Principe variationnel, Equations de Lagrange et Equation d'Hamilton-Jacobi

A. Lesfari
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Table des matières

1. Principe variationnel, Equations de Lagrange

Soit

$$\gamma = \{(t, q) : q = q(t), t_1 \leq t \leq t_2\},$$

une courbe définie sur une variété différentiable et reliant deux points $t = t_1$ et $t = t_2$. Considérons la fonctionnelle

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt, \tag{1}$$

où $\dot{q}(t) = \dfrac{dq}{dt}$ et

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (q, \dot{q}, t) \longmapsto L(q, \dot{q}, t),$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Le problème variationnel consiste à trouver la fonction $q(t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec

$$q(t_1) = a, \quad q(t_2) = b, \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

telle que l'intégrale (1) (dite intégrale d'action ou tout simplement action) soit extrémale (maximale ou minimale). Géométriquement, on cherche l'arc de la courbe joignant le point $A(t_1, a)$ au point $B(t_1, b)$ admettant une tangente qui varie continûment pour lesquel l'intégrale (1) soit stationnaire. Cette dernière signifie que si on considère la fonction

$$t \longmapsto q(t) + \varepsilon x(t),$$

avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$ petit et $x(t)$ une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant à $x(t_1) = x(t_2) = 0$. Alors la fonction Φ est stationnaire pour q si

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q(t) + \varepsilon x(t), \dot{q}(t) + \varepsilon \dot{x}(t), t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt = o(\varepsilon).$$

En désignant par $\delta\varphi$ la différentielle partielle d'une fonction $\varphi(\alpha, ...)$,

$$\delta\varphi = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0},$$

on symbolise souvent le fait que l'intégrale (1) est extrémale en écrivant $\delta\Phi = 0$, lors d'une variation (indiquée par la lettre δ) fonctionnelle des chemins. Celà signifie que la différence entre cette intégrale évaluée le long de la trajectoire réelle et l'intégrale évaluée le long de n'importe quelle trajectoire virtuelle infiniment voisine est un infiniment petit du second ordre.

Exemple 1 *Dans le cas particulier où $L = \sqrt{1 + c^2}$, i.e.,*

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{q}^2},$$

on obtient la longueur de la courbe γ.

Remarque 1 *En mécanique lagrangienne et hamiltonienne (voir plus loin), L est appelée le lagrangien du principe variationnel et il est égal à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Le principe de Hamilton est*

$$\delta\Phi = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt = 0,$$

avec $\delta q_i(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ pour le mouvement réel du système à étudier.

Proposition 1 *La fonctionnelle (1) est différentiable* [1] *et sa différentielle $F(h)$ est donnée par*

$$F(h) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h \right)\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} \Phi(\gamma+h) - \Phi(h) &= \int_{t_1}^{t_2} (L(q+h, \dot{q}+\dot{h}, t) - L(q,\dot{q},t)dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} \right) dt + o(h^2). \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} F(h) &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} \right) dt, \\ R &= o(h^2), \end{aligned}$$

on obtient

$$\Phi(\gamma+h) - \Phi(\gamma) = F + R.$$

D'un autre côté et par intégration par parties, on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{h} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} h \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt,$$

et par conséquent

$$F(h) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} h \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} h \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt,$$

ce qui termine la preuve. □

Définition 2 *Une courbe γ est dite extrémale d'une fonctionnelle différentiable (1) si et seulement si pour tout h, $F(h,\gamma) = 0$.*

---

[1] Rappelons que la fonctionnelle Φ est différentiable si

$$\Phi(\gamma+h) - \Phi(\gamma) = F + R,$$

où F désigne la différentielle de Φ et telle que : $F(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha F(h_1) + \beta F(h_2)$ et $R(h,\gamma) = o(h^2)$. On dit aussi que F (resp. h) est une variation de la fonctionnelle Φ (resp. la courbe γ).

