum_{k=l}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+l)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}.$$

Problème 7.5 *Considérons l'équation suivante :*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(\lambda-u(r))\psi=0,$$

appelée équation stationnaire de Schrödinger. La fonction ψ (inconnue) est appelée fonction d'onde d'une particule, le paramètre spectral λ est l'énergie de la particule, la fonction $u(r)$ (connue) est le potentiel ou énergie potentielle de la particule, $\hbar$ est la constante de Planck et m est la masse de la particule. Il n'existe qu'un seul atome pour lequel l'équation de Schrödinger admette une solution exacte ; c'est l'atome d'hydrogène. Dans ce cas l'énergie potentielle est de la forme $u(r)=-\frac{e^2}{r}$, où r est la distance de l'électron en mouvement au noyau que l'on prend pour origine des coordonnées et e désigne la charge de la particule. Dès lors, l'équation de Schrödinger s'écrit

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\lambda+\frac{e^2}{r}\right)\psi=0,$$

et le problème consiste à trouver des solutions $\psi(x,y,z)$ uniformes, bornées dans tout l'espace et qui sont nulles à l'infini.

Réponse : On exprime l'équation ci-dessus en coordonnées sphériques (r,θ,φ), et on obtient les solutions de la forme $\psi(r,\varphi,z)=R(r).\Theta(\theta).\Phi(\varphi)$, avec

$$R(r)=r^le^{-\frac{r}{2a}}L_{2l+1+p}^{2l+1}\left(\frac{r}{a}\right),$$

où l et p sont des entiers (Ici $L_n^k(x)$ désigne les polynômes de Laguerre généralisés définies par $L_n^k(x)=\frac{d^k}{dx^k}L_n(x)$, où $L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^{-x}\right)$, $n\in\mathbb{N}$), sont les polynômes de Laguerre),

$$\Theta(x)=\sin^m\theta.\left.\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}\right|_{x=\cos\theta},$$

(ici $P_l(x)=\frac{1}{2^ll!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$ sont des polynômes de Legendre) et $\Theta(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi$, où A et B sont des constantes.

Étude des EDP via l'analyse de Fourier et la transformée de Laplace

Rappel théorique

Dans les exercices ci-dessous, les méthodes utilisées seront celles des séries de Fourier, les transformées de Fourier et les transformées de Laplace. Rappelons quelques résultats sur ces notions (voir par exemple [3] pour plus de détail).

Soit f est une fonction définie et intégrable sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$. On suppose que cette fonction est 2π-périodique. Les nombres a_k et b_k définis par

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx, k\geq 0, \qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx, k\geq 1$$

s'appellent coefficients de Fourier de f et la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

est dite série de Fourier de f. Au lieu de considérer l'intervalle $[-\pi,\pi]$, on peut considérer tout autre intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[0,2\pi]$. Pour une fonction f, $2L$-périodique, définie et intégrable sur un intervalle $[-L,L]$ d'amplitude quelconque finie, la série de Fourier associée à la fonction f est donnée par

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{L}+b_k\sin\frac{k\pi x}{L}\right),$$

où

$$a_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx, k\geq 0, \qquad b_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx, k\geq 1$$

En notation complexe, la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique f s'écrit sous la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx},$$

où

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Si f est $2L$-périodique, sa série de Fourier s'écrit en notation complexe sous la forme

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{i\frac{k\pi}{L}x},$$

où

$$c_k=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\frac{k\pi}{L}x}dx, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Si la série de Fourier associée à une fonction continue f converge uniformément, alors elle converge vers f. Soient $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}(\text{ou }\mathbb{C})$ et $x\in[a,b]$. Nous noterons $f(x+0)$ et $f(x-0)$ les limites à droite et à gauche de f en x. Une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$, est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.

Toute fonction continue est réglée. Toute fonction continue par morceaux est réglée. Toute fonction en escalier est réglée. Toute fonction numérique monotone est réglée. Toute fonction à variation bornée est réglée. On appelle dérivée à droite de f au point x, la limite (si elle existe) suivante :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}.$$

De même, on appelle dérivée à gauche de f au point x, la limite (si elle existe) suivante :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x-0)-f(x-h)}{h}.$$

Le théorème de Dirichlet affirme que si f est une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, réglée et dérivable à droite et à gauche sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge simplement en tout point x vers

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad \text{(régularisée de } f\text{)}.$$

En particulier, si f est continue au point x, sa série de Fourier converge vers la fonction $f(x)$. Ce théorème se généralise évidemment aux séries de Fourier de fonctions $2L$-périodique, définies et intégrables sur un intervalle $[-L,L]$ d'amplitude quelconque finie. Signalons aussi que si f une fonction 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors la série de Fourier de f converge normalement (et par suite absolument et uniformément) vers f sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, un théorème de Jordan affirme que si f est périodique et à variation bornée sur un intervalle d'une période, alors sa série de Fourier converge pour tous les x vers $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. De plus, la convergence vers $f(x)$ est uniforme sur tout intervalle où f est continue.

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$) une fonction appartenant à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f, la fonction $\widehat{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x}dx, \quad \omega\in\mathbb{R}$$

On montre que sous certaines conditions (par exemple $f\in\mathcal{L}^1$ et $\widehat{f}\in\mathcal{L}^1$), on peut obtenir $f(x)$ à partir de $\widehat{f}(\omega)$ par la transformation inverse (dite formule d'inversion de Fourier)

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega x}d\omega.$$

Si $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est continue, bornée, $\widehat{f}(\omega)$ tend vers 0 quand $\omega\longrightarrow\pm\infty$ et $\|\widehat{f}\|_\infty\leq\|f\|_1$. On montre que si $f,g\in\mathcal{L}^1$ et si $\widehat{f}(\omega)=\widehat{g}(\omega)$ alors $f=g$, pour presque tout point de $\mathbb{R}$. En particulier, si f et g sont continues et si $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont égales alors f et g le sont aussi. Signalons quelques propriétés élémentaires sur les transformées de Fourier : soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(x)\} + \beta \mathcal{F}\{g(x)\},$$

$$\mathcal{F}\{f(x-c)\} = e^{-2\pi i\omega c}\widehat{f}(\omega), \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}\{e^{2\pi i\omega_0 x} f(x)\} = \widehat{f}(\omega - \omega_0), \qquad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}\{f(cx)\} = \frac{1}{|c|}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right), \qquad c \in \mathbb{R}^*$$

$$\mathcal{F}\{\overline{f}(x)\} = \overline{\widehat{f}}(-\omega), \quad (- \text{ désigne le conjugué})$$

En outre, la transformée de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire). Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et supposons que f est dérivable et que $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, Alors

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = 2\pi i\omega \mathcal{F}\{f(x)\} = 2\pi i\omega \widehat{f}(\omega).$$

