Calcul différentiel

SMA6, 2005-2009

A. Lesfari

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr
Site Web : http://lesfari.com

Table des matières

1 Rappel : limite et continuité

Soient E et F deux espaces vectoriels normés (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie n et p respectivement. Soit Ω un ouvert de E et soit $f : \Omega \longrightarrow F$, une application. Rappelons que dans le cas de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Comme $\dim E = n$ et $\dim F = p$, on se ramène par choix de bases à des applications $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

Définition 1 *On dit que f admet pour limite $l \in F$ lorsque x tend vers a dans Ω si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \Omega, ||x - a|| < \delta \Longrightarrow ||f(x) - l|| < \varepsilon.$$

On écrit $l = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Notons que si la limite existe, elle est unique.

Définition 2 *On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue sur Ω si elle est continue en tout point de Ω.*

Remarques 3 *a) Pour prouver la continuité d'une fonction de plusieurs variables en un point a de son domaine, on majore $|f(x) - f(a)|$ par une expression mieux connue, tendant vers 0 avec $||x - a||$.*

b)Pour prouver la discontinuité d'une fonction de plusieurs variables en un point a de son domaine, on prouve que pour x tendant vers a le long d'un chemin particulier, $f(x)$ ne tend pas vers $f(a)$.

c) Quelques majorations utiles :

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Exercice 1.1 *Etudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par*

a)

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, y \neq 0 \\ 0, y = 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

c)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

d)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^6 + y^4}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Réponse :
a) f est continue sur $\mathbb{R}^2$ sauf aux points $(\alpha, 0)$, $\alpha \neq 0$.
b) f est continue sur $\mathbb{R}^2$ sauf au point $(0,0)$.
c) f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
d) f est continue sur $\mathbb{R}^2$ sauf au point $(0,0)$.

Exercice 1.2 *Même question pour la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy^3z^3}{x^4+y^6+z^8}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Réponse : f est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.3 *Pour quelles valeurs de (x,y) l'intégrale*

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^t dt}{(xe^t+1)(ye^t+1)},$$

est-elle convergente ? Etudier la continuité de f.

2 Fonctions partielles, dérivée directionnelle, dérivées partielles

Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in \Omega \subset E$, $f : \Omega \longrightarrow F$. Notons

$$\Omega_i = \{x_i \in \mathbb{R} : (a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \in \Omega\}, 1 \leq i \leq n$$

et considérons l'application suivante :

$$f^i : \Omega_i \longrightarrow F, \quad x_i \longmapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n).$$

Définition 4 *On dit que f^i est la $i^{\text{ème}}$ fonction partielle de f au point a (c'est une fonction vectorielle).*

Proposition 5 *Si f est continue en a, alors chaque f^i est continue en a_i. La réciproque est fausse.*

Soit $a \in E$, Ω un voisinage de a, $f : \Omega \longrightarrow F$, et $u \in E$ avec $u \neq 0$.

Définition 6 *Si la limite $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} \dfrac{f(a+\lambda u) - f(a)}{\lambda}$ existe, alors on l'appelle dérivée de f en a dans la direction u et on la note $\dfrac{\partial f}{\partial a}(a)$ ou $\partial_u f(a)$.*

Un cas particulier important de dérivée directionnelle est celui de dérivée partielle. La dérivée partielle de f au point a par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable, s'obtient en prenant pour u le $i^{\text{ème}}$ vecteur $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ de la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de E. On la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f_i'(a)$. D'après la définition des dérivées directionnelles, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} \frac{f(a + \lambda e_i) - f(a)}{\lambda}, \\ &= \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} \frac{f(a_1, ..., a_i + \lambda, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_n)}{\lambda}.\end{aligned}$$

Au fond, on calcule la dérivée au point a_i de la $i^{\text{ème}}$ fonction partielle de f au point a :

$$x_i \longmapsto f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n).$$

En d'autres termes, pour calculer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, on fixe toutes les variables, sauf la $i^{\text{ème}}$, et on dérive la fonction d'une variable ainsi obtenue.

Remarques 7 *a) L'existence des dérivées partielles en un point n'assure pas la continuité de la fonction en ce point, ni l'existence des dérivées directionnelles en ce point.*

b) L'existence de toutes les dérivées directionnelles en un point n'implique pas la continuité de la fonction en ce point.

3 Fonctions différentiables

Soient $a \in E$, Ω un voisinage de a et $f : \Omega \longrightarrow F$, une application.

Définition 8 *On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $L : E \longrightarrow F$, telle que :*

$$\forall h \in E, \quad f(a + h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h),$$

avec $\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{\varepsilon(h)}{||h||} = 0$ (c-à-d., $\varepsilon(h) = o(||h||)$). De façon équivalente (il suffit de poser $x = a + h$), s'il existe une application linéaire $L : E \longrightarrow F$, telle que :

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + \varepsilon(x - a),$$

avec $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \Omega \setminus \{a\}}} \frac{\varepsilon(x - a)}{||x - a||} = 0$. L'application L si elle existe, est unique et s'appelle la différentielle de f au point a. On la note $df(a)$ ou df_a.

Signalons l'observation triviale suivante : La fonction f à valeurs dans F est différentiable en a si et seulement si ses composantes f_j sont différentiables en a.

Proposition 9 *Si f est différentiable au point a, alors f est continue en a. (La réciproque est fausse en général).*

Remarque 10 *Voyons ce qui se passe en dimension infinie. Si E et F sont des espaces de Banach c-à-d. des espaces vectoriels normés complets (ou des espaces vectoriels normés quelconques). L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un espace de Banach muni de la norme induite par celles de E et F. Cette norme est définie, pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ par*

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{0 \neq x \in E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

En général, une application linéaire de E dans F n'est pas continue (sauf évidemment en dimension finie). Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, alors on a équivalence entre les trois propositions suivantes :
(i) f est continue en 0.
(ii) $\exists C > 0 : \|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.
(iii) f est uniformément continue.
En dimension infinie, il faut ajouter dans la définition de différentiabilité de f, la condition que l'application linéaire $L : E \longrightarrow F$ est continue.

On montre que si f est différentiable en a, alors f est dérivable suivant tout vecteur u de E et

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = df(a)u,$$

pour chaque u de E. Cette formule implique que si L est l'application linéaire intervenant dans la définition de la différentiabilité de f en a, alors

$$L(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a), \quad \forall u \in E$$

d'où l'unicité de L.

Proposition 11 *Si f est différentiable au point a, alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existent et on a*

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

(La réciproque est fausse en général).

Exercice 3.1 *Quelle est la valeur approchée de* $(1,02)^{3,01}$?

<u>*Réponse*</u> : $(1,02)^{3,01} \approx 1,06$.

Remarque 12 *La seule existence des dérivées partielles ne suffit pas à assurer la différentiabilité. Par contre, on a le théorème suivant très utile en pratique.*

Théorème 13 *Si les dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$ *de* f *existent dans un voisinage de* a *et sont continues en* a*, alors* f *est différentiable en* a*. (La réciproque est fausse en général).*

Définition 14 *On dit que* f *est continûment différentiable ou de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* Ω *lorsque les dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ *de* f *existent et sont continues sur* Ω.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors f est différentiable sur Ω.

Le théorème suivant (voir [6]) donne une condition suffisante sur les dérivées partielles de la fonction f pour que celle-ci soit différentiable en a.

