Principe du maximum et formule de Gutzmer

A. Lesfari
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr
Site web : http://lesfari.com

Théorème 1. *(principe du maximum). Si le module d'une fonction holomorphe sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, atteint son maximum en un point de Ω (c.-à-d., s'il existe un disque ouvert $D = \{z : |z - z_0| < R\} \subset \Omega$ et tel que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ dans ce disque), alors cette fonction est constante.*

Démonstration : Montrons d'abord que pour tout $z \in D$, $|f(z)| = |f(z_0)|$, c'est-à-dire $|f(z_0)|$ est maximum. On a

$$z - z_0 = re^{i\theta}, \quad r \in [0, R[, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Par hypothèse, on a

$$\left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| \leq |f(z_0)|,$$

et d'après le théorème de la moyenne [2], on a

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = |f(z_0)|.$$

Dès lors, on a égalité partout et

$$\int_0^{2\pi} \left(\left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| - |f(z_0)|\right) d\theta = 0.$$

Or

$$\left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| - |f(z_0)| \leq 0,$$

et comme f est continue sur $[0, 2\pi]$, alors

$$\left|f(z_0 + re^{i\theta})\right| = |f(z_0)|,$$

c'est-à-dire $f(z)| = |f(z_0)|$. Cette dernière expression montre que $|f|^2 = f\overline{f}$ est constant sur le disque D et on a

$$\frac{\partial}{\partial z}(f\overline{f}) = 0.$$

D'où
$$\frac{\partial f}{\partial z}\overline{f}+f\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}\overline{f}+f\overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}=0.$$
Or f est holomorphe, donc $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$ et dès lors
$$\frac{\partial f}{\partial z}\overline{f}=0,$$
et $|f|=|\overline{f}|=$ constante. D'après l'équation ci-dessus, si $\overline{f}$ s'annule en un point a, alors
$$|\overline{f}(z)|=|\overline{f}(a)|=0.$$
Donc $f\equiv 0$ et en particulier f est constante. Si maintenant $\overline{f}$ ne s'annule pas, alors $\frac{\partial f}{\partial z}=0$. Comme $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}(z)$, on en déduit que f est constante sur D. Par conséquent f est constante sur Ω, en vertu du principe du prolongement analytique.

Note : Une autre preuve consiste à utiliser la formule de Gutzmer (voir exercice ci-dessous),
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|^2d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\left|f^{(k)}(z_0)\right|^2\frac{r^{2k}}{(k!)^2}.$$
En effet, si $|f|$ atteint son maximum, noté M, en un point z_0 de Ω, alors d'après la formule de Gutzmer, on a
$$M^2+\sum_{k=1}^{\infty}\left|f^{(k)}(z_0)\right|^2\frac{r^{2k}}{(k!)^2}\leq M^2.$$
D'où $f^{(k)}(z_0)=0$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, et le développement de la fonction f en série entière au voisinage de z_0 montre que sur le cercle $\{z:|z-z_0|=R\}$, on a $f(z)=M$. Il suffit dès lors, d'appliquer le principe des zéros isolés à la fonction $f-M$ et ainsi on a $f(z)=M$ sur Ω.

Exercice 1. *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine contenant*
$$\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq r\}.$$
Démontrer la formule de Gutzmer :
$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2r^{2k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(z_0+re^{i\theta})\right|^2d\theta\leq M_r^2,$$
où les a_k sont les coefficients du développement en série entière de f au voisinage de z_0 et
$$M_r=\sup\{|f(z)|:|z-z_0|=r\}.$$

<u>*Solution*</u> : Par hypothèse, f est holomorphe au voisinage de z_0, donc

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Dès lors,

$$\overline{f(z_0 + re^{i\theta})} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k r^k e^{-ik\theta},$$

et

$$\left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k r^k f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ik\theta}.$$

Rappelons qu'une série entière converge normalement (donc absolument et uniformément) dans tout compact contenu dans le disque ouvert de convergence. D'après le théorème d'intégration, on peut intervertir les signes d'intégration et de sommation,

$$\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a}_k r^k \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l e^{i(l-k)\theta} d\theta, \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^l \int_0^{2\pi} e^{i(l-k)\theta} d\theta, \\ &= 2\pi a_k r^k, \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|^2 d\theta = 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}.$$

Enfin, l'inégalité s'obtient immédiatement en prenant le maximum de la fonction sous le signe intégrale.

<u>*Notes*</u> : *a) En tenant compte du fait que* $a_k = \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, *la formule de Gutzmer s'écrit sous la forme*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \left|f^{(k)}(z_0)\right|^2 \frac{r^{2k}}{(k!)^2}.$$

b) Une autre méthode pour démontrer cette formule consiste à utiliser la théorie des séries de Fourier [1]. La fonction

$$\theta \longmapsto f(z_0 + re^{i\theta}),$$

est développable en série de Fourier

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} r^k e^{ik\theta},$$

et la formule en question résulte immédiatement de l'égalité de Parseval [1].

References

[1] Lesfari, A. : Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace (Cours et exercices). Ellipses, Paris (2012).

[2] Lesfari, A. : Variables complexes (Cours et exercices corrigés). Ellipses, Paris (2014).