Si en outre, f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n qui sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(x)\} = (2\pi i\omega)^n \mathcal{F}\{f(x)\} = (2\pi i\omega)^n \widehat{f}(\omega).$$

Si f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n qui sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \frac{C}{|\omega|^n}, \quad C \equiv \text{constante}$$

ce qui montre que plus n est grand, plus $\widehat{f}$ décroît rapidement à l'infini. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et supposons que $xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f}$ est dérivable et l'on a

$$\frac{d\widehat{f}(\omega)}{d\omega} = \mathcal{F}\{-2\pi i x f(x)\}.$$

Si en outre, $x^n f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ alors

$$\frac{d^n\widehat{f}(\omega)}{d\omega^n} = \mathcal{F}\{(-2\pi i x)^n f(x)\}.$$

Sous les hypothèses précédentes, on a

$$\frac{d^n\widehat{f}(\omega)}{d\omega^n} \leq (2\pi)^n \int_{-\infty}^{\infty} |x^n f(x)| dx,$$

ce qui signifie que plus f décroît rapidement à l'infini, plus n est grand (c'est-à-dire plus $\widehat{f}$ est dérivable et ses dérivées sont bornées). Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (ou $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$, $x \in \mathbb{R}$) et

$$\mathcal{F}\{(f*g)(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}\mathcal{F}\{g(x)\},$$

autrement dit, la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit ordinaire des transformées de Fourier de chaque facteur.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), une fonction localement sommable. On appelle transformée de Laplace de $f(x)$ la fonction notée $\mathcal{L}\{f(x)\}$ ou $F(p)$, de la variable complexe $p = \sigma + i\omega$ définie par

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx.$$

La fonction f est appelée original de F et F l'image de f. On montre que si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle pour tout $x < 0$, continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et si en outre ils existent des constantes $M > 0$ et σ_0 telles que : $|f(x)| \leq Me^{\sigma_0 x}$, $\forall x \geq x_0$, alors la transformée de Laplace existe pour tout $\sigma > \sigma_0$. Notons que si l'intégrale ci-dessus converge pour $\mathrm{Re}\, p = \sigma_0$, alors il en est de même pour tout p tel que : $\mathrm{Re}\, p \geq \sigma_0$. Soit $f \in \mathcal{L}_{loc}([0, +\infty[)$. Le nombre

$$\sigma_0 = \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : f(x)e^{\sigma x} \in \mathcal{L}_{loc}([0, +\infty[)\},$$

s'appelle abscisse de sommabilité ou abscisse de convergence absolue de la fonction f. Le demi-plan de convergence $\{p = \sigma + i\omega : \mathrm{Re}\, p = \sigma > \sigma_0\}$ est le domaine de sommabilité sur lequel $F(p)$ est défini.

Rappelons un certain nombre de propriétés élmentaires sur les transformées de Laplace. La transformée de Laplace est une application linéaire. Plus précisément, Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pour toutes fonctions f, g, d'abscisses de sommabilité respectives σ_0, ς_0, alors

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(x)\} + \beta\mathcal{L}\{g(x)\} = \alpha F(p) + \beta G(p),$$

où $\mathrm{Re}\, p > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}$. Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{f(x-c)\} = e^{-cp}F(p), \quad \mathrm{Re}\, p > \sigma_0.$$

Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{f(x)e^{-\alpha x}\} = F(p+\alpha), \quad \mathrm{Re}(p+\alpha) > \sigma_0.$$

Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{f(cx)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{p}{c}\right), \quad c > 0.$$

Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{\overline{f}(x)\} = \overline{F}(\overline{p}), \quad (- \text{ désigne le conjugué})$$

La transformée de Laplace d'une fonction localement sommable f, est une fonction holomorphe dans le domaine de sommabilité $\{p \in \mathbb{C} : \text{Re } p > \sigma_0\}$ et on a la formule

$$F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-x)^n f(x) e^{-px} dx = (-1)^n \mathcal{L}\{x^n f(x)\}.$$

Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$ et $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\} = F(p)G(p), \quad \text{Re } p > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}$$

où σ_0 et ς_0 sont les indices de sommabilité de f et g respectivement. Soit f une fonction localement sommable. On suppose que pour tout $x > 0$, f est continue, sa dérivée $f'(x)$ existe et est continue par morceaux. S'il existe des constantes $M > 0$ et σ_0 telles que : $|f(x)| \leq M e^{\sigma_0 x}$, pour tout $x \geq x_0$, alors

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = p\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+) = pF(p) - f(0^+), \quad \text{Re } p > \sigma_0$$

En général, si $f(x)$ est discontinue aux points $x_1, ..., x_n$, alors

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = p\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+) - \sum_{k=1}^{n} e^{-px_k}(f(x_k^+) - f(x_k^-)).$$

Notons aussi que les expressions ci-dessus se généralisent par récurrence pour les dérivées d'ordres supérieures. Par exemple pour l'expression ci-dessus, supposons que f est localement sommable, f est continue pour tout $x > 0$, les dérivées $f'(x), ..., f^{(n-1)}(x)$ existent et sont continues par morceaux, il existe des constantes $M > 0$ et σ_0 telles que : $|f(x)| \leq M e^{\sigma_0 x}$ pour tout $x \geq x_0$, alors

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \cdots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+).$$

Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) dt\right\} = \frac{F(p)}{p}, \quad \text{Re } p > \max(0, \sigma_0).$$

Si f est une fonction ayant un abscisse de sommabilité σ_0, alors pour Re $p > \sigma_0$, on a $\lim_{p\to\infty} F(p) = 0$. Si f est une fonction ayant une transformée de Laplace et telle que $f(0^+)$ existe, alors $\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0^+)$. Si f est une fonction ayant une transformée de Laplace et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ existe et est finie, alors $\lim_{p\to 0} pF(p) = f(+\infty)$.