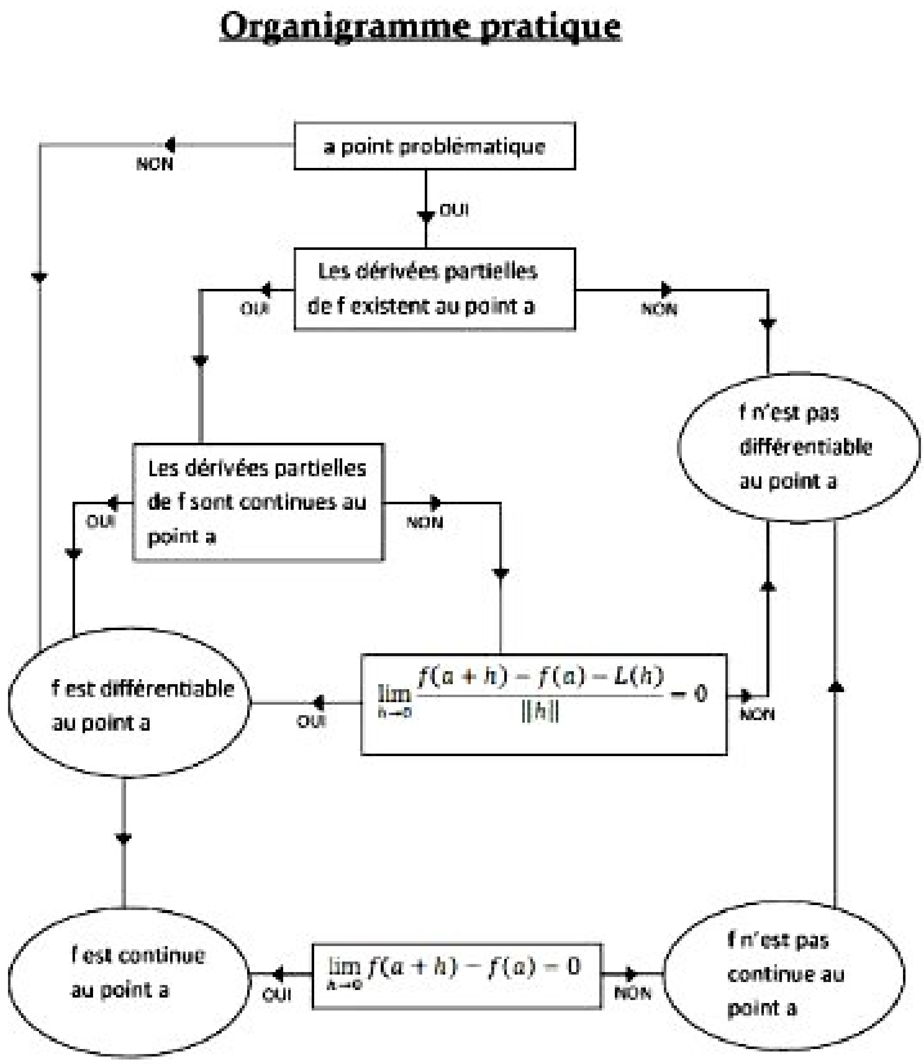
Théorème 15 *On suppose que :*
(i) l'une des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}$ *de la fonction* f *existe au point* $a = (a_1, ..., a_n)$.
(ii) les $n-1$ *autres dérivées partielles existent dans un voisinage de* a *et qu'en outre elles sont continues en* a.
Alors la fonction f *est différentiable en* a.

Dans le cas particulier d'une fonction $f(x, y)$ à deux variables la condition suffisante de différentiabilité de cette fonction consiste à utiliser la continuité d'une des dérivées partielles mais pas les deux ! La continuité de toutes les dérivées partielles intervient seulement pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. En dimension deux le résultat devient [6] :

Proposition 16 *si l'une des dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *de la fonction* f *existe au point* $a = (a_1, a_2)$ *et si l'autre dérivée partielle existe dans un voisinage de* a *et que de plus cette dernière est continue en* a*, alors la fonction* f *est différentiable en* a.

Notation (dans le cas de deux variables) :

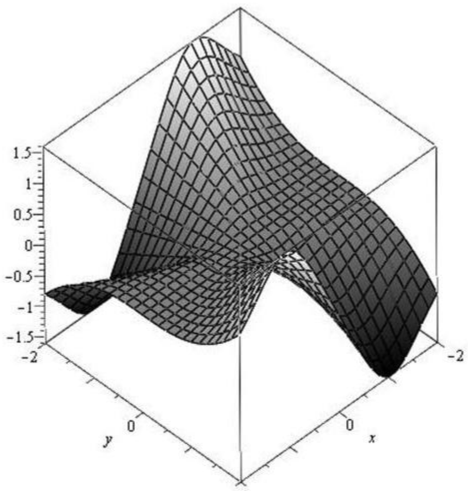
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$



On va maintenant étudier deux exemples d'applications.

Exemple 17 *Etudions la différentiabilité de la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



(Surface de l'équation $z = f(x, y)$)

La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Le seul point problématique est à l'origine. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(y^2 - 3x^4)}{(x^4 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy^2(3x^4 + y^2)}{(x^4 + y^2)^2},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Puisque f est une fonction à deux variables, il suffit donc (d'après la proposition précédente) de prouver que l'une de ces dérivées partielles est continue en $(0,0)$. On a

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leq \frac{(x^4 + y^2)^{1/4}.(x^4 + y^2).3(x^4 + y^2)}{(x^4 + y^2)^2} = 3(x^4 + y^2)^{1/4},$$

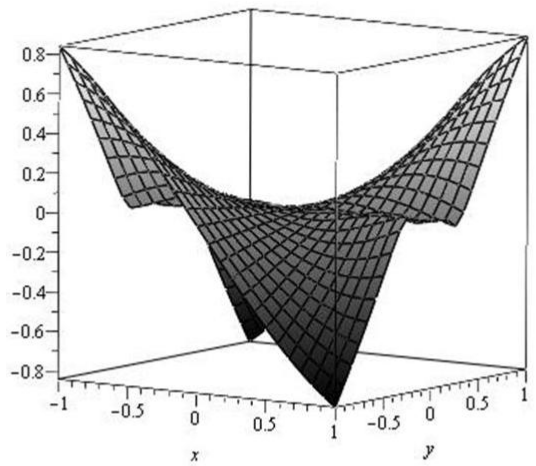
et

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Dès lors, la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$ et on en déduit que f est différentiable en $(0,0)$. Par conséquent, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. (Dans cet exemple la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ car la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est aussi continue en $(0,0)$, mais on n'est pas obligé de le vérifier pour montrer que f est différentiable).

Exemple 18 *Etudions la différentiabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$



(Surface d'équation $z = f(x,y)$)

La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(a,0)\}$, $a \in \mathbb{R}$, comme produit et composée de fonctions différentiables. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cos \frac{x}{y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y},$$

et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. En outre, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |y|$,

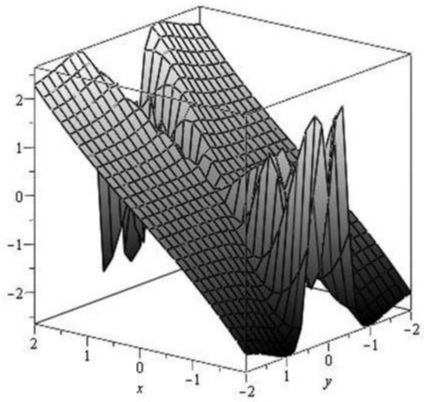
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. Donc la fonction f est différentiable en $(0,0)$. De même, la fonction f est différentiable en $(a,0)$, $a \neq 0$ car $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent au point $(a,0)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = 0$, et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(a,0)$;

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a,0).$$

(Notons que pour ce dernier cas, si $a \neq 0$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'est pas continue en $(a,0)$ puisque $\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ n'existe pas). Finalement f est

différentiable sur $\mathbb{R}^2$.



$$(\textit{Discontinuité de } \frac{\partial f}{\partial y})$$

Exercice 3.2 *Etudier la différentiabilité des fonctions définies sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

a)

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

b)

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

c)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Réponse :

a) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ sauf au point $(0,0)$.
b) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
c) f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.3 *Montrer que la fonction* f *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \frac{|x|y^3}{x^2+y^2},$$

admet un prolongement continue à l'origine. Etudier la différentiabilité en tout point de la fonction prolongée.

