ANALYSE 4

(*Séries Numériques, Suites et Séries de Fonctions*)

SMA3, 2017-2018

A. Lesfari

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr
Site Web : http://lesfari.com

Table des matières

1 Séries numériques **3**
- 1.1 Définitions et propriétés générales . . . 3
- 1.2 Séries à termes positifs . . . 5
- 1.3 Séries à termes de signes quelconques . . . 10
- 1.4 Opérations sur les séries . . . 13
  - 1.4.1 Associativité et commutativité . . . 13
  - 1.4.2 Multiplication des séries . . . 14
- 1.5 Produits infinis . . . 15
- 1.6 Exercices . . . 16

2 Suites et séries de fonctions **25**
- 2.1 Convergence simple, convergence absolue . . . 25
- 2.2 Convergence uniforme . . . 26
  - 2.2.1 Définitions et propriétés générales . . . 26
  - 2.2.2 Continuité, intégration et dérivation . . . 28
- 2.3 Convergence normale et critère de Weierstrass . . . 30
- 2.4 Critère d'Abel-Dirichlet de convergence uniforme . . . 31
- 2.5 Exercices . . . 31

3 Séries entières **38**
- 3.1 Généralités . . . 38
- 3.2 Comportement sur le bord du disque de convergence . . . 41
- 3.3 Convergence normale et uniforme . . . 42
- 3.4 Continuité, dérivation et intégration d'une série entière . . . 42
- 3.5 Développement d'une fonction en série entière. Calcul de la somme d'une série entère . . . 43
- 3.6 Résolution des équations différentielles à l'aide des séries entières 46
- 3.7 Exercices . . . 48

4 Séries de Fourier **53**
- 4.1 Séries trigonométriques . . . 53
- 4.2 Séries de Fourier, Théorème de Dirichlet . . . 54
- 4.3 Théorèmes de Cesaro, Fejér, Jordan et Weierstrass . . . 64
- 4.4 Egalité de Parseval et inégalité de Bessel . . . 65
- 4.5 Exercices . . . 67

1 Séries numériques

1.1 Définitions et propriétés générales

Soit (a_k) une suite réelle ou complexe. Considérons les sommes partielles

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & a_1 \\ S_2 & = & a_1 + a_2 \\ & \vdots & \\ S_n & = & a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ & \vdots & \end{array}$$

On appelle série numérique de terme général a_k et on note $\sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k$ ou tout simplement $\sum a_k$, la suite (S_n) des sommes partielles.

Définition 1 *On dit que la série $\sum a_k$ converge ou est convergente si la suite (S_n) converge. Dans ce cas la limite S de la suite (S_n) est appelée somme de la série et on note*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Si la série ne converge pas, on dit qu'elle diverge ou est divergente.

Si une série $\sum a_k$ converge, on appelle reste d'ordre n de cette série et on note R_n la différence

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

D'où,

$$R_n = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=n+1}^{p} a_k,$$

on peut donc écrire

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

et R_n tend vers zéro quand $n \to +\infty$. Les sommes partielles d'une série sont évidemment toujours définies, mais les restes ne le sont que lorsque la série est convergente.

Remarque 2 *On désignera indifféramment une série de terme général* a_k *par les symboles* $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k$, *ou* $\sum_{k\geq 1} a_k$, *ou encore* $\sum a_k$, *etc. Par ailleurs de nombreux auteurs utilisent aussi, avec un léger abus d'écriture courant, la notation* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *bien que celle-ci désigne à la fois la suite* (S_n) *et la limite de cette suite lorsqu'il y en a une. Cependant il convient de noter que la somme d'une série convergente est la limite d'une suite de nombres obtenus en formant des sommes ayant un nombre croissant de termes mais n'est pas une "somme d'un nombre infini de termes". Dans la définition ci-dessus, nous avons considéré la suite* (a_k) *indexée par les entiers strictement positifs mais il est évident qu'on peut envisager des séries dont les termes sont indexées à partir de* 0 *au lieu de* 1 *ou même considérer une partie infinie* I *de* $\mathbb{N}$ *comme ensemble d'indices, par exemple le cas où* I *est la suite des nombres premiers.*

Exemple 3 *La série géométrique*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k, \quad a \in \mathbb{R}$$

converge si $|a| < 1$ *et diverge si* $|a| \geq 1$.