Soit $F(p) = F(\sigma + i\omega)$ une fonction holomorphe dans $\{p \in \mathbb{C} : \text{Re } p > \sigma_0\}$. On suppose que $\lim_{|p|\to+\infty} |F(p| = 0$ pour $\text{Re } p > \sigma_0$ et pour tout $\sigma > \sigma_0$, la fonction $\omega \in \mathbb{R} \longmapsto F(\sigma + i\omega)$ est sommable sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire F est une fonction sommable en ω, pour tout $\sigma > \sigma_0$). Alors l'original f de F est donné par la formule de Bromwich-Wagner suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{px} dp, \quad \sigma > \sigma_0$$

Dans l'intégrale de Bromwich-Wagner, l'intégration de la fonction d'une variable complexe se fait le long d'une droite parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse $\sigma > \sigma_0$, située dans le domaine de convergence et parcourue de bas en haut. Toutes les singularités de $F(p)$ sont à gauche de cette droite, puisque celle-ci est située à droite de l'abscisse de sommabilité σ_0. Dans certains cas, il est nécessaire de calculer cette intégrale, en utilisant les techniques d'intégration d'une fonction d'une variable complexe, notamment la méthode habituelle des résidus. Rappelons qu'un théorème de Cauchy, affirme que si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si γ est un chemin fermé contenu dans Ω, alors $\int_\gamma f(z)dz = 0$. De même, si $f(z)$ est une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, sauf en $z_1, z_2, ..., z_k$, si γ est un chemin fermé contenu dans Ω entourant tous ces points et si γ_j $(1 \leq j \leq k)$ est un chemin fermé contenu dans le domaine intérieur à γ entourant z_j et n'entourant pas les autres z_l $(l \neq j)$, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

D'après le théorème des résidus, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un domaine, $z_1, z_{2,...,} z_k \in \Omega$ et $f : \Omega \backslash \{z_1, z_{2,...,} z_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$, est une fonction holomorphe, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{Rés} f(z, z_0),$$

où γ est un chemin fermé contenu dans Ω à l'intérieur duquel sont contenus tous les z_j. Signalons que lorsque z_0 est un pôle d'ordre m de la fonction $f(z)$, alors

$$\text{Rés} f(z, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z)\right).$$

De même, lorsque z_0 est un pôle simple de la fonction $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, avec $P(z_0) \neq 0$ et $Q(z_0) = 0$, alors $\text{Rés} f(z, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ si $Q'(z_0) \neq 0$. Lorsque z_0 est un point singulier essentiel de $f(z)$, le résidu s'obtient en développant $f(z)$ en série de Laurent autour de z_0. Dans les résultats (lemmes de Jordan) qui suivent γ_1 (resp. γ_2) désignera le demi-cercle de centre 0 et de rayon r (resp. ε). Si $|f(z)| \leq \frac{M}{r^k}$ pour $z = re^{i\theta}$, où $k > 1$ et M sont des constantes, alors $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)dz = 0$. Si $|f(z)| \leq \frac{M}{r^k}$ pour $z = re^{i\theta}$, où $k > 0$ et M sont des constantes, alors $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)e^{imz}dz = 0$. Si $z = 0$ est un pôle simple de $f(z)$, alors $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = -\pi i \text{Rés} f(z,0)$. Pour les intégrales faisant appel à des «fonctions» multiformes, le principe de la méthode est le même, à ceci près que les intégrants multiformes doivent être uniformisés au moyen d'une coupure adéquate. Les contours d'intégration ne pouvant pas traverser ces coupures, l'intégrant sera déterminé univoquement par une de ses déterminations le long de ces contours. Cependant, dans la pluspart des applications courantes, l'image $F(p)$ est une fraction rationnelle et il est plus simple d'effectuer une décomposition en éléments simples de la fonction plutôt que d'utiliser la formule de Bromwich-Wagner. Pour faciliter l'utilisation des transformées de Laplace usuelles, nous groupons quelques unes dans le tableau ci-dessous :

$f(x)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx$
1	$\frac{1}{p}$
e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$
x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$
x^α, $\alpha > 1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$e^{bx}\sin ax$	$\frac{a}{(p-a)^2+a^2}$
$e^{bx}\cos ax$	$\frac{p-b}{(p-a)^2+a^2}$
$e^{bx}\sinh ax$	$\frac{a}{(p-a)^2-a^2}$
$e^{bx}\cosh ax$	$\frac{p-b}{(p-a)^2-a^2}$
$x\sin ax$	$\frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$
$x\cos ax$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
$x^n e^{-ax}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\ln x$	$-\frac{\gamma+\ln p}{p}$, $\gamma = 0.57721...$, (constante d'Euler)

Dans ce tableau, $\Gamma(\alpha)$ désigne la fonction gamma d'Euler (voir par exemple [3]).

Résolution de quelques équations aux dérivées partielles

Exercice 7.1 *(Equation de la chaleur). Soit une plaque carrée dont les côtés ont la longueur π et telle que : ses faces sont isolées, trois de ses côtés sont maintenus à la température zéro, le quatrième côté est maintenu à la température T_0. La température au point $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ et à l'instant $t \geq 0$ est représentée par une fonction $u(x, y)$ satisfaisant (dans $]0, \pi[\times]0, \pi[\times]0, \infty[$) à* *l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

où $\kappa \neq 0$ est une constante. Notre problème consiste à déterminer la température d'état stationnaire ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$) en tout point de la plaque. Dans ce cas, l'équation aux dérivées partielles précédente devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Cette équation s'appelle équation de Laplace en deux variables. Les conditions aux limites s'expriment par

$$u(0, y) = u(x, 0) = u(\pi, y) = 0, \quad u(x, \pi) = T_0.$$

Résoudre l'équation ci-dessus, par la méthode de séparation des variables et les séries de Fourier.

<u>*Réponse*</u> : On obtient la solution :

$$u(x, y) = \frac{2T_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos k\pi)}{\pi k \sinh k\pi} \sin kx . \sinh ky.$$

Exercice 7.2 *On considère l'équation aux dérivées partielles (équation des cordes vibrantes) :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0$$

où $u(x, t)$ est l'amplitude des mouvements transversaux de la corde et $c > 0$ est une constante (vitesse de la propagation) connue. On suppose que la corde est homogène et tendue entre ses extrémités fixes 0 et l. Déterminer la solution de cette équation qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} u(x, 0) &= f(x) \quad (\textit{déformation initiale de la corde en } t = 0), \quad 0 < x < l, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < l, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

<u>*Réponse*</u> : On obtient la solution

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^{\infty} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \right) \sin \frac{k\pi}{l} x \cos \frac{k\pi c}{l} t.$$

Exercice 7.3 *On considère l'équation de la chaleur :*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad t>0$$

où $u:[0,L]\times[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R},(x,t)\longmapsto u(x,t)$ *est une fonction continue sur* $[0,L]\times[0,+\infty[$ *et de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0,L[\times]0,+\infty[$. *On suppose satisfaites les conditions aux limites :* $u(x,t)=u(L,t)=0$, $L>0$, *ainsi que les conditions initiales :* $u(x,0)=\varphi(x)$, *où* $\varphi:[0,L]\longrightarrow\mathbb{R}$ *est une fonction* $2L$*-périodique, impaire et de classe* $\mathcal{C}^4$. *Déterminer* $u(x,t)$, $0\leq x\leq L$, *à l'aide des séries de Fourier.*

Exercice 7.4 *En utilisant la transformée de Fourier, déterminer la solution* $u(x,t)$ *de l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad a>0$$

avec la condition initiale : $u(x,0)=\varphi(x)$ *où* $\varphi(x)$ *est la température à l'instant* $t=0$.

