Université Chouaib Doukkali *Année Universitaire 2014-2015*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida
(Responsable : Prof. Lesfari, http ://lesfari.com)

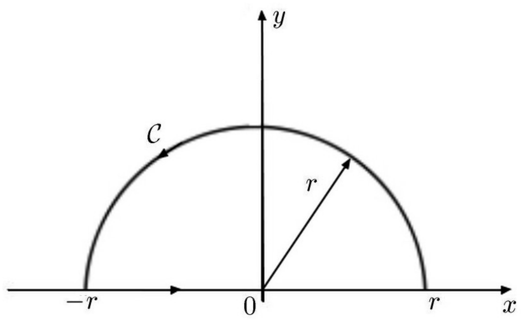
Session de rattrapage : **Analyse 6** Niveau : **SMA4**
(*Durée de l'épreuve* : $1^h30'$)

Exercice 1

Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx.$$

Solution : L'intégrale en question converge. Posons $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ et calculons l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ où $\gamma = \mathcal{C} \cup [-r, +r]$ est le chemin fermé.



La fonction f a 2 pôles simples : $z_1 = -1+i$, $z_2 = -1-i$ et 2 pôles doubles : $z_3 = i$, $z_4 = -i$. Seuls les pôles z_1 et z_3 appartiennent au demi plan supérieur. On a

$$\text{Rés}(f, z_1) = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i, \qquad \text{Rés}(f, z_3) = -\frac{3}{25} + \frac{9}{100}i,$$

d'où

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\mathcal{C}} f(z)dz + \int_{-r}^{r} f(x)dx = 2\pi i(\text{Rés}(f, z_1) + \text{Rés}(f, z_3)) = \frac{7\pi}{50},$$

et

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathcal{C}} f(z)dz + \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)dx = \frac{7\pi}{50}.$$

La première limite vaut 0 d'après le lemme de Jordan (car $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$) et la seconde limite est égale à $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx$. Finalement,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx = \frac{7\pi}{50}.$$

Exercice 2

Calculer l'intégrale double :

$$\int\int_D |x+y|dxdy,$$

où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}.$$

Solution : On a

$$\int\int_D |x+y|dxdy = 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-x}^{1}(x+y)dy\right)dx = \frac{8}{3}.$$

Exercice 3

On considère la fonction gamma d'Euler définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

a) Montrer que Γ est définie sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que cette intégrale converge uniformément sur l'intervalle $[a,b]$ où $0 < a < b < +\infty$.

c) En déduire que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

Solution : a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto e^{-t}t^{x-1}$, est positive, continue sur $]0,+\infty[$ et donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$. L'intégrale en question converge en même temps que les deux intégrales $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$. Au voisinage de 0, on a $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$. L'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et d'après le critère d'équivalence, il en est de même pour $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$. Au voisinage de $+\infty$, on a $\lim_{t\to+\infty} t^2e^{-t}t^{x-1} = 0$, c-à-d., $e^{-t}t^{x-1} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

b) Pour $x \geq a > 0$ et $t \in]0,1]$. On a $e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{a-1}$. L'intégrale $\int_0^1 e^{-t}t^{a-1}dt$ étant convergente, alors $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ en vertu du critère de Weierstrass. Pour $0 < x \leq b$ et $t \in [1,+\infty[$, on a $e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^{b-1}$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{b-1}dt$ converge, alors on déduit du même critère que $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est normalement convergente pour $0 < a \leq x \leq b$. Par conséquent, l'intégrale en question converge normalement, donc uniformément sur l'intervalle $[a,b]$ où $0 < a < b < +\infty$.

c) La fonction sous le signe intégrale est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. La continuité de la fonction Γ sur $]0,+\infty[$ résulte immédiatement de la question précédente et du théorème de continuité étudié dans le cours.