Théorème 4 *(Critère de Cauchy). La série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) > 0 : n > m \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \varepsilon$$

Cauchy

Exemple 5 *La série harmonique*

$$\sum \frac{1}{k},$$

diverge.

Corollaire 6 *(Condition nécessaire de convergence). Si la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge, alors* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Remarques 7 *a) Si* $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, *alors la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge.*

b) La réciproque du corollaire précédent est fausse en général.

Propriété 8 *Si la série* $\sum a_k$ *converge, alors sa somme est unique.*

Propriété 9 *Si les séries* $\sum a_k$ *et* $\sum b_k$ *convergent, alors* $\sum(\alpha a_k+\beta b_k)$ *converge et*

$$\sum(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum a_k + \beta \sum b_k, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

Propriété 10 *Si* $\sum a_k$ *converge et* $\sum b_k$ *diverge, alors* $\sum(a_k + b_k)$ *diverge.*

Propriété 11 *Si les séries* $\sum a_k$ *et* $\sum b_k$ *divergent, alors on ne peut rien dire sur la nature de* $\sum(a_k + b_k)$.

Exemple 12 *La convergence d'une suite* (a_k) *équivaut à celle de la série dite télescopique :*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1}), \quad a_0 = 0.$$

En outre,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

1.2 Séries à termes positifs

Théorème 13 *Soit* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *une série à termes positifs. Alors cette série converge si et seulement si la suite des sommes partielles* $(S_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ *est majorée.*

Théorème 14 *(Critère de comparaison). Soient* (a_k) *et* (b_k) *deux suites vérifiant :* $0 \leq a_k \leq b_k$.

a) Si $\sum b_k$ *converge, alors* $\sum a_k$ *converge.*

b) Si $\sum a_k$ *diverge, alors* $\sum b_k$ *diverge.*

Exemple 15 *La série*

$$\sum \arcsin \frac{1}{\sqrt{k}},$$

diverge.

Corollaire 16 *(Critère d'équivalence). Soient (a_k) et (b_k) deux suites positives et supposons que :*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L \neq 0, \infty \quad (\text{c.-à-d. } a_k \sim Lb_k \text{ pour } k \to \infty)$$

alors les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont de même nature. Si $L = 0$ et si $\sum b_k$ converge, alors $\sum a_k$ converge. Si $L = \infty$ et si $\sum b_k$ diverge, alors $\sum a_k$ diverge.

Exemple 17 *La série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \ln k},$$

converge.

Corollaire 18 *(Règle $k^\alpha a_k$)). Soit $\sum a_k$ une série à termes positifs. Supposons que :*

$$\lim_{k\to\infty} k^\alpha a_k = L, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Alors $\sum a_k$ converge si L est finie et $\alpha > 1$ et diverge si $L \neq 0$ et $\alpha \leq 1$.

Exemple 19 *La série de Bertrand*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$

- *converge si $\alpha > 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.*
- *diverge si $\alpha < 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.*
- *converge si $\alpha = 1$, $\beta > 1$.*
- *diverge si $\alpha = 1$, $\beta \leq 1$.*

Bertrand

Théorème 20 *(Critère intégral de Cauchy). Soit f une fonction positive et décroissante sur $[1, u]$, $\forall u \geq 1$. Alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge.*

Exemple 21 *La série de Riemann*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}},$$

converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$. Pour $\alpha = 1$, on obtient la série harmonique.

Library of Congress

Riemann

Théorème 22 *(Critère de la racine de Cauchy). Soit $\sum a_k$ une série à termes positifs.*

a) S'il existe un nombre $L < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang

$$\sqrt[k]{a_k} \leq L \leq 1,$$

alors $\sum a_k$ converge et si

$$\sqrt[k]{a_k} \geq 1,$$

la série diverge.

b) Si

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L,$$

alors $\sum a_k$ converge si $L < 1$ et diverge si $L > 1$.

c) Si

$$\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{a_k} = L,$$

alors $\sum a_k$ converge si $L < 1$ et diverge si $L > 1$.