Réponse : On obtient la solution

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi\sqrt{a\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{16a\pi^2 t}}dy.$$

Exercice 7.5 *En utilisant la transformée de Fourier, déterminer la solution* $u(x,t)$ *de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$$

avec la condition : $u(x,0)=\varphi(x)$ *(fonction connue) et* $\lim\limits_{y\to 0}u(x,y)=0$. *(On suppose évidemment que* u *et* f *satisfont aux conditions d'utilisation des transformées de Fourier).*

Réponse : On obtient la solution

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\varphi(t)dt.$$

Exercice 7.6 *Même question que l'exercice précédent pour l'équation des cordes vibrantes :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x\in\mathbb{R},t\in\mathbb{R}_+$$

avec les conditions : $u(x,0)=\varphi(x)$ *et* $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x)$, *où* φ *et* ψ *sont des fonctions connues.*

Réponse :

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+\alpha t)+\varphi(x-\alpha t)}{2} + \frac{1}{2\alpha}\int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t}\psi(s)ds.$$

Exercice 7.7 *Déterminer la solution $u(x,t)$ de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

satisfaisant aux conditions : $u(x,0) = \sin x$, $u(0,t) = 0 = u(\pi,t) = 0$, avec $0 < x < 1$, $t > 0$.

Réponse : On trouve

$$u(x,t) = -e^{-t}\sin x.$$

Exercice 7.8 *Déterminer la solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

qui satisfait aux conditions suivantes : pour $x = 0$, on a

$$u(0,t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0 \\ f(t) & si\ t > 0 \end{cases}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \begin{cases} 0 & si\ t \leq 0 \\ g(t) & si\ t > 0 \end{cases}$$

où f et g sont deux fonctions données, définies pour $t > 0$. On pourra admettre la légitimité des calculs. On représentera u par une intégrale de la forme

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)e^{-a^2\omega^2 t}d\omega,$$

où $A(\omega)$ est une fonction paire et $B(\omega)$ est une fonction impaire et l'on se ramène à un problème de transformée de Laplace en posant $p = a^2\omega^2$.

Réponse : On obtient

$$u(x,t) = a^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(a^2\omega^2)\omega\cos\omega x + G(a^2\omega^2)\sin\omega x\right)e^{-a^2\omega^2 t}d\omega.$$

Exercice 7.9 *Déterminer la solution $u(x,t)$ de l'équation aux dérivées partielles (des ondes ou des cordes vibrantes) :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

satisfaisant aux conditions : $u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $u(0,t) = \sin x$, $x,t > 0$. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ tel que : $|(u(x,t)| \leq M$.

<u>*Réponse*</u> : On trouve

$$u(x,t) = \begin{cases} \sin(t-x) & \text{si } t > x \\ 0 & \text{si } t < x \end{cases}$$

Exercice 7.10 *Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables x, y et supposons qu'elle satisfait aux conditions suivantes :*

(i) pour $x < 0$, on a $f(x,y) = 0$.

(ii) pour $x > 0$, f satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f = 0.$$

(iii) pour $x = 0$, on a $f(0,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$.

(iv) f est bornée lorsque $y \longrightarrow +\infty$.

(v) pour $y = 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = -u(x)$ où $u(x)$ est une fonction connue ayant une transformée de Laplace $U(p) = \mathcal{L}\{u(x)\}$.
En utilisant la méthode de Laplace, déterminer $f(x,0)$.

<u>*Réponse*</u> : On trouve

$$f(x,0) = \int_0^x u(x-\tau)J_0(\tau)d\tau,$$

où $J_0(\tau)$ est la fonction de Bessel.

Exercice 7.11 *Déterminer la solution $u(x,t)$ de l'équation aux dérivées partielles :*

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

satisfaisant aux conditions : $u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0$, $u(0,t) = 1$, $x,t > 0$. On suppose que : $|(u(x,t)| \leq M$ où $M > 0$ est une constante.

<u>*Réponse*</u> : On obtient la solution

$$u(x,t) = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\zeta t}\sin\sqrt{\zeta}x\cosh\sqrt{\zeta}x}{\zeta}d\zeta.$$

Exercice 7.12 *Déterminer la solution de l'équation au dérivées partielles*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

telle que : $u(x,0) = 20\cos 3x - 5\cos 9x$, $u(\frac{\pi}{2},t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$.

Réponse : $u(x,t) = 20e^{-27t}\cos 3x - 5e^{-243t}\cos 9x$.

Exercice 7.13 *Résoudre l'équation au dérivées partielles*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4u - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

avec les conditions : $u(x,0) = 6\sin x - 4\cos 2x$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

Réponse : $u(x,t) = 6e^{-5t}\sin x - 4e^{-8t}\sin 2x$.

Exercice 7.14 *Déterminer la solution de l'équation au dérivées partielles*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + xe^{-y} = 0, \quad u(x,0) = x, \quad 0 < x < 1, y > 0.$$

Réponse : $u(x,y) = x(1+y)e^{-y}$.

Exercice 7.15 *Déterminer la solution* $u(x,y,t)$ *de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

satisfaisant aux conditions :

$$u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = u(x,y,0) = 0, \quad u(x,0,t) = \frac{1}{4}, \quad 0 < x < \pi, y, t > 0.$$

On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ *tel que :* $|(u(x,y,t)| \leq M$.

Réponse : On obtient

$$u(x,y,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\cos k\pi)\sin kx}{k} \int_{\frac{y}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-(\eta^2 + \frac{k^2y^2}{4\eta^2})} d\eta.$$

Une équation aux dérivées partielles non linéaire : équation de Korteweg-de Vries

Korteweg et de Vries[1] ont établi une équation aux dérivées partielles non linéaire décrivant l'onde de gravité qui se propage dans un canal peu profond et possèdant des propriétés mathématiques remarquables :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{7.1}$$

[1]Korteweg, D.J. and de Vries, G., On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves, Phil. Mag., 39 (1895), 422-443.