Théorème 3 *La courbe γ est extrémale de la fonctionnelle (1) si et seulement si l'équation différentielle (dite d'Euler-Lagrange) est satisfaite :*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{2}$$

Démonstration : D'après la proposition précédente, on a

$$F(h) = \int_{t_1}^{t_2} h\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right) dt,$$

car $h(t_1) = h(t_2) = 0$. La suite de la preuve utilise le lemme fondamental du calcul variationnel : Si $f(t)$ est une fonction continue sur $[t_1, t_2]$ telle que pour toute fonction $g(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ nulle en t_1 et t_2, on ait $\int_{t_1}^{t_2} f(t)g(t)dt = 0$ alors $f(t) = 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$. Donc d'après ce lemme appliqué aux fonctions

$$f(t) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right),$$

et $g(t) = h(t)$, on a

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0.$$

La réciproque est évidente car si cette dernière équation est satisfaite alors on a bien $F(h) = 0$, ce qui achève la démonstration. □

Exemple 2 *Géodésiques dans le plan et sur une surface : Dans un domaine suffisamment petit entourant deux points d'une surface S, on appelle géodésique une ligne qui réalise le plus court chemin entre ces deux points. Ainsi, dans le plan euclidien, les géodésiques sont les droites et sur une sphère les géodésiques sont les grands cercles. Dans le plan, la longueur de l'arc de courbe d'équation $q = q(t)$ qui joint le point $A(t_1, a)$ au point $B(t_2, b)$ est*

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{q}^2}dt.$$

L'équation d'Euler-Lagrange avec $L = \sqrt{1 + \dot{q}^2}$ s'écrit

$$\frac{\dot{q}}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}} = constante.$$

D'où $\dot{q}$ est constante, les extrémales sont des droites, le plus court chemin entre A et B est réalisé par le segment de droite AB. Dans le cas d'une surface S, supposons que soit donnée une représentation paramétrique en fonction des paramètres u, v. L'élément d'arc ds s'exprime par

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Rechercher le plus court chemin sur la surface S entre deux points $A(u = t_1, v = v_1)$ et $B(u = t_2, v_2)$ revient à chercher la fonction $v = v(u)$ qui rende minimale l'intégrale

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2} du,$$

et qui prenne pour t_1 la valeur v_1 et pour t_2 la valeur v_2. On en déduit l'équation différentielle des géodésiques

$$\frac{d}{du} \frac{F + G\dot{v}}{\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}} = \frac{\frac{\partial E}{\partial v} + 2\frac{\partial F}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial G}{\partial v}\dot{v}^2}{2\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}}.$$

2. Transformation de Legendre

Nous allons voir qu'à l'aide d'une transformation dite de Legendre, on peut associer aux équations de Lagrange (2) qui sont des équations du second ordre, un système de $2n$ équations différentielles du premier ordre appelé équations canoniques de Hamilton. Mais avant celà, rappelons tout d'abord ce qu'est une transformation de Legendre. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe, $f"(x) > 0$. La transformation de Legendre de f est une fonction $G(s)$ d'une nouvelle variable s définie comme suit : Considérons dans le plan des (x, y), le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = sx$, $s \in \mathbb{R}$. Déterminons un point $x = x(s)$ tel que la distance verticale

$$F(s, x) \equiv sx - f(x),$$

soit maximale. Autrement dit, $x = x(s)$ est le point le plus éloigné de la droite par rapport à la direction de l'axe des y. En ce point (s'il existe, il est unique puisque f est convexe), on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = s - f'(x) = 0,$$

et la tangente $y = f'(x)$ est parallèle à la droite $y = sx$. Dès lors, on définit la fonction $G(s)$ en posant

$$G(s) = F(s, x(s)) = \max_x (sx - f(x)).$$

Exemple 3 *Soit $f(x) = x^2$. On a $F(s, x) = sx - x^2$ et $\frac{\partial F}{\partial x} = s - 2x = 0$. D'où $x(s) = \frac{s}{2}$ et dès lors $G(s) = F(s, x(s)) = \frac{s^2}{4}$.*

La transformation de Legendre est involutive. Deux fonctions f et g sont dites duales (au sens de Young) si elles se déduisent l'une de l'autre par la transformation de Legendre. En fait la transformation de Legendre peut-être considérée comme un procédé qui permet de passer des fonctions définies sur un espace vectoriel à des fonctions sur l'espace dual. Un des intérêts de cette transformation est d'exprimer une fonction en fonction de sa dérivée première et non de la variable elle-même.

