Université Chouaib Doukkali *Année Universitaire 2014-2015*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida
(Responsable : Prof. Lesfari, http ://lesfari.com)

Session de rattrapage : **Analyse complexe** Niveau : **SMA6**
(*Durée de l'épreuve* : $1^h30'$)

Exercice 1

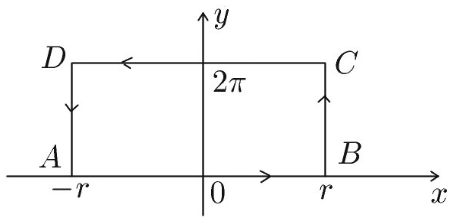
Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx, \quad 0 < a < 1$$

Solution : On pose

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z},$$

et on choisit le contour suivant :



D'après le théorème des résidus, on a

$$\int_{AB} f(z)dz + \int_{BC} f(z)dz + \int_{CD} f(z)dz + \int_{DA} f(z)dz = 2\pi i \text{Rés}(f(z), \pi i).$$

Le point $z = \pi i$ étant un pôle simple de f, alors

$$\text{Rés}(f(z), \pi i) = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

- Sur AB, on a $z = x$, $-r \leq x \leq r$ et

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{-r}^{r} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

Lorsque $r \to \infty$, cette intégrale tend vers $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$.
- Sur BC, on a $z = x + iy$, $0 \leq y \leq 2\pi$ et

$$\left| \int_{BC} f(z)dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{ar}}{e^r - 1} dy = 2\pi \frac{e^{ar}}{e^r - 1}.$$

Lorsque $r \to \infty$, cette dernière expression tend vers 0 (car $0 < a < 1$) et on en déduit qu'il en est de même pour l'intégrale $\int_{BC} f(z)dz$.
- Sur DA, on obtient de manière similaire que

$$\left| \int_{DA} f(z)dz \right| \leq 2\pi \frac{e^{-ar}}{1 - e^{-r}},$$

et cette expression tend vers 0, lorsque $r \to \infty$.
- Sur CD, on a $z = x + 2\pi i$, $-r \leq x \leq r$ et

$$\int_{CD} f(z)dz = -e^{2a\pi i} \int_{-r}^{r} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

Lorsque $r \to \infty$, cette intégrale tend vers $-e^{2a\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$.
Finalement, en passant à la limite ($r \to \infty$) dans l'expression ci-dessus, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx + 0 + 0 - e^{2a\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = 2\pi i(-e^{a\pi i}).$$

Par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = -2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{1 - e^{2a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Exercice 2

a) Montrer que toute fonction holomorphe est harmonique.

b) En déduire que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques.

c) Montrer que la fonction $\ln |z|$ est harmonique dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Solution : a) Soit f une fonction holomorphe, donc elle est indéfiniment dérivable et les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites. On a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0,$$

en vertu des équations de Cauchy-Riemann.

b) Soient u la partie réelle et v la partie imaginaire d'une fonction holomorphe f. On a $u = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$, $v = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$, et le résultat découle de la question précédente.

c) La détermination principale de la fonction logarithme au voisinage de $z \neq 0$ est donnée par $\log z = \ln |z| + i\theta$, $-\pi \leq \theta < \pi$. La fonction $\log z$, est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ et comme $\ln |z|$ est la partie réelle de $\log z$, alors il suffit d'appliquer b).

<u>Note</u> : Pour a), on peut noter que le laplacien Δ s'écrit sous la forme $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$. Pour la question b), on a $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et on peut calculer directement les laplaciens Δu et Δv, en tenant compte des équations de Cauchy-Riemann et du lemme de Schwarz sur l'interversion des dérivées partielles. En effet, on a

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

De même, on montre que $\Delta v = 0$.

<u>Exercice 3</u>

Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $f^{(k)}(z_0) \equiv 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

ii) $f \equiv 0$ dans un voisinage $\mathcal{V}(z_0)$ de z_0.

iii) $f \equiv 0$ dans Ω.

<u>Solution</u> : On va montrer les implications : *iii)* $\Rightarrow$ *i)* $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*. Pour l'implication *iii)* $\Rightarrow$ *i)*, c'est évident. Montrons que : *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Par hypothèse, f est holomorphe dans Ω et comme $z_0 \in \Omega$, alors f est développable dans tout disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset \Omega$ en série entière

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z_0)^k.$$

Or $f^{(k)}(z_0) \equiv 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, donc $f \equiv 0$ dans un voisinage $\mathcal{V}(z_0)$ de z_0. Montrons maintenant que : *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*. Soit Δ l'ensemble des points de Ω qui possèdent un voisinage ouvert sur lequel $f \equiv 0$. L'ensemble Δ est un ouvert de Ω. En effet, pour tout $z \in \Delta$, il existe un voisinage inclus dans Δ tels que : $f(z) \equiv 0$. Donc Δ est voisinage de chacun de ses points et dès lors Δ est un ouvert de Ω. De même, montrons que Δ est un fermé de Ω. En effet, pour $z \in \overline{\Delta}$, il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in \Delta$ telle que : $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. La fonction f étant holomorphe dans Ω, on a

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f^{(k)}(z_n), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Notons que $f^{(k)}(z_n) = 0$ car $z_n \in \Delta$, donc $f^{(k)}(z) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Autrement dit, on a *i)*. Or on sait que *i)* $\Rightarrow$ *ii)*, donc $f \equiv 0$ dans un voisinage de z et dès lors $z \in \Delta$, ce qui montre que Δ est fermé dans Ω. On a prouvé que Δ est un ouvert et un fermé de Ω. Comme Ω est connexe, alors $\Delta = \Omega$ ou $\Delta = \emptyset$. Or $z_0 \in \Delta$ donc $\Delta \neq \emptyset$ et le seul cas valable est $\Delta = \Omega$.