où $u(x,t)$ est l'amplitude de l'onde au point x et au temps t. L'équation portant ainsi leur nom (abrégé dans la suite comme KdV) admet une solution : le soliton ou onde solitaire. En fait, ce modèle a été obtenu à partir des équations d'Euler (en supposant l'écoulement irrotationnel) par Boussinesq vers 1877 et redécouvert par Korteweg et de Vries en 1890. La solution de cette équation n'a été obtenue et interprétée de manière rigoureuse qu'au début des années 1970 alors qu'une onde solitaire a été déjà observé en 1834 par l'ingénieur Scott-Russell se promenant à cheval le long du canal Edinburgh-Glasgow en Ecosse ; il décrivait son observation d'un phénomène d'hydrodynamique comme suit : " J'observais le mouvement rapide d'un bateau qui était tiré le long d'un canal étroit par deux chevaux quand, soudain, le bateau stoppa net. Mais il n'en fut pas de même pour la masse d'eau qu'il avait mise en mouvement dans le canal. Cette masse d'eau s'accumula autour de la proue du bateau dans un état de forte agitation puis soudainement, l'abandonna et continua à se mouvoir avec une célérité en prenant la forme d'une grande élévation solitaire au profil arrondi, bien définie et apparemment sans changement de forme ou diminution de vitesse. Je la suivis à cheval et la dépassais alors qu'elle roulait encore à la vitesse de 8 ou 9 miles à l'heure, conservant sa forme originale avec trente pieds de long et un pied et demi en hauteur. Sa hauteur diminua peu à peu, et après une poursuite d'un ou deux miles, je la perdais finalement parmi les vagues du canal. Ce fut en ce mois d'août 1834 ma première rencontre avec ce phénomène singulier et magnifique ". Fasciné par ce phénomène, Scott-Russell a construit un bassin à vagues dans son jardin et s'est employé à générer et à étudier ces vagues plus attentivement. Cela a mené à un document [32] baptisé "The Report on waves" publié en 1844 par la British association for the advancement of science. Un peu plus tard, Boussinesq, puis Korteweg et de Vries proposèrent l'équation (7.6.1) pour expliquer ce phénomène. L'équation de KdV conserve la masse, la quantité de mouvement, l'énergie ainsi que de nombreuses autres quantités. De nombreuses expériences ont mis à jour les étonnantes propriétés des solutions de cette équation satisfaisant à des conditions aux limites nulles : lorsque $|t| \longrightarrow \infty$, ces solutions se décomposent en solitons, c-à-d., en ondes de formes définies progressant à des vitesses différentes. Ces ondes se propagent sur de longues distances sans déformation et l'une des caractéristiques remarquables des solitons est qu'ils sont exceptionnellement stables vis-à-vis des perturbations ; le terme $u\frac{\partial u}{\partial x}$ conduit à des ondes de chocs tandis que le terme $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ produit un effet de dispersion. Chacun peut contempler des solitons à l'endroit où la marée vient mourir sur les plages. Dans le domaine de l'hydrodynamique par exemple, les tsunamis (raz de marée) sont des manifestations des solitons. Généralement, on regroupe sous le vocable soliton des solutions d'équations d'ondes non-linéaires présentant les propriétés caractéristiques suivantes : elles sont localisées dans l'espace, durent indéfiniment et conservent leur amplitude et leur vitesse même à l'issue de plusieurs collisions avec d'autres solitons. Les solitons sont devenus indispensables pour l'étude de plusieurs phénomènes. Notamment, l'étude de la propagation d'ondes en hydrodynamique, d'ondes localisées dans les plasmas astrophysiques, Ils interviennent dans l'étude des signaux dans les fibres optiques, les phénomènes de transport de charge dans les polymères conducteurs, les modes localisés dans des cristaux magnétiques, etc...Des sociétés industrialisées ont mis au point, à la suite d'études sur les solitons, ce qu'on peut appeler des lasers solitaires. Ces derniers jouent un rôle important dans le domaine des télécommunications. Des signaux lumineux ultra-courts envoyés dans certaines fibres optiques faites d'un matériau bien précis, peuvent voyager sur de longues distances sans s'allonger ni s'atténuer. La construction de mémoires à temps de communication ultra-rapide et à faible consommation d'énergie, est basée sur le mouvement de tourbillons magnétiques dans la jonction diélectique qui sépare deux supraconducteurs. Au niveau moléculaire, la théorie des solitons permet d'élucider le mécanisme de contraction des muscles striés, la dynamique de macromolécules biologiques comme l'ADN et les protéines. Dans la chaîne de peptides et d'hydrogène des protéines, les solitons naissent du mariage de la dispersion due aux vibrations intrapeptides et de la non-linéarité due à l'interaction de ces vibrations avec les déplacements de groupes peptides autour de leur position d'équilibre. Mais aussi la théorie des solitons a eu un impact sur les mathématiques pures ; par exemple, il fournit la réponse au fameux problème de Schottky, posé il y a un siècle, sur les relations entre les périodes provenant d'une surface de Riemann. Grosso modo, il s'agit de trouver des critères pour qu'une matrice des périodes appartenant au demi-espace de Siegel soit la matrice des périodes d'une surface de Riemann. Géométriquement, le problème de Schottky consiste à caractériser les jacobiennes parmi toutes les variétés abéliennes principalement polarisées. A part l'équation de KdV, on peut citer à titre d'exemples parmi les équations non-linéaires ayant des solutions de type soliton : l'équation non-linéaire de Kadomtsev-Petviashvili :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(4\frac{\partial u}{\partial t}-12u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)=0,$$

l'équation de Schrödinger non-linéaire :

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\psi|^2\psi=0,$$

l'équation de Sine Gordon :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin u=0,$$

l'équation de Boussinesq :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}=0,$$

l'équation de Camassa-Holm :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + 3u\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

le réseau de Toda décrit par un système :

$$\dot{x}_j = y_j \qquad \dot{y}_j = -e^{x_j - x_{j+1}} + e^{x_{j-1} - x_j},$$

de masses vibrantes disposées sur un cercle et reliées entre elles par des ressorts dont la force de rappel est exponentielle. Les solitons sont apparus dans bien d'autres domaines ; en particulier l'équation de Klein Gordon non-linéaire, l'équation de Zabusky-Kruskal pour le modèle de Fermi-Pasta-Ulam des phonons dans un réseau anharmonique, etc...

