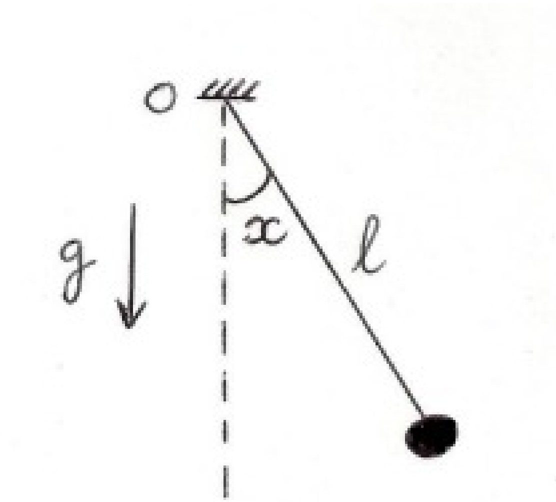
Etude du pendule simple

A. Lesfari
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

La résolution de l'équation différentielle du mouvement du pendule simple n'est étudiée ordinairement que dans le cas de petites oscillations car la résolution dans le cas général n'est pas aisée. Nous allons voir que dans le cas général cette équation est résoluble sous forme explicite au moyen d'intégrales elliptiques, donc sa solution s'obtient à l'aide de fonctions elliptiques. Ces dernières sont des fonctions méromorphes doublement périodiques (pour de plus amples informations sur les fonctions et intégrales elliptiques, on pourra consulter avec profit notre article [4] ou l'un des ouvrages proposés en bibliographie).

Le pendule simple est constitué par un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil (ou une tige théoriquement sans masse) astreint à se mouvoir sans frottement sur un cercle vertical. On désigne par l la longueur du fil (i.e., le rayon du cercle), g l'accélération de la pesanteur et x l'angle instantané du fil avec la verticale.



L'équation du mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin x = 0. \tag{1}$$

Posons

$$\theta = \frac{dx}{dt},$$

l'équation (1) s'écrit

$$\theta d\theta + \frac{g}{l}\sin x dx = 0.$$

En intégrant, on obtient

$$\frac{\theta^2}{2} = \frac{g}{l}\cos x + C,$$

où C est une constante. Lorsque $t = 0$, $x = x_0$ (angle initial), alors $\theta = 0$ (la vitesse est nulle), d'où

$$C = -\frac{g}{l}\cos x_0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{l}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= \frac{l}{2g}\theta^2, \\ &= \cos x - \cos x_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Nous allons étudier plusieurs cas :

a) Considérons le cas d'un mouvement oscillatoire, i.e., le cas où la masse passe de $x = x_0$ (le plus grand angle atteint par le pendule ; il y correspond une vitesse $\theta = 0$) à $x = 0$ (vitesse maximale). Comme

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2},$$

alors l'équation (2) devient

$$\frac{l}{4g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \sin^2\frac{x_0}{2} - \sin^2\frac{x}{2}. \tag{3}$$

Posons

$$\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{x_0}{2}\sin\varphi,$$

d'où

$$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx = \sin\frac{x_0}{2}\cos\varphi d\varphi,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}dx = \sin\frac{x_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}d\varphi,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{x_0}{2}\sin^2\varphi}dx = \sin\frac{x_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}d\varphi,$$

et donc

$$dx = \frac{2\sin\frac{x_0}{2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{x_0}{2}\sin^2\varphi}}d\varphi.$$

Par substitution dans (3), on obtient

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\left(1 - k^2 \sin^2 \varphi\right),$$

où $k = \sin \frac{x_0}{2}$ est le module et $\frac{x_0}{2}$ l'angle modulaire. Notons que pour $x = 0$ on a $\varphi = 0$ et dès lors

$$t = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

D'après la théorie des fonctions et intégrales elliptiques, on a donc

$$\begin{aligned} \varphi &= \pm\mathbf{am}\sqrt{\frac{g}{l}}t, \\ \sin\varphi &= \pm\sin\mathbf{am}\sqrt{\frac{g}{l}}t = \pm\mathbf{sn}\sqrt{\frac{g}{l}}t, \end{aligned}$$

où $\mathbf{am}\sqrt{\frac{g}{l}}t$ est l'amplitude de $\sqrt{\frac{g}{l}}t$ et $\mathbf{sn}\sqrt{\frac{g}{l}}t$ est la fonction elliptique de Jacobi (pour les définitions et propriétés concernant ces fonctions, voir par exemple [4]). Par conséquent

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sin\frac{x_0}{2}\mathbf{sn}\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

b) Considérons le cas d'un mouvement circulaire. On écrit l'équation (2) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{l}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} - \cos x_0, \\ &= (1 - \cos x_0)\left(1 - k^2\sin^2\frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

où

$$k^2 = \frac{2}{1 - \cos x_0},$$

avec $0 < k < 1$. En tenant compte de la condition initiale $x(0) = 0$, on obtient

$$dt = \pm\sqrt{\frac{2l}{g(1 - \cos x_0)}}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}, \quad \varphi = \frac{x}{2}.$$

Donc

$$\varphi = \pm\mathbf{am}\sqrt{\frac{g(1 - \cos x_0)}{2l}}t,$$

et

$$x = \pm 2\mathbf{am}\sqrt{\frac{g(1-\cos x_0)}{2l}}t.$$

c) Considérons enfin le cas d'un mouvement asymptotique. C'est le cas où $x_0 = \pm\pi$ et l'équation (2) s'écrit

$$\frac{l}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \cos x + 1 = 2\cos^2\frac{x}{2}.$$

D'où

$$t = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^x \frac{dx}{\cos\frac{x}{2}} = \pm\sqrt{\frac{l}{g}}\ln\tan\left(\frac{x}{\pi}+\frac{\pi}{4}\right),$$

et

$$x = 4\arctan e^{\pm\sqrt{\frac{g}{l}}t} - \pi.$$

On vérifie que $x \to \pm\pi$ quand $t \to \infty$.

Remarque 1 *Pour des petites oscillations, on peut approcher* $\sin x$ *par* x *et l'équation (1) se ramène à une équation linéaire,*

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0,$$

dont la solution générale est immédiate :

$$x(t) = C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + C_2\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

où

$$C_1 = x(0), \qquad C_2 = \frac{dx}{dt}(0).$$

Pour des petites oscillations la période T du pendule (le temps nécessité pour une oscillation complète ; un aller-retour) est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Par contre, dans le cas des oscillations qui ne sont pas nécessairement petites, la période vaut

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},$$

avec $k = \sin\frac{x_0}{2}$.

Références

[1] N.I. Akhiezer, *Elements of the Theory of Elliptic Functions*, AMS Translations of mathematical monographs, 79 (1990).

[2] J.V. Armitage and W.F. Eberlein, *Elliptic Functions*, London Mathematical Society Student Texts vol. 67, Cambridge University Press 2006.

[3] D.F. Lawden, *Elliptic Functions and Applications*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 80, Springer-Verlag, 1989.

[4] A. Lesfari, *Fonctions et Intégrales elliptiques*, Surv. Math. Appl., **3** (2008), 27-65.

[5] V. Prasolov and Y. Sobolovyev, *Elliptic Functions and Elliptic Integrals*, AMS Translations of mathematical monographs, 170 (1997).