Exemple 23 *La série*

$$\sum \frac{3^k}{k},$$

diverge.

Remarques 24 *a) Si $L = 1$, on ne peut rien conclure.*

b) Si $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1^+$, alors $\sum a_k$ diverge.

Théorème 25 *(Critère du quotient de d'Alembert). Soit $\sum a_k$ une série à termes positifs.*

a) S'il existe un nombre $L < 1$ tel qu'à partir d'un certain rang

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq L \leq 1,$$

alors $\sum a_k$ converge et si

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1,$$

la série diverge.

b) Si

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L,$$

alors $\sum a_k$ converge si $L < 1$ et diverge si $L > 1$.

c) Si

$$\lim_{k\to\infty} \sup \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

alors $\sum a_k$ converge et si $\lim_{k\to\infty} \inf \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, la série $\sum a_k$ diverge.

d'Alembert

Exemple 26 *La série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k},$$

converge.

Remarques 27 *a) Si $L = 1$, on ne peut rien conclure.*

b) Si $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1^+$, alors $\sum a_k$ diverge.

c) Le critère de la racine de Cauchy est plus général que le critère du quotient de d'Alembert au sens suivant :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L.$$

La réciproque est fausse en général.

Proposition 28 *(Règle de Raabe-Duhamel). Soit (a_k) une suite strictement positive.*

a) Supposons que :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]1, +\infty[, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\alpha}{k} + O\left(\frac{1}{k^\beta}\right).$$

Alors, la série $\sum a_k$ diverge si $\alpha \leq 1$ et converge si $\alpha > 1$.

b) Supposons que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{\alpha}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

Alors, la série $\sum a_k$ diverge si $\alpha < 1$ et converge si $\alpha > 1$. Pour $\alpha = 1$, on on ne peut rien conclure.

Raabe

Duhamel

Remarque 29 *Les résultats obtenus dans cette section, concernent les séries à termes positifs. On peut aussi les utiliser pour les séries à termes négatifs compte tenu de la relation :* $\sum a_k = -\sum(-a_k)$ *qui permet de passer d'une série à termes négatifs à une série à termes positifs.*

1.3 Séries à termes de signes quelconques

Définition 30 *On dit que la série* $\sum a_k$ *converge absolument si* $\sum |a_k|$ *converge.*

Théorème 31 *Toute série absolument convergente est convergente et on a*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Exemple 32 *La série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{ik\frac{\pi}{2}},$$

converge.

Remarques 33 *a) La réciproque du théorème précédent est fausse en général.*

b) Il est clair que les résultats de la section 1.2, fournissent en remplaçant a_k *par* $|a_k|$ *des critères de convergence absolue de la série* $\sum a_k$ *où* a_k *n'est pas nécessairement positif.*

Définition 34 *Une série convergente* $\sum a_k$ *telle que* $\sum |a_k|$ *diverge est dite semi-convergente.*

Théorème 35 *(Critère d'Abel-Dirichlet). La série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *converge si les conditions suivantes sont satifaites :*

(i) $\lim_{k\to\infty} b_k = 0.$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |b_{k+1} - b_k|$ *converge.*

(iii) $\exists C : \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq C,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Abel

Dirichlet

Corollaire 36 *Le critère d'Abel-Dirichlet reste vrai si au lieu de (i) et (ii), on suppose que* (b_k) *décroît vers* 0 *pour* $k \to \infty$. *Autrement dit, il reste vrai si au lieu de (ii), on suppose que* $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$

Exemple 37 *Les séries réelles*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos k\alpha, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin k\alpha,$$

et la série complexe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\cos k\alpha + i \sin k\alpha),$$

convergent si on suppose que (b_k) *décroît vers* 0 *pour* $k \to \infty$ *et que* $\alpha \neq 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. *La série* $\sum b_k \sin k\alpha$ *converge évidemment pour* $\alpha = 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

Définition 38 *On dit qu'une série est alternée si ses termes sont alternativement positifs et négatifs (à partir d'un certain rang). Autrement dit, c'est une série dont le terme général est de la forme* $(-1)^k b_k$ *ou* $(-1)^{k+1} b_k$ *avec* $b_k \geq 0$ *à partir d'un certain rang.*

Théorème 39 *(Critère de Leibniz). Soit* (b_k) *une suite décroissante telle que :* $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$. *Alors, la série alternée* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ *converge.*

Leibniz

Exemple 40 *La série harmonique alternée*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

converge.