Réponse : Il suffit de poser $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$. La fonction ainsi prolongée est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,b) : b \in \mathbb{R}\}$, n'est pas différentiable aux points $(0,b)$, $b \in \mathbb{R}^*$ et différentiable à l'origine.

Exercice 3.4 *Etudier la continuité et la différentiabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^4 x}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Réponse</u> : En utilisant le fait que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$, on montre que la fonction f est est continue et différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.5 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose*

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x \neq y \\ f'(x), & x = y \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de g sur $\mathbb{R}^2$.
b) Si $f''(a)$ existe, g est-elle différentiable en (a,a)?

<u>Réponse</u> :
a) g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b) oui.

Exercice 3.6 *Etudier la continuité et la différentiabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin x \sin y \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, xy \neq 0 \\ 0, xy = 0 \end{cases}$$

<u>Réponse</u> : f est continue et différentiable en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sauf peut-être en (x,y) tels que : $xy = 0$. f est continue en (x,y) tels que : $xy = 0$. f n'est pas différentiable en $(a,0)$, $(0,a)$ avec $a \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}^*\}$. f est différentiable en $(0,0)$, $(k\pi,0)$, $(\frac{1}{k\pi},0)$, $(0,k\pi)$, $(0,\frac{1}{k\pi})$, $k \in \mathbb{Z}^*$.

Proposition 19 *Soient*

$$f,g : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{F}, \qquad h : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R},$$

des fonctions différentiables au point $a \in \Omega$. Alors $f+g$ et fh sont différentiables en a et on a

$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a), \quad d(fh)(a) = h(a)df(a) + f(a)dh(a).$$

Si de plus, $h(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{h}$ est différentiable en a et

$$d\left(\frac{f}{h}\right)(a) = \frac{(df(a))h(a) - f(a)dh(a)}{h^2(a)}.$$

Proposition 20 *(Différentiabilité d'une fonction composée) : Soient $a \in E$, Ω un voisinage de a et $f : \Omega \longrightarrow F$. Posons $b = f(a)$ et soit Δ un voisinage de b et $g : \triangle \longrightarrow G$ (G evn. de dim. q). On suppoe que f est différentiable en a et g est différentiable en b. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et*

$$d(g \circ f)(a) = dg(b).df(a).$$

Exercice 3.7 *On considère une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. On pose,*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = f(\cos x^2, xy, f(y,y,y)).$$

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g par rapport à x et à y en un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On exprimera les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

Réponse : En désignant par $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3)$ la dérivée première par rapport à la i-ème composante x_i, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -2a \sin a^2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\cos a^2, ab, f(b,b,b)\right) + b\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\cos a^2, ab, f(b,b,b)\right),$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) &= a\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\cos a^2, ab, f(b,b,b)\right)\\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b,b,b) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(b,b,b) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(b,b,b)\right)\frac{\partial f}{\partial x_3}\left(\cos a^2, ab, f(b,b,b)\right).\end{aligned}$$

Exercice 3.8 *Même question pour la fonction*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = f(\cos x^2, xy, f(x,y,x)).$$

Réponse : En désignant par $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2,x_3)$ la dérivée première par rapport à la i-ème composante x_i, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -2a \sin a^2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\cos a^2, ab, f(a,b,a)\right) + b\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\cos a^2, ab, f(a,b,a)\right)\\ &+\frac{\partial f}{\partial x_3}\left(\cos a^2, ab, f(a,b,a)\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\cos a^2, ab, f(a,b,a)\right) + \frac{\partial f}{\partial x_3}\left(\cos a^2, ab, f(a,b,a)\right)\right),\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\cos a^2, ab, f(a,b,a)\right) + \frac{\partial f}{\partial x_3}\left(\cos a^2, ab, f(a,b,a)\right)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a,b,a).$$

Exercice 3.9 *Soit E un $\mathbb{R}$-evn et Φ l'application $x \mapsto \| x \|$. L'objet de cet exercice est d'étudier la différentiabilité de l'application Φ.*

a) Montrer que Φ n'est pas différentiable en 0.

b) On munit F de sa structure euclidienne usuelle et on note

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}.$$

Montrer que Φ est $\mathcal{C}^1$ sur $F \setminus \{0_F\}$ et préciser sa différentielle.

c) On munit $\mathbb{R}^2$ de $\| \,.\, \|_\infty$. L'application Φ est-elle différentiable ?

d) On considère l'espace

$$\left\{ a = (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} \text{ est absolument convergente} \right\},$$

muni de la norme $\| x \| = \sum_{n=0}^{\infty} | x_n |$. L'application Φ est-elle différentiable ?

Exercice 3.10 *Calculer la dérivée de*

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)dt,$$

où f est continue et u, v sont de classe $\mathcal{C}^1$.

<u>Réponse</u> : $g'(x) = f(x, v(x))v'(x) - f(x, u(x))u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$

Exercice 3.11 *Soit $M_n(n, \mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times n$. Montrer que l'application :*

$$M_n(n, \mathbb{K}) \longrightarrow M_n(n, \mathbb{K}), \quad A \longmapsto A^p, \quad p \in \mathbb{N}^*,$$

est différentiable en tout point. Quelle est sa différentielle ?

<u>Réponse</u> : $\forall B \in M_n(n, \mathbb{K})$, $df(A)(B) = \sum_{k=0}^{p-1} A^k B A^{p-k-1}$.

Exercice 3.12 *Montrer que pour tout opérateur linéaire $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, ona*

$$\det(I + tA) = 1 + t.trA + o(t^2), \quad t \to 0$$

où I est la matrice unité et $trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ est la trace de la matrice associée à l'opérateur A par rapport à une base quelconque. En déduire que la trace ne dépend pas de la base.

4 Matrice jacobienne

Considérons l'application $f : \Omega \subset E \longrightarrow F$, $x \longmapsto y = f(x)$. On a

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, ..., x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, ..., x_n), \\ &\vdots \\ y_p &= f_p(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

On suppose que les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq n$, $a \in \Omega$, existent.

Définition 21 *On appelle matrice jacobienne de f en a, la matrice d'ordre $p \times n$ suivante :*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Si $p = 1$, $J_f(a)$ se réduit à un vecteur de E,

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right), \quad (f \equiv f_1),$$

appelé gradient de f ; (On le note grad f ou ∇f).

Si $n = p$, le déterminant de la matrice $J_f(a)$ s'appelle jacobien de f en a et on écrit

$$\det J_f(a) = \frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}(a).$$

Exprimé en terme de matrice jacobienne, la proposition précédente (sur la différentielle d'une fonction composée) fournit le résultat suivant :

Proposition 22 *On a*

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)).J_f(a).$$

Supposons de plus que f est bijective avec $g = f^{-1}$. D'où $\det J_{g \circ f}(a) = 1$, et par conséquent

$$\frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x_1, ..., x_n)}{\partial(f_1, ..., f_n)}}.$$

Cette formule est très utile car permet souvent d'éviter l'inversion explicite d'une fonction.