Examinons d'abord quelques solutions particulières de l'équation de KdV, de l'espèce des ondes progressives :

$$u(x,t) = s(x - ct),$$

où c est la vitesse de phase. En remplaçant cette expression dans l'équation (7.1), on obtient l'expression

$$-c\frac{\partial s}{\partial x} - 6s\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial^3 s}{\partial x^3} = 0.$$

En intégrant cette équation par rapport à x et en imposant la condition au limite que s et ses dérivées décroissent pour $|x| \longrightarrow \infty$, on obtient

$$-cs - 3s^2 + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0,$$

d'où

$$-cs - 2s^3 + \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

et l'expression exacte de la solution s nécessite l'utilisation des fonctions elliptiques. Supposons que $\frac{\partial s}{\partial x}(0) = 0$, dans ce cas la solution de cette dernière équation est

$$s(x - ct) = -\frac{c}{2}\,\mathrm{sech}^2\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct),$$

où sech désigne la sécante hyperbolique, c-à-d., $\frac{1}{\cosh}$. Par conséquent

$$u(x,0) = u_0\,\mathrm{sech}^2\frac{x}{l},$$

où $u_0 \equiv -\frac{c}{2}$ et $l^2 \equiv \frac{4}{c}$. Cette expression montre que u démeure infiniment longtemps dans la position $u \simeq 0$, ensuite il atteint la valeur u_0, se réfléchit sur ce point et revient de nouveau dans la position de $u \simeq 0$. Cette solution porte le nom de solution d'onde solitaire ou soliton. Pour obtenir cette solution, on pourra utiliser des transformations dites de Bäcklund pour l'équation de KdV. Lorsque les solitons se heurtent, les dimensions et vitesses des solutions ne changent pas après collision. Ce phénomène remarquable a suggéré l'idée de lois de conservation. Et effectivement, Kruskal, Zabusky, Lax, Gardner, Green et Miura ont réussi à trouver toute une série d'intégrales premières pour l'équation de KdV. Ces intégrales sont de la forme $\int P_n\left(u, ..., u^{(n)}\right) dx$, où P_n est un polynôme. En effet, les équations de conservation que l'on peut déduire de l'équation de KdV prennent la forme générale suivante :

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} + \frac{\partial Q_n}{\partial x} = 0,$$

où les fonctions P_n et Q_n forment une série de fonctions dont voici les trois premières :

(i) L'équation de KdV peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0.$$

D'où

$$P_1 = u, \qquad Q_1 = -3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(ii) Multiplions l'équation de KdV par u, cela donne

$$u\frac{\partial u}{\partial t} - 6u^2\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-2u^3 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) = 0.$$

D'où

$$P_2 = \frac{u^2}{2}, \qquad Q_2 = -2u^3 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

(iii) On a

$$\left(3u^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) = 0,$$

$$\left(3u^2\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) +$$

$$\left(-18u^3\frac{\partial u}{\partial x} + 3u^2\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u^3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{9}{2}u^4+3u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right)=0,$$

d'où

$$P_3=u^3+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,\qquad Q_3=-\frac{9}{2}u^4+3u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Si u s'annule pour $x\to\infty$, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\int P_n dx=0,$$

donc $\int P_n dx$ sont des intégrales premières de l'équation de KdV. Posons maintenant $u(x,t)=\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$ et supposons que $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}$ décroient quand $|x|\to\infty$. L'équation de KdV, s'écrit :

$$\frac{\partial y}{\partial t}-3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}=0.$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}y(x,t)dx=3\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2(x,t)dx=3\int_{-\infty}^{\infty}u^2(x,t)dx=\text{constante}.$$

Comme $u=\frac{\partial y}{\partial x}$, nous avons aussi

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}y(x,t)dx &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x}u(z,t)dzdx,\\ &= x\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{x}u(z,t)dz\Big|_{-\infty}^{\infty}-\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}u(z,t)dx,\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}xu(x,t)dx,\end{aligned}$$

car par hypothèse u^2 et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tendent vers 0 quand $|x|\to\infty$. En comparant les deux expressions obtenues, on obtient une nouvelle intégrale première :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}xu(x,t)dx=\text{constante}.$$

Lax a montré que l'équation de KdV est équivalente à l'équation (qui porte son nom) :

$$\frac{dA}{dt}=[A,B],$$

où $[A,B] = AB - BA$ et

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t), \qquad B = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3\left(2u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

On en déduit que le spectre de A est conservé : si A est un opérateur symétrique ($A^\top = A$) et T une transformation orthogonale ($T^\top = T^{-1}$), alors le spectre de $T^{-1}AT$ coincide avec celui de A. L'apparition d'une série infinie d'intégrales premières s'explique aisément par l'équation de Lax.

L'équation de Strum-Liouville :

$$A\psi = \lambda\psi,$$

où λ est un paramètre réel, peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (\lambda - u(x,t))\psi = 0. \tag{7.2}$$

Cette équation nous rappelle l'équation unidimensionnelle et stationnaire de Schrödinger. Dans la suite nous verrons que la solution complète de l'équation de KdV est étroitement liée à la solution de cette équation. Nous allons nous intéresser aux solutions pour lesquelles u décroît suffisamment vite pour $x \longrightarrow \pm\infty$. Soulignons au passage qu'il existe d'autres conditions intéressantes à savoir : le cas où $u(x,t)$ tend vers des constantes différentes pour $|x| \longrightarrow \infty$ et celui où $u(x,t)$ est périodique en x. Considérons donc l'équation (7.2) où $u(x,t)$ est solution de l'équation de KdV (7.1). On suppose qu'au bout d'un certain temps, l'équation (7.2) a N états liés avec pour énergie $\lambda_n = -k_n^2$, $n = 1,2,...,N$ et des états continus avec pour énergie $\lambda = k^2$. Pour l'étude de la partie discrète du spectre $\lambda_n(t) = -k_n^2(t)$, on a

Proposition 52 *Si ψ_n (fonction mesurable et de carré intégrable) et $\frac{\partial\psi_n}{\partial x}$ tendent vers zéros quand $|x|$ tend vers l'infini, alors $\lambda_n(t) =$ constante et la solution de l'équation (7.2) est donnée par $\psi_n(t) = c_n(0)e^{k_n(x-4k_n^2 t)}$, où $c_n(0)$ est déterminée par la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$ de l'équation de KdV.*

Pour l'étude de la partie continue du spectre $\lambda(t) = k^2(t)$, on procède comme suit : on suppose qu'une onde plane stationnaire se propage à partir de $x = -\infty$ et rencontre un potentiel $u(x,t)$ avec un coefficient de transmission T et un coefficient de réflexion R. Dans ce cas l'équation (7.2) admet une solution ψ telle que :

$$\psi = \begin{cases} T(k,t)e^{ikx}, & x \to +\infty \text{ (à droite de la barrière potentielle)} \\ e^{ikx} + R(k,t)e^{-ikx}, & x \to +-\infty \text{ (à gauche de la barrière potentielle)} \end{cases}$$

où $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Proposition 53 *Si $u \simeq 0$ pour $|x| \to \infty$, alors on a*

$$T(k,t) = T(k,0), \qquad R(k,t) = R(k,0)e^{-8ik^3t},$$

où $R(k,0)$ et $T(k,0)$ sont déterminés par la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$ de l'équation de KdV.

