Résultants et discriminants

A. Lesfari
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Soient

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = a_0\prod_{k=1}^{m}(x-\alpha_k), \quad a_0 \neq 0, \\ g(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = b_0\prod_{j=1}^{n}(x-\beta_j), \quad b_0 \neq 0, \end{aligned}$$

deux polynômes de degré m et n respectivement. Ici $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ et $(\beta_1, ..., \beta_n)$ désignent les racines des polynômes f et g respectivement. Le résultant des polynômes f et g, noté $\text{Rés}(f, g)$, est le déterminant de leur matrice de Sylvester, i.e., le déterminant de la matrice carrée d'ordre $(m+n)$ suivante :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Proposition 1 *Les polynômes f et g ont un facteur commun non nul si et seulement si il existe deux polynômes F et G de degré strictement inférieur à m et n respectivement tels que :*

$$fG = gF.$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} f &= Af_1^{m_1}f_2^{m_2}...f_r^{m_r}, \\ g &= Bg_1^{n_1}g_2^{n_2}...g_s^{n_s}, \end{aligned}$$

où A, B sont des constantes et $f_1^{m_1}, ..., f_r^{m_r}, g_1^{n_1}, ..., g_s^{n_s}$ sont des polynômes irréductibles. Supposons que f et g ont un facteur commun non nul, disons $f_1 = g_1$. Considérons les polynômes

$$\begin{aligned} F &= \frac{f}{f_1}, \\ G &= \frac{g}{g_1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \deg F &= \deg f = m, \\ \deg G &= \deg g = n, \end{aligned}$$

et

$$fG = \frac{fg}{g_1} = \frac{gf}{f_1} = gF.$$

Réciproquement, on a

$$fG = gF,$$

avec $\deg F < m$ et $\deg G < n$. Supposons que f et g n'ont pas de facteur commun. Dans ce cas, puisque

$$Af_1^{m_1}f_2^{m_2}...f_r^{m_r}.G = Bg_1^{n_1}g_2^{n_2}...g_s^{n_s}.F,$$

alors pour tout $j = 1, 2, ..., r$, $f_j^{m_j}$ doit apparaître comme facteur dans F, i.e., f doit diviser F donc $\deg f \leq \deg F$ ce qui est absurde car par hypothèse $\deg F < m$ et la démonstration s'achève. $\square$

Proposition 2 *Les polynômes f et g ont un facteur commun non nul si et seulement si*

$$Rés(f, g) = 0.$$

Démonstration : D'après la proposition précédente, les polynômes f et g ont un facteur commun non nul si et seulement si il existe deux polynômes

$$\begin{aligned} F(x) &= A_0x^{m-1} + A_1x^{m-2} + ... + A_{m-1}, \\ G(x) &= B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + ... + B_{n-1}, \end{aligned}$$

tels que :

$$fG = gF,$$

i.e.,

$$(a_0x^m + ... + a_m)(B_0x^{n-1} + ... + B_{n-1}) = (b_0x^n + ... + b_n)(A_0x^{m-1} + ... + A_{m-1}).$$

On identifie les coefficients :

$$\begin{array}{rcl} x^{m+n-1} & : & a_0B_0 = b_0A_0, \\ x^{m+n-2} & : & a_0B_1 + a_1B_0 = b_0A_1 + b_1A_0, \\ \vdots & & \\ x^0 & : & a_mB_{n-1} = b_nA_{m-1}. \end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{l} a_0B_0 - b_0A_0 = 0, \\ a_1B_0 + a_0B_1 - b_1A_0 - b_0A_1 = 0, \\ \quad\vdots \\ a_mB_{n-1} - b_nA_{m-1} = 0. \end{array}$$