Développement asymtotique : Considérons la série numérique

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + (-1)^k}.$$

On ne peut pas utiliser le critère de Leibniz car $\frac{1}{k+(-1)^k}$ ne décroît pas. Soit

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k + (-1)^k} = \frac{\frac{(-1)^k}{k}}{1 + \frac{(-1)^k}{k}},$$

et posons $x = \frac{(-1)^k}{k}$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Ecrivons le développement limité de cette fonction à l'ordre 2, au voisinage de 0 :

$$f(x) = x - x^2(1 + \varepsilon(x)), \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

D'où,

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{k^2}\left(1 + \varepsilon\left(\frac{(-1)^k}{k}\right)\right) = b_k + c_k.$$

On montre aisément que $\sum b_k$ converge, $\sum c_k$ converge absolument et par conséquent $\sum a_k$ converge. On peut évidemment utiliser la notation de Landau :

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{k^2} + 0\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

1.4 Opérations sur les séries

1.4.1 Associativité et commutativité

Soient $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ une série numérique et $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante. Posons

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{\varphi(1)},\\
b_2 &= a_{\varphi(1)+1} + a_{\varphi(1)+2} + \cdots + a_{\varphi(2)},\\
&\vdots\\
b_{k+1} &= a_{\varphi(k)+1} + a_{\varphi(k)+2} + \cdots + a_{\varphi(k+1)}, \quad k \in \mathbb{N}^*
\end{aligned}$$

Définition 41 *On dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ est déduite de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ par groupement de termes (ou par sommation par paquets ou encore par insertion de parenthèses). Tandis que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est dite déduite de $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ par suppression de parenthèses.*

Théorème 42 *a) Si la série $\sum a_k$ converge, alors $\sum b_k$ converge vers la même somme.*

b) Si $\sum b_k$ converge et si $a_k \geq 0$, alors $\sum a_k$ converge vers la même somme.

c) Si $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ et s'il existe une constante C telle que :

$$\varphi(k+1) - \varphi(k) \leq C, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

alors les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ sont de même nature.

Exemple 43 *On reprend la série*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k + (-1)^k},$$

et on montre qu'elle converge (utiliser le théorème précédent, point c)).

Définition 44 *Une série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *est dite commutativement convergente si pour toute bijection*

$$\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*, \quad k \longmapsto \sigma(k),$$

la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ *est convergente. Cette dernière série est dite un réarrangement de la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Théorème 45 *La série* $\sum a_k$ *est commutativement convergente si et seulement elle est absolument convergente.*

On dit qu'une famille de nombres complexes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si la série $\sum a_k$ converge absolument. Dans ce cas, la somme de la série $\sum a_k$ est la somme de la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Dans le cas d'une suite double

$$(a_{kl}), \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad l \in \mathbb{N}^*$$

sommable, on a

$$\sum_{k,l\in\mathbb{N}^*} a_{k,l} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{l\in\mathbb{N}^*} a_{k,l} \right) = \sum_{l\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_{k,l} \right), \quad \text{(série double)}$$

1.4.2 Multiplication des séries

Définition 46 *Soient* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *et* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *deux séries numériques. La série* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *où*

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} a_i b_{k-i+1},$$

est dite produit (au sens de Cauchy) des séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *et* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Théorème 47 *(Cauchy-Mertens). Si la série* $\sum a_k$ *converge et a pour somme* A *et si la série* $\sum b_k$ *converge et a pour somme* B*, alors la série* $\sum c_k$ *converge et a pour somme* AB.