La connaissance de $c_n(t)$, $k_n(t)$, $n = 1, 2, ..., N$ et $R(k,t)$ permet d'exprimer $u(x,t)$ pour un temps quelconque ; c'est le problème de la diffusion inverse. Ce dernier se réduit à la solution $K(x,y;t)$, $(y \leq x)$, de l'équation intégrale linéaire de Gelfand-Levitan :

$$K(x,y;t) + I(x+y,t) + \int_{-\infty}^{x} I(z+y)K(x,z;t)dz = 0, \tag{7.3}$$

où

$$I(\mu,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(k,t)e^{-ik\mu}dk + \sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)e^{k_n(t)\mu}.$$

La solution $u(x,t)$ de l'équation de KdV est donnée par

$$u(x,t) = 2\frac{d}{dx}K(x,x;t). \tag{7.4}$$

L'équation de KdV qui est non-linéaire est transformée en l'équation de Gelfand-Levitan qui est linéaire. Le problème initial est ainsi complètement résolu. Cette méthode présente deux simplifications majeures. Tout d'abord dans l'approche analytique de la solution de l'équation de KdV, il suffit à chaque étape de ne résoudre que des équations linéaires. Ensuite t n'apparait que paramétriquement et de plus bien que pour tout t l'équation de Gelfand-Levitan semble superficiellement être une équation intégrale de deux variables, réellement x intervient comme un paramètre et nous avons donc à faire à une famille d'équations intégrales pour les fonctions $K(x,y)$ d'une seule variable y.

Avant de traiter le cas de N solitons, revenons d'abord au cas d'un soliton et considérons la solution

$$u(x,t) = -\frac{c}{2}\,\text{sech}^2\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct),$$

de l'équation de KdV obtenue précédemment avec la condition initiale suivante :

$$u(x,0) = -2\,\text{sech}^2 x,$$

où par convention on a posé $c = 4$. L'équation de Schrödinger (7.2) s'écrit

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (2\,\text{sech}^2 x + \lambda)\psi = 0. \tag{7.5}$$

Pour étudier l'équation (7.5), on pose

$$\psi = A \operatorname{sech}^{\alpha} x.w(x), \tag{7.6}$$

où A est une amplitude arbitraire, $\alpha^2 = -\lambda$ et w satisfait à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2\alpha \tanh x \frac{\partial w}{\partial x} + (2 + \alpha - \alpha^2) \operatorname{sech}^2 x.w = 0.$$

En faisant la substitution $u = \frac{1}{2}(1 - \tanh x)$, cette équation se ramène à une équation différentielle hypergéométrique de Gauss :

$$u(1-u)\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + (c - (a+b+1)u)\frac{\partial w}{\partial u} - abw = 0,$$

dans laquelle $a = 2 + \alpha$, $b = -1 + \alpha$, $c = 1 + \alpha$. Cette équation présente trois points singuliers réguliers : $u = 0$, $u = 1$, $u = \infty$. La solution de cette équation pour $u = 0$ est

$$\begin{aligned} w &= F(a,b,c,u) = 1 + \frac{ab}{c}.\frac{u}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}.\frac{u^2}{2!} \\ &\quad + \frac{a(a+1)...(a+n-1)b(b+1)...(b+n-1)}{c(c+1)...(c+n-1)}.\frac{u^n}{n!} + \cdots \end{aligned} \tag{7.7}$$

Pour $x \to \infty$ (c-à-d., quand $u \to 0$), on a $w \to 1$. D'après l'expression (7.6), on a

$$\psi = A2^{\alpha}(e^x + e^{-x})^{-\alpha}.w(x),$$

et celle-ci tend vers $Ae^{2\alpha}e^{-\alpha x}$ quand $x \to \infty$. Pour représenter une onde plane Ae^{ikx} allant à $+\infty$, nous poserons $\alpha = -ik$. La forme asymptotique de la fonction d'onde pour $x \to -\infty$ ($u \to 1$) s'obtient en transformant la fonction hypergéométrique à l'aide de la relation fonctionnelle

$$\begin{aligned} F(a,b,c,u) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a,b,a+b-c+1,1-u) \\ &+ (1-u)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a,c-b,c-a-b+1,1-u), \end{aligned}$$

où $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{z-1}dt$, Re $z > 0$, est la fonction gamma d'Euler. En tenant compte de (7.6.7) et de l'expression ci-dessus, la relation (7.6) devient

$$\begin{aligned} \psi &= A \operatorname{sech}^{\alpha} x \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \left(1 + \frac{ab}{a+b-c+1}(1-u) + \cdots\right)\right. \\ &\quad \left. + (1-u)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(1 + \frac{(c-a)(c-b)}{c-a-b+1}(1-u) + \cdots\right)\right]. \end{aligned}$$

Lorsque $u \to 1$ ($x \to -\infty$), on a $(1-u)^{c-a-b} \to e^{-2\alpha x}$ et puisque $\alpha = -ik$, alors

$$\psi \longrightarrow Ae^{\alpha}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(e^{ikx}+\frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a+b-c)}\right).$$

Cette expression combinée avec le fait que ψ tend vers $Ae^{2\alpha}e^{-\alpha}$ lorsque $x \to \infty$, nous donnent le coefficient de transmission $T = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}$ et le coefficient de réflexion $R = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a+b-c)}$. Pour un soliton individuel, l'équation (7.1) a une solution précise. Il s'avère que le soliton d'amplitude u_0 n'a qu'un seul niveau discret à valeur propre $\lambda = \frac{u_0}{2}$, tandis que le niveau suivant correspond au point $\lambda = 0$ (avec la fonction propre $\psi = \tanh x$) et appartient déjà au spectre continu. L'équation de Gelfand-Levitan (7.3) où

$$I(\mu,t) = c_1^2(t)e^{k_1\mu} = c_1^2(0)e^{-8k_1t}e^{k_1t} = 2e^{-8t+\mu},$$

s'écrit

$$K(x,y;t) + 2e^{-8t+x+y} + 2e^{-8t+y}\int_{-\infty}^{x} e^{z}K(x,z;t)dz = 0.$$

En posant $K(x,y,t) = f(x)e^{y}$, on obtient

$$f(x) + 2e^{-8t+x} + e^{-8t+2x}f(x) = 0,$$

d'où $f(x) = -2\frac{e^{-x}}{1+e^{8t-2x}}$. Par conséquent, la solution (7.6.4) de l'équation de KdV dans le cas d'une onde solitaire est

$$u(x,t) = 2\frac{d}{dx}K(x,x,t) = -\frac{2}{\cosh^2(x-4t)} = -2\,\mathrm{sech}^2(x-4t).$$

Cela illustre la méthode de solution et la correspondance entre valeur propre et solution.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas de N-solitons. Afin de résoudre l'équation de Gelfand-Levitan (7.3), où $R(k,t) = 0$, on pose