On obtient un système linéaire homogène de $(m+n)$ équations dont les inconnues sont $B_0, ..., B_{n-1}, A_0, , A_{m-1}$. Ce système admet une solution non triviale si et seulement si

$$\Delta \equiv \det \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & -b_1 & -b_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & -b_1 & \ddots & 0 \\ a_m & \vdots & \ddots & a_0 & -b_n & \vdots & \ddots & -b_0 \\ 0 & a_m & \vdots & a_1 & 0 & -b_n & \vdots & -b_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_m & 0 & \dots & 0 & -b_n \end{pmatrix} = 0.$$

En mettant en évidence le signe $-$ dans les m dernières colonnes et en tenant compte du fait que le déterminant de la transposée d'une matrice est le même que celui de la matrice initiale, on obtient

$$\Delta = \pm \text{Rés}(f, g),$$

et le résultat en découle. $\square$

Proposition 3 *Il existe deux polynômes F et G de degré strictement inférieur* *à m et n respectivement tels que :*

$$\begin{aligned} fG - gF &= Rés(f,g),\\ &= \text{polynôme en les coefficients de } f \text{ et } g,\\ &= a_0^n b_0^m \prod_{k=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_k - \beta_j),\\ &= a_0^n \prod_{k=1}^{m} g(\alpha_k),\\ &= (-1)^{mn} b_0^m \prod_{j=1}^{n} f(\beta_j). \end{aligned}$$

Démonstration : Si f et g ont un facteur commun, alors d'après ce qui précède les polynômes F et G existent et on a

$$fG - gF = 0 = \text{Rés}(f,g).$$

Si f et g n'ont pas de facteur commun, alors on cherche F et G tels que :

$$fG - gF = \text{Rés}(f,g).$$

En raisonnant comme dans la proposition précédente, on obtient un système non homogène ayant une solution non nulle. Autrement dit, le déterminant Δ utilisé dans la preuve de la proposition précédente est nul ou ce qui est équivalent f et g n'ont pas de facteur commun, ce qui est vrai par hypothèse et achève la démonstration. $\square$

Soient $\alpha_1, ..., \alpha_m$ les m racines du polynôme f comptées avec multiplicité. Le discriminant de f, noté $Disc(f)$, est

$$\begin{aligned} Disc(f) &= a_0^{2m-2}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \prod_{i\neq j}(\alpha_i - \alpha_j),\\ &= a_0^{2n-2} \prod_{1\leq j<i\leq m}(\alpha_i - \alpha_j)^2. \end{aligned}$$

Proposition 4 *Le résultant de f et de son polynôme dérivé f' est*

$$Rés(f,f') = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0 Disc(f).$$

Démonstration : On a

$$f(x) = a_0 \prod_{k=1}^{m}(x - \alpha_k),$$

et

$$f'(x) = a_0 \sum_{k=1}^{m}\prod_{j\neq k}(x - \alpha_j).$$

En remplaçant dans cette dernière équation x par α_i, on constate que tous les termes s'annulent sauf le i-ème et dès lors

$$f'(\alpha_i) = a_0 \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Par ailleurs, on sait que

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f, f') &= a_0^{m-1} \prod_{i=1}^{m} f'(\alpha_i), \\ &= a_0^{2m-1} \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j). \end{aligned}$$

Notons que dans le produit ci-dessus, il y a $m(m-1)$ facteurs. Comme chacun de ces derniers s'écrit sous la forme $\alpha_i - \alpha_j$ et sous la forme $\alpha_j - \alpha_i$, alors leur produit est $(-1)(\alpha_i - \alpha_j)^2$. En tenant compte du fait qu'il y a $\frac{m(m-1)}{2}$ paires d'indices i, j avec $1 \leq j < i \leq m$, alors

$$\begin{aligned} \text{Rés}(f, f') &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^{2m-1} \prod_{1 \leq j < i \leq m} (\alpha_i - \alpha_j)^2, \\ &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0 Disc(f), \end{aligned}$$

et la proposition est démontrée. □

On déduit immédiatement des propositions précédentes le résultat suivant :

Proposition 5 *Le discriminant du polynôme f est nul si et seulement si les polynômes f et f' ont un facteur en commun non constant ou encore si et seulement si le polynôme f admet une racine multiple.*