On suppose maintenant que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe définie sur $\mathbb{R}^n$ avec $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$; la forme quadratique $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx, dx\right)$ étant définie positive. La transformation de Legendre de f est une nouvelle fonction $G(s)$ de plusieurs variables $s = (s_1, ..., s_n)$ définie de façon similaire au cas précédent à l'aide des formules :

$$G(s) = F(s, x(s)) = \max_x F(s, x) = \max_x((s, x) - f(x)), \quad s = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

De manière plus explicite, prenons le cas d'une fonction $f(x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_m)$ dépendant de $n + m$ variables et supposée deux fois continûment dérivables par rapport aux x_i et une fois par rapport aux λ_i. On introduit de nouvelles variables $s_1, ..., s_n$ par les formules de transformations

$$s_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., s_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

On suppose que ces formules sont inversibles en exigeant par exemple que le déterminant de la matrice hessienne $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ soit non nul. Les quantités $\lambda_1, ..., \lambda_m$ apparaissent simplement comme des paramètres dans la transformation. Introduisons maintenant la fonction G en posant

$$G(s_1, ..., s_n; \lambda_1, ..., \lambda_m) = \sum_{i=1}^n s_i x_i - f(x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_m).$$

Dans cette égalité, on suppose évidemment que les x_i sont exprimés par rapport aux s_i. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial s_k} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial s_k} s_i + x_k - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s_k}, \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial s_k}(s_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}) + x_k, \\ &= x_k, \end{aligned}$$

car $s_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$. De même, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \lambda_k} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} s_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} - \frac{\partial f}{\partial \lambda_k}, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} (s_i - \frac{\partial f}{\partial x_i}) - \frac{\partial f}{\partial \lambda_k}, \\
&= -\frac{\partial f}{\partial \lambda_k}.
\end{aligned}$$

Dès lors, les formules de la transformation de Legendre s'écrivent sous la forme

$$G(x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} s_i x_i - f(x_1, ..., x_n; \lambda_1, ..., \lambda_n),$$

$$s_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad x_i = \frac{\partial G}{\partial s_i}, \qquad \frac{\partial G}{\partial \lambda_k} = -\frac{\partial f}{\partial \lambda_k}.$$

3. Equations canoniques de Hamilton

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$, $q = (q_1, ..., q_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\dot{q} = (\dot{q_1}, ..., \dot{q_n}) \in \mathbb{R}^n$. L'application

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (q, \dot{q}, t) \longmapsto L(q, \dot{q}, t),$$

est dite fonction lagrangienne si L et $\frac{\partial L}{\partial q}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et si L est un polynôme du second degré en les variables $\dot{q_1}, ..., \dot{q_n}$. On définit n nouvelles variables $p = (p_1, ..., p_n)$ en posant

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, t).$$

On considère le hamiltonien défini par la fonction

$$H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (p, q, t) \longmapsto H(p, q, t),$$

où

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q_i} - L(q_1, ..., q_n, \dot{q_1}, ..., \dot{q_n}, t),$$

avec H, $\frac{\partial H}{\partial q}$ et $\frac{\partial H}{\partial p}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Notons que cette expression n'est rien d'autre qu'une transformation de Legendre appliquée sur le lagrangien L, aux variables $\dot{q_i}$; les variables $\dot{q_i}$ et t étant passives. Ici aussi le déterminant de la matrice hessienne de L par rapport aux $\dot{q}_i$ est non nul. En différentiant l'équation ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt, \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t}dt., \end{aligned}$$

car $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. D'après l'équation d'Euler-Lagrange, on a

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i,$$

donc

$$dH = \sum_{i=1}^{n}(\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Comme la différentielle de la fonction $H = H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, t)$ est donnée par

$$dH = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt,$$

on en déduit par comparaison, les expressions suivantes :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

D'où,

Théorème 4 *Les équations d'Euler-Lagrange (2) sont équivalentes au système canonique de Hamilton*

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

pour $i = 1, ..., n$.

Ces équations d'Hamilton constituent un système de $2n$ équations différentielles ordinaires du premier ordre et sont connues lorsqu'on connait la fonction H (hamiltonien) défini ci-dessus. En mécanique hamiltonienne, H est égal à la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. L'espace $\mathbb{R}^{2n}$ des $2n$-uples de nombres $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$ porte le nom d'espace de phase du problème et les équations (3) déterminent un champ de vecteurs hamiltonien sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Notons que lorsque l'hamiltonien ne dépend pas explicitement de t (i.e., cas des systèmes conservatifs), on a

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

en vertu des équations (3) et du fait que $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Dès lors $H = constante$, et cette équation exprime la conservation de l'énergie totale. Géométriquement, cette équation représente selon les différentes valeurs attribuables à la constante, une famille de surfaces sur laquelle le point (p, q) représentatif du système, démeure pendant tout le mouvement.