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{N} w_n(x,t)e^{k_n y}, \tag{7.8}$$

où w_n sont des fonctions à déterminer. En remplaçant cette expression dans l'équation de Gelfand-Levitan, on obtient le système d'équations algébriques linéaires pour w_n, $n = 1, ..., N$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} w_1(x,t) + c_1^2(t)e^{k_1x} + \sum_{m=1}^{N} c_1^2(t)\frac{e^{(k_1+k_m)x}}{k_1+k_m}w_m(x,t) = 0,\\ \vdots \\ w_N(x,t) + c_N^2(t)e^{k_Nx} + \sum_{m=1}^{N} c_N^2(t)\frac{e^{(k_N+k_m)x}}{k_N+k_m}w_m(x,t) = 0. \end{array}\right.$$

Définissons les notations suivantes :

$$A = \left(c_n^2(t)e^{(k_n+k_m)x}\right), \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} c_1^2(t)e^{k_1 x} \\ \vdots \\ c_N^2(t)e^{k_N x} \end{pmatrix},$$

$$P \equiv (P_{nm}) = \left(\delta_{nm} + c_n^2(t)\frac{e^{(k_n+k_m)x}}{k_n+k_m}\right) = I + A, \tag{7.9}$$

où I est la matrice unité. Le système ci-dessus s'écrit $PW = -G$, et on montre aisément qu'il a une solution unique. De l'équation (7.8), on tire

$$K(x,x) = h^\top w = -h^\top P^{-1}G, \quad h \equiv \begin{pmatrix} e^{k_1 x} \\ \vdots \\ e^{k_N x} \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}P_{nm} &= c_m^2 e^{k_n x}.e^{k_m x}, \\ \det P &= \sum_{n=1}^{N}\left(\delta_{nm} + c_n^2(t)\frac{e^{(k_n+k_m)x}}{k_n+k_m}\right)\alpha_{nm}, \\ P^{-1} &= \frac{\alpha_{nm}}{\det P},, \end{aligned}$$

où α_{nm} est le cofacteur de P, donc

$$K(x,x) = -\sum_{n,m}\frac{\alpha_{nm}}{\det P}\frac{d}{dx}P_{nm} = -\frac{1}{\det P}\frac{d}{dx}(\det P) = -\frac{d}{dx}\ln\det P,$$

et d'après (7.4.4), on a

$$u = 2\frac{d}{dx}K(x,x) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\det P.$$

Par conséquent, on a

Théorème 54 *La solution de l'équation de KdV est donnée par la fonction*

$$u = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\det P,$$

où P est défini par (7.6.9) et dont lequel $c_n(t) = c_n(0)e^{-4k_n^3 t}$, avec $k_n > 0$ distincts.

La fonction obtenue dans le théorème ci-dessus est négative pour tout x, continue et se comporte comme l'exponentielle quand $|x| \to \infty$. Pour avoir une idée sur le comportement des solitons et en particulier sur leur comportement asymptotique, supposons que $k_1 < k_2 < ... < k_{N-1} < k_N$.

Théorème 55 *La solution explicite de N-solitons de l'équation de KdV est donnée par*

$$u(x,t) = \begin{cases} -2\sum_{n=1}^{N} k_n^2 \ sech^2(k_n\xi_n + \delta_n^+), & t \to +\infty \\ -2\sum_{n=1}^{N} k_n^2 \ sech^2(k_n\xi_n + \delta_n^-), & t \to -\infty \end{cases}$$

où

$$\delta_n^+ \equiv \frac{1}{2}\ln\frac{c_n^2}{2k_n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{k_j-k_n}{k_j+k_n}\right)^2, \quad \delta_n^- \equiv \frac{1}{2}\ln\frac{c_n^2}{2k_n}\left(\prod_{j=n+1}^{N}\frac{k_j-k_n}{k_j+k_n}\right)^2,$$

sont les changements de phase.

Remarque 56 *On peut interpréter ce résultat de la manière suivante : par exemple pour $t \to \infty$, on a*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} u(x-ct) = \begin{cases} -2k_n^2 \ sech^2\left(k_n(x-4k_n^2t)+\delta_n^+\right) & si \ c = 4k_n^2 \\ 0 & si \ c \neq 4k_n^2 \end{cases}$$

C'est la forme d'une onde solitaire d'amplitude $2k_n^2$, se propageant à droite avec une vitesse constante égale à $4k_n^2$. La solution de l'équation de KdV se divise réellement en N-solitons à la limite pour $|t| \to \infty$. Cela indique que chaque soliton préserve sa forme après les collisions. Ces derniers sont analysées par les changements de phase δ_n^+ et δ_n^-. Le changement de phase relative est déterminé par

$$\begin{aligned} \delta_n^+ - \delta_n^- &= \frac{1}{2}\ln\frac{c_n^2}{2k_n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{k_j-k_n}{k_j+k_n}\right)^2 - \frac{1}{2}\ln\frac{c_n^2}{2k_n}\left(\prod_{j=n+1}^{N}\frac{k_j-k_n}{k_j+k_n}\right)^2, \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\ln\frac{k_j-k_n}{k_j+k_n} - \sum_{j=n+1}^{N}\ln\frac{k_j-k_n}{k_j+k_n}, \end{aligned}$$

et il s'exprime en fonction des k_j $(1 \leq j \leq N)$. Comme les k_j sont invariantes par rapport au temps, alors les $\delta_n^+ - \delta_n^-$ le sont aussi. Rappelons que nous avons supposé $k_1 < k_2 < ... < k_N$, donc

$$\delta_1^+ - \delta_1^- = -\sum_{j=2}^{N}\ln\frac{k_j-k_1}{k_j+k_1} > 0, \qquad \delta_N^+ - \delta_N^- = \sum_{j=1}^{N-1}\ln\frac{k_N-k_1}{k_N+k_1} < 0.$$

En outre, on montre aisément que : $\sum_{n=1}^{N}\delta_n^+ = \sum_{n=1}^{N}\delta_n^-$.

Bibliographie

[1] Arnold, V.I. : *Lectures on partial differential equations*, Springer-Verlag, 2004.

[2] Dieudonné, J. : *Éléments d'analyse, tomes 7 et 8*. Gauthier-villars, Paris, 1978.

[3] Lesfari, A. : *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace (Cours et exercices)*. Éditions Ellipses, Paris, 2012.

[4] Lesfari, A. : *Etude des équations stationnaire de Schrödinger, intégrale de Gelfand-Levitan et de Korteweg-de-Vries. Solitons et méthode de la diffusion inverse*. Aequationes mathematicae, Springer, Vol. 85, 243-272, 2013.

[5] Lesfari, A. : *Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles (Cours et exercices corrigés)*. Éditions Ellipses, Paris, Mars 2015.

[6] Mikhailov, V. : *Équations aux dérivées partielles*. Éditions Mir,Moscou 1980.

[7] Reinhard, R. : *Équations aux dérivées partielles : introduction*. Dunod, Paris, 1991.