Mertens

Remarque 48 *La série produit de deux séries convergentes peut-être divergente.*

Proposition 49 *Si les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ convergent absolument, alors la série $\sum c_k$ converge absolument et on a $\sum c_k = (\sum a_k)(\sum b_k)$.*

Théorème 50 *(Abel). Si la série $\sum a_k$ converge et a pour somme A, si la série $\sum b_k$ converge et a pour somme B, si la série $\sum c_k$ converge et a pour somme C, alors $C = AB$.*

1.5 Produits infinis

Soit (a_k) une suite réelle ou complexe. On suppose que ces nombres sont non nuls. Considérons les produits partiels

$$\begin{aligned} P_1 &= a_1 \\ P_2 &= a_1 a_2 \\ &\vdots \\ P_n &= a_1 a_2 \dots a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

L'expression

$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

s'appelle produit infini de facteur général a_k.

Si

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P,$$

est finie et non nulle, on dira que le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ converge et P est sa valeur. Sinon, on dira qu'il diverge.

Exemple 51 *Les produits infinis*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right), \quad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right),$$

divergent.

Théorème 52 *(Condition nécessaire de convergence). Si le produit infini* $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge, alors* $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$.

Remarque 53 *La réciproque du théorème précédent est fausse en général.*

Il existe des critères de convergence analogues à ceux des séries numériques. On a aussi le résultat suivant qui lie l'étude des produits infinis à celle des séries numériques.

Théorème 54 *L'étude du produit infini* $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k > 0$, *se ramène à celle de la série numérique* $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$. *De plus, on a* $P = e^S$, *où* P *est la valeur de* $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ *et* S *est la somme de* $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$.

1.6 Exercices

Exercice 1.1 *Etudier la convergence des séries suivantes :*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^k} \sin\frac{1}{\sqrt{2k-1}}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$,

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$.

<u>Réponse</u> :

a) Diverge.
b) Converge absolument.
c) Diverge.
d) Converge.

Exercice 1.2 *Soit* $l^2(\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des suites* (a_k) *telles que la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ *converge. Soient* (a_k) *et* (b_k) *deux suites dans* $l^2(\mathbb{R})$*. Déterminer la nature de la série* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$*.*

Réponse : $\sum a_k b_k$ converge absolument.

Exercice 1.3 *On pose*

$$I_k = \int_1^k \frac{dx}{x\sqrt{x+1}},$$

et on considère la série $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ *de terme général*

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k^\alpha} I_k, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que la suite (I_k) *converge.*

b) Etudier suivant la valeur de α*, la nature de la série* $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ *(convergence absolue, semi-convergence, divergence).*

Réponse :
a) On peut utiliser un raisonnement théorique ou un calcul direct.
b) $\sum a_k$ converge absolument si $\alpha > 1$, semi-convergente si $0 < \alpha \leq 1$ et diverge si $\alpha \leq 0$.

Exercice 1.4 *(*Extrait du concours CCP*). Montrer la convergence et calculer la somme de la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+7}{k^3+7k^2+14k+8}.$$

Réponse : $\frac{65}{36}$.

Exercice 1.5 *Soient* $\sum a_k$ *et* $\sum b_k$ *deux séries à termes strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}.$$

Montrer que si $\sum b_k$ *converge, alors* $\sum a_k$ *converge.*

Exercice 1.6 *(Critère de Kummer). Soient* $\sum a_k$ *une série à termes strictement positifs. Posons*

$$c_k = \frac{a_k}{a_{k+1}}.b_k - b_{k+1},$$

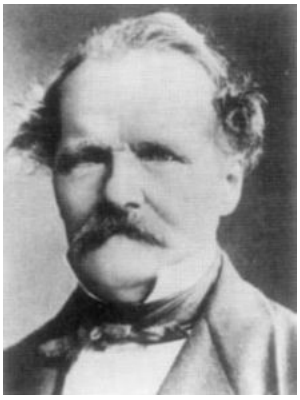
où les b_k *sont des nombres positifs.*

a) Montrer que s'il existe un nombre L *tel que pour presque toutes les valeurs de* k*,*

$$c_k > L > 0,$$

alors la série $\sum a_k$ *converge.*

b) Montrer que si $c_k \leq 0$*, pour tout* $k \geq N > 0$*, alors* $\sum a_k$ *diverge en même temps que* $\sum \frac{1}{b_k}$*.*