Proposition 23 *(théorème des accroissements finis) : Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $a \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ tels que le segment $[a, a+h] = \{a + th : 0 \leq t \leq 1\}$ soit inclus dans Ω. On suppose que f est différentiable sur Ω. Alors, il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :*

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \theta h),$$

avec $h = (h_1, ..., h_n) \in E$.

Remarque 24 *Le théorème des accroissements finis n'est plus vrai pour les fonctions à valeurs vectorielles (en particulier à valeurs complexes).*

Proposition 25 *(Inégalité des accroissements finis) : Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow F$ une application, $a \in \Omega$, $h \in E$ tels que le segment $[a, a+h]$ soit inclus dans Ω. On suppose que f est continue sur $[a, a+h]$, différentiable sur $]a, a+h[$ et que :*

$$\exists M, \forall x \in]a, a+h[, \| df(x) \| \leq M.$$

Alors,

$$\| f(a+h) - f(a) \| \leq M \| h \| .$$

Exercice 4.1 *Soit Ω un ouvert convexe de E, $f : \Omega \longrightarrow F$ une application différentiable dans Ω. Supposons qu'il existe*

$$M = \sup\{\| df(x) \|; x \in int\Omega\} < +\infty$$

tel que : $\forall x \in \Omega, \| df(x) \| \leq M$. Montrer que f est lipschitzienne sur Ω.

Exercice 4.2 *Soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow F$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$, $x, y \in E$ tels que : $\forall t \in [0, 1]$, $x + t(y - x) \in \Omega$.*

a) Montrer que :

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 f'(x + t(y-x))(y-x)dt.$$

b) En déduire que :

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \sup_{t \in [0,1]} \|f'(x + t(y-x))\|_{\mathcal{L}(E,F)}.\|y - x\|.$$

Indication : Poser $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$ et utiliser le théorème de la dérivée de fonctions composées.

Exercice 4.3 *Soit $\Omega \subset E$, un ouvert et soit (f_n) une suite de fonctions définies sur Ω à valeurs dans F, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $f : \Omega \longrightarrow F$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$ telles que :*

i) (f_n) converge simplement vers f sur Ω.

ii) (f'_n) converge uniformément vers g sur tout compact de Ω.

1) Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, F)$ et $f' = g$.

2) Montrer que si Ω est connexe, alors on peut remplacer i) par

$$\exists a \in \Omega, \lim_{n \to +\infty} f_n(a) = f(a).$$

5 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soient $a \in E$, Ω un voisinage de a et $f : \Omega \longrightarrow F$. Si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existent au point $a \in \Omega$ et sont continues en a, on sait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ en a. Si ces dérivées partielles possèdent elles-mêmes des dérivées partielles, on les appellent dérivées partielles secondes et on note

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(a).$$

Si ces dérivées partielles secondes existent au voisinage de a et sont continues en a, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ en a. On définit ainsi par récurrence les dérivées partielles $k^{\text{èmes}}$ et la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^k$. On dit enfin qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en a si toutes ses dérivées partielles, de tous les ordres, existent au voisinage de a et sont continues en a.

Exercice 5.1 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{g(xy)}{g(x^2)+g(y^2)} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

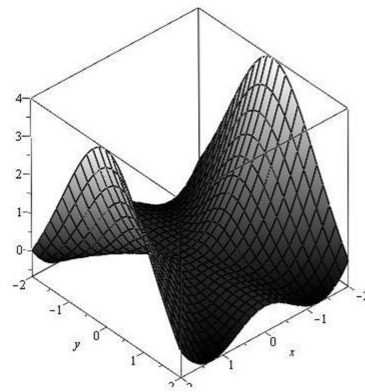
$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Réponse : On montre que $g \in \mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on en déduit que : $f \in \mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ (composée et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0,0)=0$ et

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$



(Surface d'équation $z = f(x,y)$)

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ si $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ si $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Dès lors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1,$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Par conséquent, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. On constate donc que même si les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en un point existent, elles ne sont pas nécessairement égales.

Le théorème de Schwarz suivant donne une condition suffisante sur l'interversion des dérivées partielles.

Théorème 26 *Si* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ *existent dans un voisinage* Ω *d'un point* $a = (a_1, ..., a_n)$ *et sont continues en ce point, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Remarque 27 *Ce théorème s'applique en particulier aux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, cas de loin le plus important dans les applications. Par ailleurs, on peut démontrer une variante du théorème précédent, en supposant que f est deux fois différentiable en a. Signalons aussi que la formule ci-dessus d'interversion des dérivées partielles, signifie que la matrice hessienne de f est alors symétrique en chaque point. Cela signifie aussi que la différentielle seconde $d^2f(a)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $E \times E$, c-à-d. que*

$$d^2f(a)(u,v) = d^2f(a)(v,u), \quad \forall u,v \in E$$

Plus généralement, si $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert Ω, alors l'ordre dans lequel est calculée toute dérivée partielle d'ordre k est sans importance : si σ est une permutation de $\{1, 2, ..., k\}$, alors

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(k)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(2)}} \partial x_{i_{\sigma(1)}}},$$

sur Ω. Il suffit de raisonner par induction.

Remarque 28 *Pour désigner les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ d'une fonction f de n variables de classe $\mathcal{C}^k$, on utilise parfois la notation suivante :*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_n)^{\alpha_n} ... (\partial x_1)^{\alpha_1}},$$

avec $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$: n-uple d'entiers ≥ 0 et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq k$.

L'importance de ce théorème provient de son utilisation intensive en mathématiques, en physique, en chimie, dans les sciences de l'ingénieur ainsi que de ses nombreuses applications dans d'autres domaines. Il est d'usage courant là où les dérivées partielles secondes apparaissent notamment lors de la résolution des équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. Il intervient par exemple dans la construction des formules fondamentales d'analyse vectorielle, des expressions des fonctions d'état en thermodynamique, dans l'étude de l'équation des cordes vibrantes et équation des télégraphistes, dans l'étude des ondes, dans l'obtention des relations de Maxwell, pour ne citer que ces exemples marquants, il y en a évidemment beaucoup d'autres ! D'autre part, pour la résolution d'exercices la contraposée de ce théorème permet par l'absurde de montrer que certaines fonctions ne sont pas de classe $\mathcal{C}^2$. Au vu de l'importance de ce résultat, il n'est donc pas inutile de chercher à l'améliorer en affaiblissant les conditions imposées à la fonction f. Nous allons voir dans le théorème ci-dessous qu'effectivement, ceci est possible (pour la preuve voir [7]). Sans restreindre la généralité, on peut se limiter aux fonctions à valeurs réelles et à la considération de deux variables à la fois.

Théorème 29 *Soit f une fonction de deux variables à valeurs réelles, définie dans un voisinage Ω du point $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On suppose que :*

(i) les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ existent dans Ω.

(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ est continue sur Ω.

(iii) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,b)$ existe pour x dans un voisinage de a.

Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ existe en (a,b) et on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a,b)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b).$$

6 Formule de Taylor et développements limités

Théorème 30 *(Formule de Taylor) : Soient $a\in\mathbb{R}^n$, Ω un voisinage de a et $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$. Soit $h\in\mathbb{R}^n$, tel que le segment $[a,a+h]$, soit contenu dans Ω. On suppose que $f\in\mathcal{C}^{r+1}$ sur Ω. Alors, il existe $\theta\in]0,1[$ tel que :*

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i+\frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}}(a)h_{i_1}h_{i_2}+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{n}\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r}\dots\partial x_{i_1}}(a)h_{i_1}\dots h_{i_r}\\
&\quad+\frac{1}{(r+1)!}\sum_{i_1,\dots,i_{r+1}=1}^{n}\frac{\partial^{r+1} f}{\partial x_{i_{r+1}}\dots\partial x_{i_1}}(a+\theta h)h_{i_1}\dots h_{i_{r+1}}.
\end{aligned}$$

Remarque 31 *Ces résultats peuvent être étendus au cas des fonctions $f:\Omega\longrightarrow F$.*

Remarque 32 *Le terme d'indice r du théorème précédent, c-à-d.,*

$$\frac{1}{r!}\sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{n}\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_r}\dots\partial x_{i_1}}(a)h_{i_1}\dots h_{i_r},$$

se note souvent

$$\frac{1}{r!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^n f(a).$$

Remarque 33 *Pour le cas d'une fonction à deux variables x et y, on utilise parfois les notations de Monge :*

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exercice 6.1 *Quelle est la valeur approchée de* $(0,95)^{2,01}$?

<u>*Réponse*</u> : $(0,95)^{2,01} \approx 0,902$.

Soient $\Omega \subset E$, un ouvert, $f : \Omega \longrightarrow F$ et $a \in \Omega$. On dit qu'un polynôme $P : E \longrightarrow F$, de degré $\leq n$ est un développement limié de f à l'ordre n au point a, si

$$||f(a+x) - P(x)|| = o(||x||^n).$$

Cela revient à dire que la fonction $x \longmapsto f(x+a)$ est n-tangente à P à l'origine. Si P existe, alors il est unique. Dans le cas où f est n-fois différentiable au point a, la formule de Taylor, exprime précisément que f admet un développement limité P à l'ordre n au point a.

Exercice 6.2 *Soit* $GL_n(n, \mathbb{K})$ *l'ensemble des matrices* $n \times n$ *inversibles.*

a) Montrer que l'application :

$$f : GL_n(n, \mathbb{K}) \longrightarrow GL_n(n, \mathbb{K}), \quad A \longmapsto A^{-1},$$

est différentiable en tout point. Quelle est sa différentielle ?

b)Montrer que l'application :

$$g : GL_n(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, \quad A \longmapsto \det A,$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ *en tout point. Quelle est sa différentielle ?*

<u>*Réponse*</u> :

a) $\forall (A, B) \in GL_n(n, \mathbb{K})^2$, $df(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$.

b) $\forall (A, B) \in GL_n(n, \mathbb{K})^2$, $dg(A)(B) = \det A.\text{tr}(A^{-1}B)$.

7 Théorème d'inversion locale

Considérons le système de n équations algébriques à n inconnues suivant :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

D'une façon condensée, ce système s'écrit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

ou encore sous forme matricielle, $Ax = b$, avec $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times n$, $b = (b_i)$ une matrice $n \times 1$ et $x = (x_j)$ une matrice $n \times 1$. La matrice A définit une transformation linéaire de E dans E pour laquelle on utilise aussi la notation A :

$$A : E \longrightarrow E, \quad (x_1, ..., x_n) \longmapsto (y_1, ..., y_n)$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

On sait que le système précédent a une solution unique si et seulement si la matrice A est inversible, donc si $\det A \neq 0$. Cela revient à dire que l'application A est bijective.

Qu'en est-il si on considère un système de n équations non-linéaires à n inconnues :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \cdots, x_n) &= b_1, \\ f_2(x_1, \cdots, x_n) &= b_2, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) &= b_n, \end{aligned}$$

ou sous forme condensée $f(x) = b$? A la place de A interviendra le jacobien de f c-à-d.,

$$\det J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x_0) & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un point x_0 et que $f(x_0) = b_0$. L'équation $f(x) = b$ peut alors s'écrire

$$f(x) - f(x_0) = b - b_0,$$

ou encore

$$df(x_0).(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0) = b - b_0.$$

Une approximation linéaire de l'équation proposée est donc fournie par

$$df(x_0).(x - x_0) = b - b_0.$$

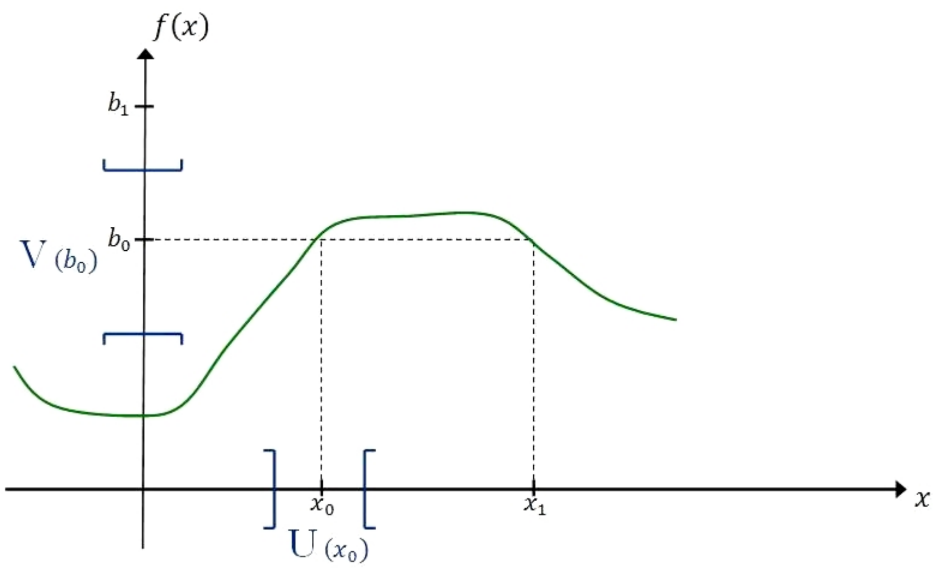
Comme la fonction linéaire $df(x_0) : E \longrightarrow E$, est représentée par la matrice jacobienne

$$J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i,j \leq n},$$

on peut aussi écrire l'équation linéaire approchée sous la forme

$$J_f(x_0).(x - x_0) = b - b_0.$$

L'équation approchée possède donc pour chaque b une solution unique en x si et seulement si la matrice jacobienne $J_f(x_0)$ est inversible et donc si et seulement si le jacobien de f en x_0 (c-à-d. det $J_f(x_0)$) n'est pas nul. Pourrait-on espérer que l'équation $f(x) = b$, elle-même possède une solution unique si c'est le cas de l'équation linéaire approchée (autrement dit si l'application linéaire approchant f est inversible) ? Posée globalement, la question appelle une réponse négative. Mais localement, la réponse est positive. Précisons cela en examinant un exemple dans le cas $n = 1$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.



La matrice jacobienne de f en x_0 se réduit au nombre réel $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ qui n'est pas nul (la tangente à la courbe en (x_0, b_0) n'est pas horizontale). On peut faire les observations suivantes :

(i) négativement : l'équation $f(x) = b$ n'a pas nécessairement de solution ; c'est la cas par exemple de l'équation $f(x) = b_1$. De plus si l'équation $f(x) = b$ a une solution, celle-ci n'est pas nécessairement unique. Par exemple, l'équation $f(x) = b_0$ admet les deux solutions x_0 et x_1.

(ii) positivement : si on considère les voisinages $U(x_0)$ de x_0 et $V(b_0)$ de b_0, la fonction

$$f : U(x_0) \longrightarrow V(b_0),$$

est bijective. En outre, la fonction réciproque

$$f^{-1} : V(b_0) \longrightarrow U(x_0),$$

est encore de classe $\mathcal{C}^1$.