4. Transformation canonique

Nous avons montré précédemment que les équations d'Euler-Lagrange sont équivalentes aux équations canoniques de Hamilton. Contrairement à ce qu'on pouvait croire l'avantage de ces dernières ne réside pas dans la forme des équations qui sont en général aussi difficiles à résoudre dans l'une que dans l'autre formulation. En fait pour les équations de Lagrange on ne peut les simplifier que par des transformations de variables qui ne portent que sur les coordonnées q_i tandis que pour les équations d'Hamilton, on peut transformer aussi bien en q_i qu'en p_i. Or une transformation quelconque ne transforme pas un système hamiltonien en un système hamiltonien, seules les transformations canoniques ont cet effet. Si g désigne une application différentiable de l'espace de phase $\mathbb{R}^{2n}$, alors g est une transformation canonique si pour tout contour fermé $\mathcal{C}$,

$$\oint_{\mathcal{C}} pdq = \oint_{g\mathcal{C}} pdq, \tag{4}$$

ou ce qui est équivalent si g préserve la forme symplectique

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i, \tag{5}$$

i.e., $g^*\omega = \omega$ ou encore si

$$\int \int_S \omega = \int_{gS} \omega, \tag{6}$$

où S est la surface limitée par le contour $\mathcal{C}$. Il est à noter que dans le cas d'un domaine de $\mathbb{R}^{2n}$ simplement connexe, les définitions ci-dessus sont équivalentes. Par contre, si le domaine de $\mathbb{R}^{2n}$ n'est pas simplement connexe alors on a les implications suivantes : (4) $\Rightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6). Le produit de deux transformations canoniques est une transformation canonique. De même l'inverse d'une transformation canonique est une transformation canonique. Dès lors, l'ensemble des transformations canoniques forme un groupe. Une transformation canonique préserve la forme des crochets de Poisson et donc des équations de Hamilton.

5. Equation d'Hamilton-Jacobi

L'équation d'Hamilton-Jacobi est une équation aux dérivées partielles non-linéaire. Sa résolution nécessite la connaissance d'une transformation canonique, en général très difficile à trouver. Par exemple pour le problème des trois corps, il est impossible de séparer l'équation d'Hamilton-Jacobi. Cependant dans des cas particuliers où les variables sont séparables, on peut déterminer la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi et donc intégrer le système hamiltonien par quadratures.

Considérons les équations canoniques d'Hamilton

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \end{array} \right.$$

d'hamiltonien

$$H \equiv H(p, q, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L, \tag{7}$$

où L est le lagrangien et $p = (p_1, ..., p_n)$, $q = (q_1, ..., q_n)$. Soient $P_i = P_i(p, q, t)$, $Q_i = Q_i(p, q, t)$ des transformations canoniques et

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(p, q, t) = \sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \mathcal{L}, \tag{8}$$

l'hamiltonien exprimé dans les nouvelles variables où $\mathcal{L}$ est le lagrangien, $P = (P_1, ..., P_n)$, $Q = (Q_1, ..., Q_n)$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \\ \dot{P}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}. \end{array} \right. \tag{9}$$

Théorème 5 *Une condition nécessaire et suffisante pour que la transformation*

$$p, q \longmapsto P(p, q, t), Q(p, q, t)$$

soit canonique est que la forme différentielle

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}(p_i dq_i - P_i dQ_i) - (H - \mathcal{H})dt,$$

soit exacte.

Démonstration : - Condition nécessaire, d'après le principe de moindre action de Hamilton, on a

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= 0, \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - \mathcal{L}) dt = 0.$$

Cette condition est satisfaite en général par

$$L - \mathcal{L} = \frac{dS}{dt}, \tag{10}$$

où S est une fonction (appelée fonction génératrice). Et effectivement, on a

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dS = \delta(S(t_2) - S(t_1)) = 0,$$

car les variables canoniques sont identiques aux instants t_1 et t_2. En tenant compte des équations (7) et (8), l'équation (10) s'écrit

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - \mathcal{H}\right) = \frac{dS}{dt},$$

ou encore

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - P_i dQ_i\right) - (H - \mathcal{H})dt = dS, \tag{11}$$

ce qui montre que la forme ω est exacte. Notons que la fonction S ne dépend que de $2n + 1$ variables car p, q, P, Q, t sont liés par $2n$ équations : $P_i = P_i(p, q, t)$, $Q_i = Q_i(p, q, t)$.
- Condition suffisante, de l'expression

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0,$$

on tire la relation

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - Hdt = dF, \tag{12}$$

où F est une fonction quelconque. Cette forme différentielle s'appelle invariant de Poincaré-Cartan. En retranchant (11) de (12), on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i - \mathcal{H}dt = dF - dS \equiv d\lambda, \tag{13}$$

ou

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i\right) - \sum_{i=1}^{n} Q_i dP_i - \mathcal{H}dt = d\lambda,$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i dP_i + \mathcal{H}dt = d\left(\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i\right) - d\lambda \equiv d\mu. \tag{14}$$

Les formes différentielles (13) et (14) sont exactes si et seulement si

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial t} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}, \\ \frac{\partial Q_i}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \end{aligned}$$

respectivement. Les variables canoniques P_i et Q_i ne dépendent que de t, d'où

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i}, \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

Soit $S = S(q, Q, t)$ une fonction de $2n + 1$ variables $q = (q_1, ..., q_n)$, $Q = (Q_1, ..., Q_n)$ et t. On a

$$dS = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial Q_i} dQ_i\right) + \frac{\partial S}{\partial t} dt,$$

et en comparant avec (11), on obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \\ & P_i = -\frac{\partial S}{\partial Q_i}, \\ & \mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H. \end{aligned} \right. \tag{15}$$

De même, si $S = S(q, P, t)$ on obtient

$$\left\{\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}, \\ Q_i &= -\frac{\partial S}{\partial P_i}, \\ \mathcal{H} &= \frac{\partial S}{\partial t} + H. \end{aligned}\right.$$

On obtient des formules similaires en supposant que S dépend d'autres coordonnées par exemple $S(p, Q, t)$, $S(p, P, t)$. De toutes les façons, quelle que soit la transformation canonique considérée, la fonction génératrice S et les hamiltoniens H, $\mathcal{H}$ sont reliés par l'équation

$$\mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H.$$

Considérons un système d'hamiltonien $H(p, q, t)$ et cherchons une transformation canonique dépendant de t telle que le nouveau hamiltonien $\mathcal{H}(P, Q, t)$ soit nul. Déterminons donc $S = S(q, Q, t)$ dépendant de $2n+1$ variables de façon à ce que $\mathcal{H} = 0$. Nous allons voir que cette méthode qui consiste à rendre $\mathcal{H} = 0$, implique que les nouvelles variables P et Q sont des constantes. En effet, les équations (15) et (9) se réduisent respectivement à

$$\left\{\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i}, \\ P_i &= -\frac{\partial S}{\partial Q_i}, \\ \mathcal{H} &= \frac{\partial S}{\partial t} + H, \end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} = 0, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} = 0, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} Q_i &= a_i, \\ P_i &= b_i, \end{aligned}\right.$$

où a_i et b_i sont des constantes. On peut déterminer p_i et q_i à l'aide de la transformation canonique et donc la solution du système. Pour celà, il faut déterminer la fonction génératrice S et celle-ci s'obtient en résolvant l'équation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0.$$

Comme $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, le hamiltonien $H(p_i, q_i, t)$ s'écrit $H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right)$ et l'équation ci-dessus devient

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i, t\right).$$

Cette équation aux dérivées partielles s'appelle équation d'Hamilton-Jacobi. Cette équation dépend de n variables $q_1, ..., q_n$, de t et de n constantes d'intégration $a_1, ..., a_n$. En fait cette équation dépend de $n+1$ constantes. Or la fonction S n'apparaît dans l'équation d'Hamilton-Jacobi que sous forme de dérivées partielles par rapport à t et à q_i. Dès lors si S est une solution de cette équation alors $S + c$ est une autre solution où c est une constante arbitraire. On peut donc faire apparaître une des $n+1$ constantes d'intégration dans la solution complète sous la forme d'une constante additive. Comme seules les dérivées partielles de la fonction génératrice interviennent dans les équations de transformation, alors on peut négliger cette constante additive et écrire la solution sous la forme $S = S(q_1, ..., q_n, a_1, ..., a_n, t)$. On a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i} \cdot \frac{dq_j}{dt}.$$

On déduit de l'équation d'Hamilton-Jacobi, l'expression

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right) &= -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i} \cdot \frac{dq_j}{dt}, \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i}\left(\frac{dq_j}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right), \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque $\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ le long d'une extrémale. Donc

$$\frac{\partial S}{\partial a_i}(q, a_i, t) = a_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

où a_i sont des constantes et ces équations peuvent être résolues pour les q_i en termes de a_i, c_i et de t,

$$q_i = q_i(a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n, t), \tag{16}$$

en supposant que le déterminant hessien

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i}\right) \neq 0.$$

Ensuite, en insérant la solution (16) dans la relation

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}(q_1, ..., q_n, a_1, ..., a_n, t),$$

on obtient les p_i comme fonctions de a_i, c_i et t,

$$p_i = p_i(a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n, t). \tag{17}$$