C'est là un fait général comme le montre le théorème suivant :

Théorème 34 *(d'inversion locale) : Soit Ω un ouvert de E et*

$$f : \Omega \longrightarrow E,$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x_0 \in \Omega$, $b_0 = f(x_0)$. Supposons que $df(x_0)$ soit inversible (c-à-d., $\det J_f(x_0) \neq 0$). Alors, il existe un voisinage $U(x_0)$ de x_0 et un voisinage $V(b_0)$ de b_0 tels que la restriction de f à $U(x_0)$ soit une bijection de $U(x_0)$ sur $V(b_0)$. En outre, la réciproque

$$f^{-1} : V(b_0) \longrightarrow U(x_0),$$

est de classe $\mathcal{C}^1$. (Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, alors f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^k$).

Remarque 35 *En bref, ce théorème signifie qu'une fonction est inversible au voisinage d'un point en lequel sa différentielle est inversible.*

Exercice 7.1 *Soit $\Omega \subset E$, un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow E$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x_0 \in \Omega$, $b_0 = f(x_0)$. Supposons que : $\forall x \in \Omega$, $df(x)$ est un isomorphisme. Montrer que :*

a) $\Delta \subset \Omega$, ouvert$\Longrightarrow$ $f(\triangle) \subset E$, ouvert.

b) f injective au voisinage de chaque point de Ω.

c) f peut ne pas être injective sur Ω tout entier même si Ω est connexe (un phénomène qui ne peut se produire lorsque $n = 1$).

Exercice 7.2 *Soit $f : \Omega \subset E \longrightarrow E$, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω et supposons que $df(x)$ est un isomorphisme pour tout $x \in \Omega$. Montrer que $f(\Delta)$ est ouvert dans E pour chaque ouvert $\Delta \subset \Omega$.*

Exercice 7.3 *Sous les hypothèses de l'exercice précédent, montrer que :*

a) f est injective au voisinage de chaque point de Ω.

b) f peut ne pas être injective sur Ω tout entier (même lorsque Ω est connexe).

Définition 36 *Un bijection f d'un ouvert Ω de E sur un ouvert $f(\Omega)$ de E qui est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, ainsi que sa réciproque f^{-1} s'appelle un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$.*

Exercice 7.4 *Plaçons nous dans la situation du théorème d'inversion locale dont nous utilisons les notations : Ω, f, x_0, U, V et f^{-1}. Montrer que pour tout voisinage ouvert $W \subset U$ de x_0, $f(W)$ est un voisinage ouvert de $f(x_0)$, et f est bijective de W sur $f(W)$ avec une réciproque de classe $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{C}^k$ si f l'est).*

<u>*Indication*</u> : Il suffit de vérifier que $f(W)$ est un ouvert, la suite résultant alors directement du théorème d'inversion locale.

8 Théorème des fonctions implicites et théorème du rang constant

Considérons une fonction

$$g : E \times F \longrightarrow F, \quad (x, y) \longmapsto g(x, y)$$

et soit l'équation

$$g(x, y) = 0, \quad x \in E, \quad y \in F$$

Le problème qui se pose est de déterminer y comme fonction de x (autrement dit, trouver les $y_1, ..., y_p$ en fonction de $x_1, ..., x_n$).

On a à ce sujet le théorème fondamental suivant, qui résulte du théorème d'inversion locale.

Théorème 37 *(des fonctions implicites) : Soit Ω un ouvert de $E \times F$ et $g : \Omega \longrightarrow F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(a, b) \in \Omega$. Supposons que :*

(i) $g(a, b) = 0$.

(ii) la matrice $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial y_j}(a, b)\right)_{1 \leq i,j \leq p}$ est inversible.

Montrer qu'il existe un voisinage $U(a)$ de a dans E et un voisinage $V(b)$ de b dans F, avec $U(a) \times V(b) \subset \Omega$, tels qu'il existe une fonction unique $f : U(a) \longrightarrow V(b)$, avec

(i)' $b = f(a)$.

(ii)' $g(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in U(a)$.

Cette fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, si g est de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$, f est de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 8.1 *On considère la relation :*

$$g(x_1, ..., x_n, y) = 0,$$

où $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ avec $g(a, b) = 0$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Montrer que qu'il existe f définie et de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}.$$

<u>*Indication*</u> : D'après le théorème des fonctions implicites, on a $g(x, f(x)) = 0$ et il suffit d'appliquer la formule de dérivation des fonctions composées.

Exercice 8.2 *On considère deux surfaces d'équations :*

$$x^2(y^2+z^2)=2,$$

et

$$(x-z)^2+y^2=1.$$

Peut-on représenter la courbe intersection de ces surfaces par des équations de la forme $y=f_1(x)$ et $z=f_2(x)$ au voisinage du point $(1,1,1)$? Si oui, calculer $f_1'(1)$ et $f_2'(1)$.

<u>*Réponse*</u> : $f_1'(1)=0$ et $f_2'(1)=-2$.

Exercice 8.3 *On considère la courbe d'équation :*

$$g(x,y)=y^2-2x^3-x^2=0.$$

Peut-on représenter cette courbe par une équation $x=f(y)$.
a) au voisinage du point $(1,\sqrt{3})$?
b) au voisinage du point $(0,0)$?
Si oui, calculer la dérivée de f au point considéré.

<u>*Réponse*</u> :
a) Oui et on a $f'(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{4}$.
b) Non.

Exercice 8.4 *On suppose que les variables réelles x,y,z sont liées par la relation $f(x,y,z)=0$. Montrer que sous des hypothèses à préciser*

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

Exercice 8.5 *On considère la surface d'équation :*

$$xy-z\ln y+\exp xz=1.$$

Cette surface peut-elle être représentée,
a) par une équation de la forme $z=f(x,y)$ au voisinage du point $(0,1,1)$?
b) par une équation de la forme $y=h(x,z)$ au voisinage du point $(0,1,1)$?
Si oui, calculer les dérivées premières de f et h au point considéré.

<u>*Réponse*</u> :
a) Non.
b) Oui et on a $\frac{\partial h}{\partial x}((0,1))=2$, $\frac{\partial h}{\partial z}((0,1))=0$

Exercice 8.6 *Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x,y) = (x^2 - y^2 - 2xy, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Montrer que f définit une bijection de $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ sur $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u + 2v^2 > 0\}$.
2) f est-elle un homéomorphisme de U sur V ?
3) f est-elle un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur V ?
4) Soit g une fonction continument dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et h l'application

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow h(x,y) = g(x^2 - y^2 - 2xy) \in \mathbb{R}.$$

4.1) Calculer $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y}$.
4.2) Montrer l'égalité

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x+y)\frac{\partial h}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial h}{\partial y} = 0. \qquad (*)$$

4.3) On cherche les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité (*).

(i) Soit h_1 une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'égalité (*). Montrer que l'application g_1 :

$$(u,v) \in V \longmapsto g_1(u,v) = h_1 \circ f(u,v) \in \mathbb{R},$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\dfrac{\partial g_1}{\partial v} = 0$.

(ii) On admet que si une fonction H de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans $\mathbb{R}$ vérifie $\dfrac{\partial H}{\partial v} = 0$ alors H ne dépend pas de la variable u.
En déduire la forme générale des fonctions vérifiant l'égalité (*) dans U.