Les expressions (16) et (17) constituent donc la solution complète des équations canoniques de Hamilton. Les constantes $a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_n$ sont déterminées par les conditions initiales. Par conséquent, on a le résultat (théorème de Jacobi) suivant :

Théorème 6 *Soit $S(q_1, ..., a_1, ..., a_n, t)$ une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, dépendant de n paramètres $a_1, ..., a_n$ et supposons que :*

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i}\right) \neq 0.$$

Alors les équations canoniques d'Hamilton

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

s'intégrent par quadratures et les dérivées partielles $\frac{\partial S}{\partial a_i}$, $1 \leq i \leq n$, sont des intégrales premières des équations canoniques ci-dessus.

Supposons que le hamiltonien H ne dépend pas explicitement de t. Posons $H = H(p, q)$. De la relation

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

on tire

$$H = a_1 \equiv \text{constante}.$$

Comme précédemment, cherchons une fonction génératrice S de façon à ce que : $\mathcal{H} = 0$. L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial S}{\partial t} + a_1 = 0,$$

et en séparant les variables (i.e., la variable séparée étant t), on obtient une équation de la forme

$$S(q_i, a_i, t) = -a_1 t + S'(q_i, a_i), \quad i \geq 2 \tag{18}$$

Comme

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial S'}{\partial q_i},$$

l'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$H\left(\frac{\partial S'}{\partial q_i}, q_i\right) = a_1, \quad i \geq 2$$

et le problème consiste à déterminer la solution complète $S'(q_i, a_i)$ de cette équation. La fonction génératrice est donnée par (18) et les nouvelles variables s'écrivent

$$P_i = -\frac{\partial S}{\partial q_i} = c_i, \quad i \geq 2$$

car

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_i} = 0.$$

En particulier, on a

$$c_1 = P_1 = -\frac{\partial S}{\partial a_1} = t - -\frac{\partial S'}{\partial Q_1}.$$

Supposons maintenant que la fonction génératrice s'écrit comme $S = S(q, P, t)$. Dès lors, les variables p et Q sont définies par

$$\begin{aligned} p_i &= -\frac{\partial S}{\partial q_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}, \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} + H.$$

L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0,$$

et le problème consiste à déterminer une solution $S(q_i, a_i, t)$ de cette équation avec

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial S}{\partial a_i} = c_i, \\ P_i &= a_i. \end{aligned}$$

Et ainsi de suite, on obtient les solutions de l'équation d'Hamilton-Jacobi ci-dessus en répétant le même procédé que celui utilisé précédemment pour la fonction génératrice $S(q, Q, t)$.

On vient de voir que lorsque l'hamiltonien H ne dépend pas explicitement de t, on peut conclure à la séparabilité de t dans l'équation d'Hamilton-Jacobi. De même, on note que lorsque les coordonnées sont cycliques (une coordonnée q_i est cyclique si $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$), alors ces derniers sont toujours séparables, le nouveau hamiltonien $\mathcal{H}$ ne dépend plus que des nouvelles impulsions et on peut dans ce cas résoudre aisément les équations de Hamilton. Prenons à titre d'exemple le cas d'un système pour lequel H est une constante du mouvement, disons a, et que q_1 est une coordonnée cyclique. Donc

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0,$$

ce qui implique : $p_1 = b =$ constante. L'équation d'Hamilton-Jacobi s'écrit dans ce cas sous la forme

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_2, ..., q_n, b\right) = a. \tag{19}$$

Afin d'utiliser la méthode de séparation des variables, on pose

$$S = S_1(q_1, a) + S'(q_2, ..., q_n, a).$$

L'équation (19) s'écrit

$$H\left(\frac{\partial S'}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S'}{\partial q_n}, q_2, ..., q_n, b\right) = a,$$

et comme

$$p_1 = b = \frac{\partial S_1}{\partial q_1},$$

alors

$$S_1 = bq_1,$$

à une constante près. Donc b est la constante de séparation et on obtient

$$S = bq_1 + S'(q_2, ..., q_n, a).$$

Celle-ci ressemble à l'équation (18) obtenue dans le cas ou l'hamiltonien H ne dépend pas explicitement de t. Celà est dû au fait que puisque $H = a$, alors t peut-être assimilée à une coordonnée cyclique. On obtient donc des résultats similaires à ceux obtenus précédemment.