Réponse :
2) Oui.
3) Oui.
4.1) On obtient

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2(x-y)g'(x^2 - y^2 - 2xy), \quad \frac{\partial h}{\partial y} = -2(x+y)g'(x^2 - y^2 - 2xy).$$

4.2) Calcul direct et simple.
4.3) $h(x,y = H(x^2 - y^2 - 2xy)$ où $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 8.7 *Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow E$ une application différentiable injective. Montrer que f est un difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$ si et seulement si le rang de f (c-à-d. le rang de la matrice jacobienne de f) en tout point de Ω est n.*

Indication : Il suffit d'utiliser le théorème d'inversion locale.

Théorème 38 *(du rang constant). Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \longrightarrow F$ une application différentiable de rang constant r. Montrer que pour tout $a \in \Omega$, il existe*

(i) un voisinage ouvert $U(a)$ de a dans Ω.
(ii) un voisinage ouvert $V(b)$ de $b = f(a)$ dans F, contenant $f(U(a))$.
(iii) un difféomorphisme local $g : U(a) \longrightarrow W$ de E et un difféomorphisme local $h : V(b) \longrightarrow W'$ de F.

tels que l'on ait :

$$(h \circ f \circ g^{-1})(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_r, 0, ..., 0), \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in W.$$

9 Fonctions homogènes

Définition 39 *On dit qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$, est homogène de degré α si, pour $\lambda \in {}^*_+$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on ait*

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x).$$

Si f et g sont homogènes de degré α, alors $f + g$ est homogène de degré α. Si f est homogène de degré α et g est homogène de degré β, alors fg est homogène de degré $\alpha+\beta$ et $\frac{f}{g}$ est homogène de degré $\alpha-\beta$. Si f est homogène de degré α et $s \in \mathbb{R}^*$, alors f^s est homogène de degré α^s. Si f est différentiable et homogène de degré α, alors les dérivées partielles de f sont homogènes de degré $\alpha - 1$.

Proposition 40 *Si f est différentiable en x et homogène de degré α, alors on a la formule d'Euler :*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \alpha f(x).$$

Exercice 9.1 *Déterminer la fonction $f : (\mathbb{R}_+^*)^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z)$ homogène de degré α en y, z, de degré β en z, x et de degré γ en x, y.*

Réponse : $f(x, y, z) = Cx^{\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}} y^{\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}} z^{\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$.

Exercice 9.2 *Soit E, F deux espaces vectoriels réels normés et $f : E \longrightarrow F$, vérifiant*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in E.$$

On suppose que f est bornée sur la boule unité de E. Montrer que :

a) $\forall \lambda \in \mathbb{Q}, \quad \forall x \in E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

b) f est continue en tout point de E.

c) f est linéaire.

Exercice 9.3 *On appelle cône (positif) d'un evn E une partie C de E vérifiant : $\forall x \in E, \forall \lambda > 0, \lambda x \in C$. Vérifier que $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \geq 0\}$ est un cône positif et que $f : (x,y) \mapsto \sqrt{y-x}$ est homogène (préciser son degré).*

Réponse : f est homogène de degré $\frac{1}{2}$.

Exercice 9.4 *Déterminer les fonctions φ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :*

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)g(y).$$

Réponse : Les fonctions φ de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant à l'équation ci-dessus sont

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \varphi(t) = ct^\beta, \quad (c, \beta \in \mathbb{R})$$

10 Extremum et méthode des multiplicateurs de Lagrange

Soient Ω un ouvert de E, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.

Définition 41 *a) On dit que f possède en a un maximum (resp. minimum) local ou relatif s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a inclus dans Ω tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad f(x) \leq f(a) \quad (\textit{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

b) On dit que f possède en a un maximum (resp. minimum) global si :

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) \leq f(a) \quad (\textit{resp. } f(x) \geq f(a)).$$

c) Un extremum est un maximum ou un minimum.

Proposition 42 *(Condition nécessaire) : Si f est différentiable en a et présente un extremum en a, alors $df(a) = 0$.*

Soit Ω un ouvert de E, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in \Omega$ tel que : $df(a) = 0$.

Définition 43 *On appelle matrice hessienne (ou tout simplement hessienne) de f en a, la matrice suivante :*

$$\mathcal{H}(f,a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

A la matrice hessienne $\mathcal{H}$ de f en a (comme toute matrice carée d'ordre n), on associe la forme quadratique $Q : E \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$Q(h)=\sum_{i,j}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)h_ih_j, \quad \forall h=(h_1,...,h_n)\in E.$$

Cette forme quadratique est parfois notée $d^2f(a)$ et sa valeur en h, $d^2f(a)(h)$. Rappelons qu'une forme quadratique Q est dite

- définie positive si $\forall h\in E, h\neq 0, Q(h)>0$.
- semi-définie positive si $\forall h\in E, Q(h)\geq 0$.
- définie négative si $\forall h\in E, h\neq 0, Q(h)<0$.
- semi-définie négative si $\forall h\in E, Q(h)\leq 0$.
- indéfinie si $\exists h,g\in E$ avec $Q(h)>0$ et $Q(g)<0$.

Proposition 44 *(Conditions suffisantes) : Soit Ω un ouvert de E, $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a\in\Omega$ tel que : $df(a)=0$.*

1) Si $d^2f(a)$ est une forme quadratique définie positive, alors f possède un minimum local au point a.

2) Si $d^2f(a)$ est une forme quadratique définie négative, alors f possède un maximum local au point a.

3) Si la forme quadratique $d^2f(a)$ est indéfinie, alors f n'a pas d'extremum au point a.

Proposition 45 *Si f possède un minimum local (resp. un maximum local) au point a, alors $d^2f(a)$ est semi-définie positive (resp. semi-définie négative).*

Remarque 46 *On démontre en algèbre qu'une forme quadratique Q associée à une matrice symétrique $\mathcal{H}$ est définie positive (resp. semi-définie positive) si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice $\mathcal{H}$ sont strictement positives (resp. positives).*

Proposition 47 *(Conditions suffisantes) : Soit Ω un ouvert de E, $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a\in\Omega$ tel que : $df(a)=0$.*

1) Si les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f,a)$ sont strictement positives, alors f possède un minimum local au point a.

2) Si les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f,a)$ sont strictement négatives, alors f possède un maximum local au point a.

3) S'il existe deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de $H(f,a)$ de signe contraire, f ne possède ni maximum, ni minimum local au point a.

Remarque 48 *Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, on montre que la matrice $\mathcal{H}(f,a)$ est symétrique et toutes ses valeurs propres sont réelles. De plus, toutes ses valeurs propres sont strictement positives si et seulement si $\mathcal{H}(f,a)$ est définie positive. De même, toutes ses valeurs propres sont strictement négatives si et seulement si $\mathcal{H}(f,a)$ est définie négative.*

Exercice 10.1 *(Conditions nécessaires) : Dans les hypothèses de la proposition précédente, montrer que :*

1) Si f possède un minimum local au point a, toutes les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f,a)$ sont positives ou nulles.

2) Si f possède un maximum local au point a, toutes les valeurs propres de la matrice hessienne $H(f,a)$ sont négatives ou nulles.