Supposons maintenant que q_1 n'est pas cyclique mais que toutes les autres coordonnées $q_2, ..., q_n$ sont cycliques. Dans ce cas, on a

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 2, ..., n$$

d'où

$$p_i = b_i, \quad i = 2, ..., n$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi, s'écrit

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1, b_2, ..., b_n, b\right) = a,$$

et on procède comme précédemment. On considère

$$S = S_1(q_1, a) + S_2(q_2, a) + \cdots + S_n(q_n, a).$$

Puisque

$$p_i = b_i = \frac{\partial S_i}{\partial q_i}, \quad i = 2, ..., n$$

alors

$$S_i = b_i q_i \quad i = 2, ..., n$$

et donc

$$S = S_1' q_1, a) + \sum_{i=2}^{n} b_i q_i,$$

avec $H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, q_1, b_2, ..., b_n, b\right) = a$. Cette dernière équation différentielle ordinaire en q_1 peut être résolue par quadratures, on obtient aisément sa solution S_1 et par conséquent la solution complète S.

Lorsqu'une coordonnée q_i et la dérivée $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ peuvent être regroupées en une combinaison de la forme $\varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i\right)$, alors q_i est séparable. Autrement dit, une coordonnée q_i est séparable si elle figure avec l'impulsion p_i dans l'hamiltonien sous forme d'une fonction $\varphi(p_i, q_i)$. Dans ce cas, on cherche les solutions de l'équation sous la forme

$$S = S_i(q_i, b) + S'(q_j, b),$$

où $j = 1, ..., n$, $j \neq i$. L'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$H\left(\frac{\partial S'}{\partial q_j}, q_j, \varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i\right)\right) = a.$$

Cette équation se résout facilement pour φ,

$$\varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i\right) = \psi\left(\frac{\partial S'}{\partial q_j}, q_j, a\right).$$

En utilisant la méthode de séparation de variables, on pose

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i\right) &= \text{constante},\\ \psi\left(\frac{\partial S'}{\partial q_j}, q_j, a\right) &= \text{constante}.\end{aligned}$$

Dans la première équation, la séparation de la variable q_i a été effectuée. En outre, si dans la seconde équation une variable est séparable, on peut dans ce cas répéter la procédure ci-dessus et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les variables soient séparées. Lorsque ceci est possible (i.e., toutes les variables sont séparables), alors l'équation d'Hamilton-Jacobi est complètement séparable et le système hamiltonien correspondant s'intégre par quadratures.

Nous allons appliquer ces méthodes à la résolution de deux exemples simples.

Exemple 4 *Considérons l'oscillateur harmonique défini par le hamiltonien*

$$H \equiv H(p,q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi correspondante s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = 0.$$

Comme H ne dépend pas explicitement de t, on peut conclure à la séparabilité de t dans cette équation et donc chercher une solution sous la forme

$$S = S_1(q) + S_2(t). \tag{20}$$

L'équation ci-dessus se réduit à

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = -\left(\frac{dS_2}{dt}\right).$$

D'après la méthode de séparation des variables, chacun de ces termes doit être constant. Soit c cette constante. Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 &= c,\\ \frac{dS_2}{dt} &= -c,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{2m}\int\sqrt{c-\frac{1}{2}m\omega^2q^2}dq,\\ S_2 &= -ct, \end{aligned}$$

à une constante près. En substituant ces expressions dans (20), on obtient

$$S=\sqrt{2m}\int\sqrt{c-\frac{1}{2}m\omega^2q^2}dq-ct=S(q,c,t).$$

D'après ce qui précède, on identifie la constante c avec la nouvelle quantité de mouvement P et puisque Q est une constante, on nomme cette dernière a. Dès lors,

$$a=Q=\frac{\partial S}{\partial P}=\frac{\partial S}{\partial c},$$

i.e.,

$$a=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dq}{\sqrt{c-\frac{1}{2}m\omega^2q^2}}-t,$$

d'où l'on tire l'expression de q en termes des constantes d'intégration c et a,

$$q=\sqrt{\frac{2c}{m\omega^2}}\sin\omega(t+a).$$

Pour l'impulsion p, on a

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S_1}{\partial q},\\ &= \sqrt{2m}\sqrt{c-\frac{1}{2}m\omega^2q^2},\\ &= \sqrt{2mc}\cos\omega(t+a). \end{aligned}$$

La constante c s'identifie à l'énergie totale du système. Notons que l'on peut déterminer les constantes c et a à partir des conditions initiales. Plus précisément, en désignant par p_0 et q_0 les valeurs de p et q en $t=0$, on obtient

$$c=\frac{1}{2m}p_0^2+\frac{m\omega^2}{2}q_0,$$

et

$$a=\frac{1}{\omega}arctg\ m\omega\frac{q_0}{p_0}\cdot$$

Exemple 5 *Considérons le problème de Kepler sur le mouvement d'un point matériel de masse m, mobile dans un plan fixe et attiré par une force (dite newtonienne) vers l'origine (un centre fixe). Cette force est proportionnelle à l'inverse du carré de sa distance à l'origine. Le point matériel est repéré par des coordonnées polaires (r, θ) de pôle l'origine. Ce point matériel étant dans un champ central de potentiel $-\frac{k}{r}$ où k est un nombre strictement supérieur à 0, alors l'hamiltonien est ici défini par*

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}\cdot$$

Les équations canoniques du mouvement sont

$$\begin{aligned}\dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{k}{r^2},\\ \dot{p}_\theta &= \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0,\end{aligned}$$

ce qui implique que p_θ est constant. Ici aussi H ne dépend pas explicitement de t et puisque

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta},$$

alors l'équation d'Hamilton-Jacobi correspondante s'écrit

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{k}{r} = 0.$$

La coordonnée θ étant cyclique, on cherche une solution sous la forme

$$S = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(t). \tag{21}$$

L'équation ci-dessus devient

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{k}{r} = -\frac{dS_3}{dt}.$$

On utilise la méthode de séparation des variables,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_2}{\partial \theta}\right)^2\right] - \frac{k}{r} &= c,\\ \frac{dS_3}{dt} &= -c,\end{aligned}$$

où c est une constante. D'où

$$\begin{aligned}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 &= -r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + 2mkr + 2mcr^2, \qquad (22)\\ S_3 &= -ct,\end{aligned}$$

à une constante près. Dans l'équation (22), on note que le terme de gauche est indépendant de r *et ne dépend que de* θ*. Quand au terme de droite, il ne dépend que de* r*. On applique donc à nouveau la méthode de séparation des variables :*

$$\begin{aligned} \frac{dS_2}{d\theta} &= a, \\ r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 - 2mkr - 2mcr^2 &= -a^2, \end{aligned}$$

où a *est une constante. D'où*

$$\begin{aligned} S_2 &= a\theta, \\ S_1 &= \int\sqrt{-\frac{a^2}{r^2}+2\frac{mk}{r}+2mc}dr, \end{aligned}$$

en ne considérant que la racine positive. En insérant les expressions de S_1*,* S_2 *et* S_3 *dans (21), on obtient*

$$S = \int\sqrt{-\frac{a^2}{r^2}+2\frac{mk}{r}+2mc}dr + a\theta - ct.$$

La suite consiste à identifier les constantes a *et* c *avec les nouvelles quantités de mouvement* P_r *et* P_θ *respectivement. On désigne les constantes* Q_r *et* Q_θ *par* b_1 *et* b_2 *respectivement. Dès lors,*

$$\begin{aligned} b_1 &= Q_r = \frac{\partial S}{\partial P_r} = \frac{\partial S}{\partial a}, \\ b_2 &= Q_\theta = \frac{\partial S}{\partial P_\theta} = \frac{\partial S}{\partial c}. \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} a\int\frac{dr}{r^2\sqrt{-\frac{a^2}{r^2}+2\frac{mk}{r}+2mc}} &= \theta - b_1, \\ m\int\frac{dr}{\sqrt{-\frac{a^2}{r^2}+2\frac{mk}{r}+2mc}} &= t + b_2. \end{aligned}$$

L'intégration de ces équations ne pose aucun problème ; la première fournit l'équation de l'orbite (il suffit d'effectuer le changement de variable $r = \frac{1}{u}$*) et la seconde équation détermine* r *en fonction de* t*. Les constantes* a *et* c *s'identifient respectivement au moment cinétique et à l'énergie totale. L'orbite est une ellipse si* $c = 0$*, une parabole si* $c > 0$ *et une hyperbole si* $c < 0$*.*