Dans le cas de fonctions de deux variables $f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$, on peut se passer du calcul explicite des deux valeurs propres de la matrice hessienne et se contenter du signe du déterminant. Soit a un point critique, c-à-d., tel que : $df(a) = 0$. Posons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \qquad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \qquad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

La matrice hessienne

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix},$$

a pour déterminant :

$$\det \mathcal{H} = rt - s^2.$$

L'équation caractéristique est alors

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - r & -s \\ -s & \lambda - t \end{pmatrix} = \lambda^2 + (r+t)\lambda + (rt - s^2) = 0.$$

Si $\det \mathcal{H} < 0$, les deux racines sont de signes contraires et la matrice hessienne est indéfinie. On n'a donc pas d'extremum en a. On dit dans ce cas que f admet un point col ou point selle en a. Si $\det \mathcal{H} > 0$, les deux racines sont de même signe et f admet un extremum en a. C'est un minimum local si $r > 0$ et un maximum local si $r < 0$. En résumé, on a

Proposition 49 *(Conditions suffisantes dans le cas de fonctions de deux variables) :*
1) Si $\det \mathcal{H} > 0$ *et* $r > 0$*, alors* f *admet un minimum local au point* a*.*
2) Si $\det \mathcal{H} > 0$ *et* $r < 0$*, alors* f *admet un maximum local au point* a*.*
3) Si $\det \mathcal{H} < 0$*, alors* f *n'admet pas d'extremum local au point* a*.*

Remarque 50 *Si* $\det \mathcal{H} = 0$*, il faut faire une étude plus complète de* f*.*

Exercice 10.2 *Déterminer les extremums de la fonction :*

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Réponse : grad $f(x, y) = 0 \iff (x, y) = (2, 1), (-2, -1), (1, 2), (-1, -2)$. On montre que f possède un minimum local au point $(2, 1)$, un maximum local au point $(-2, -1)$ et ne possède ni maximum, ni minimum aux points $(1, 2)$, $(-1, -2)$.

Exercice 10.3 *Déterminer les extremums de la fonction :*

$$f(x, y) = \sin x. \sin y.$$

Réponse : f possède un minimum aux points $(k\pi + \frac{\pi}{2}, l\pi + \frac{\pi}{2})$ avec $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que : $k + l$ est impair. De même, f possède un maximum aux points $(k\pi + \frac{\pi}{2}, l\pi + \frac{\pi}{2})$ avec $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que : $k + l$ est pair.

Les extremums étudiés précédemment sont dites libres. Mais bien des cas, on cherche à maximiser ou à minimiser une fonction, mais en tenant compte de certaines contraintes : on parle dans ces cas d'extremums liés.

Définition 51 *Soient* $f : \Omega \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : \Omega \subset E \longrightarrow F$*, deux fonctions données et* $a \in \Omega$*. On dit que* f *possède au point* a *un maximum local sous les contraintes* $g(x) = 0$ *si*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}, ||x - a|| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) \leq f(a).$$

La fonction f *possède au point* a *un minimum local sous les contraintes* $g(x) = 0$ *si*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}, ||x - a|| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) \geq f(a).$$

Si f *possède au point* a *un maximum ou un minimum local sous les contraintes* $g(x) = 0$*, on dit que* f *possède au point* a *un extremum local sous les contraintes* $g(x) = 0$*.*

Proposition 52 *Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que f possède au point a un extremum sous les contraintes $g(x) = 0$ et que la matrice jacobienne $J_g(a)$ de g au point a soit de rang p. Alors, il existe des constantes $\lambda_1, ..., \lambda_p$ (appelées multiplicateurs de Lagrange) telles que :*

$$grad\ f(a) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.grad\ g_k(a),$$

que l'on peut écrire (notation condensée utilisée par d'autres auteurs) sous la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x}(a).$$

Méthode des multiplicateurs de Lagrange : si le point $a = (a_1, ..., a_n)$ est un extremum local de la fonction f sous les contraintes $g(x) = 0$, alors les relations suivantes en les $n + p$ variables $(a_1, ..., a_n, \lambda_1, ..., \lambda_p)$ permettent en général de déterminer a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(a), \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(a), \\
g_1(a) &= 0, \\
&\vdots \\
g_p(a) &= 0.
\end{aligned}$$

C'est un système de $n+p$ équations à $n+p$ inconnues dont la résolution permet de trouver parmi les $a = (a_1, ..., a_n)$, les extremums liés possibles.

Exercice 10.4 *Chercher un extremum de la fonction :*

$$f(x, y) = x_1^2 + x_2^2,$$

sous la contrainte : $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$.

<u>*Réponse*</u> : Les solutions sont $a = (a_1, a_2) = (\pm 1, 0)$, $\lambda = 1$. On peut vérifier qu'il y correspond des minimums de f.

Exercice 10.5 *Chercher les extremums de la fonction :*

$$f(x,y,z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z,$$

sous la contrainte : $x + y + z = a, \quad (a > 0).$

<u>*Réponse*</u> : $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3})$ est minimant.

Exercice 10.6 *Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par*

$$f(x,y,z) = \exp x + \exp y + \exp z,$$

lorsque (x,y,z) est soumis à la contrainte : $x + y + z = 0.$

<u>*Réponse*</u> : f n'admet pas de maximum mais possède un minimum égal à 3 au point $(0,0,0)$.

Exercice 10.7 *Soit $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$. On suppose que la différentielle de g est non nulle en tout point de $\mathcal{S}$. Montrer que si f admet un extremum sur $\mathcal{S}$ en $a \in \mathcal{S}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que : $df(a) = \lambda dg(a)$.*

Exercice 10.8 *Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive et $f \in \mathbb{R}^n$. On leur associe l'application*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \varphi(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < f, x > .$$

a) Etudier la différentiabilité de φ.
b) Calculer grad φ.
c) Déterminer les extremums de φ.

Exercice 10.9 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce problème, on considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et on désigne par f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. On dit que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si :*

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \forall \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

1) Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $\mathbb{R}$ telle que : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, g'(x_0) = 0$. Montrer que g admet un minimum en x_0.
2) a) Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, la fonction $\varphi_{x,y}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_{x,y}(t) = f(x + yt),$$

est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \varphi_{x,y}$ *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$. *Déterminer alors, pour tout* $(x,y) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n), \varphi'_{x,y}$ *et* $\varphi''_{x,y}$ *en fonction des dérivées partielles de* f.

c) Soient $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $A_x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A_x = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, *la matrice définie par*

$$\forall (i,j) \in [1,n]^2, a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Soit alors ψ_x *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *dont la matrice dans la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *est* A_x. *Montrer que les valeurs propres de* A_x *sont positives ou nulles si et seulement si* $\forall y \in \mathbb{R}^n, \langle \psi_x(y), y \rangle \geq 0$.

d) En déduire que f *est convexe sur* $\mathbb{R}^n$ *si et seulement si pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, *toutes les valeurs propres de* A_x *sont positives ou nulles.*

3) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Montrer que si* f *est convexe sur* $\mathbb{R}^n$ *et si* $\forall i \in [1,n], \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$, *alors* f *admet un minimum en* x_0.

Références

[1] T. M. Apostol, Mathematical analysis : A modern approach to advanced calculus, 1974, Addison-Wesley.

[2] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, 1997, Hermann.

[3] R. Godement, Analyse Mathématique II, Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes, Springer, 2ème édition 2003.

[4] B. Hauchecorne, Les Contre-exemples en Mathématiques, Ellipses, 2ème édition 2007.

[5] J. Dieudonné, Éléments d'analyse, Tome 1, Fondements de l'analyse moderne, Gauthier-Villars, 3ème édition 1979 - tirage 1990.

[6] Lesfari, A. : Fonctions différentiables, Quadrature, Paris, No. 84, pp.45-47 (2012).

[7] Lesfari, A. : Interversion des dérivées partielles, à paraître dans Quadrature, Paris, No. 91, pp.41-43 (2014).

[8] J. Mawhin, Analyse. Fondements, techniques, évolution, 1997, De Boeck Université, Bruxelles.

[9] L. Schwartz, Analyse, tome 2, Calcul différentiel et équations différentielles, 1992, Hermann.