Kummer

Exercice 1.7 *Soit* (a_k) *une suite à termes positifs. Montrer que les séries* $\sum a_k$ *et* $\sum \ln(1 + a_k)$ *convergent ou divergent en même temps.*

Exercice 1.8 *Déterminer la nature des séries suivantes :*

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{k}\right)(\ln k)^{20}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \int_1^{\infty} e^{-x^{k^{\alpha}}dx}, \alpha > 0.$

<u>*Réponse*</u> :

a) Converge absolument.

b) Converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Exercice 1.9 *Montrer que la série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *où* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_k \geq \cdots$*, converge si et seulement si la série* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ *converge.*

Exercice 1.10 *Etudier la nature des séries suivantes :*

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{\prod_{j=0}^{k}(1+\alpha)^j}, \quad \alpha \geq 0,$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}(\sin\alpha)^{2k}, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$

<u>*Réponse*</u> :

a) Converge.

b) Converge si $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ et diverge si $\frac{\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Exercice 1.11 *a) Soit $\sum a_k$ une série à termes positifs, convergente et telle que la suite (a_k) soit décroissante. Montrer que :*

$$\lim_{k\to\infty} ka_k = 0.$$

b) La réciproque est-elle exacte ? Justifier la réponse.

c) Application : soit (a_k) une suite à termes strictement positifs vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inégalité :

$$a_k \leq (1 + a_k)a_{k-1}.$$

Montrer que les séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ où $b_k = \dfrac{a_k}{1+ka_k}$, sont de même nature.

<u>*Réponse*</u> :

b) La réciproque est fausse en général, choisir par exemple $a_k = \frac{1}{k\ln k}$.

Exercice 1.12 *Soit $\sum a_k$ une série réelle absolument convergente. On pose*

$$a_k^+ = \max(a_k, 0), \quad a_k^- = \max(-a_k, 0).$$

Déterminer la nature des séries $\sum a_k^+$ et $\sum a_k^-$. Même question si la série $\sum a_k$ est semi-convergente.

<u>*Réponse*</u> : Si $\sum a_k$ convverge absolument, alors les séries $\sum a_k^+$ et $\sum a_k^-$ convergent. Si $\sum a_k$ est semi-convergente, alors les séries $\sum a_k^+$ et $\sum a_k^-$ divergent.

Exercice 1.13 *Calculer les réels α et β afin que la série de terme général a_k défini ci-dessous soit convergente,*

$$a_k = \sqrt[3]{k^3 + k^2 + k + 1} - \sqrt{k^2 + 1} + \alpha + \frac{\beta}{k}.$$

<u>*Réponse*</u> : $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{5}{18}$.

Exercice 1.14 (Extrait du concours CCP). *a) Montrer que la suite*

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n,$$

est décroissante et converge vers un réel strictement positif γ (constante d'Euler).

b) Montrer la convergence de la série $\sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{k}+\ln(1-\frac{1}{k})\right)$.

c) Etablir la relation

$$\gamma=1+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k}+\ln(1-\frac{1}{k})\right).$$

d) En déduire la convergence de la série $\sum_{p\geq 2}\frac{\zeta(p)-1}{p}$ *où $\zeta(p)$ désigne la somme de la série* $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^p}$ *ainsi que l'identité*

$$\gamma=1-\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\zeta(p)-1}{p}.$$

Euler

Exercice 1.15 *Déterminer la nature de série :*

$$\sum\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[k]{k}}.$$

Réponse : Diverge.

Exercice 1.16 *Soient (a_k), (b_k) deux suites de nombres complexes. On pose*

$$s_0 = 0, \quad s_k = a_1 + \cdots + a_k, \quad k \geq 1,$$

et on suppose que :

(i) la suite $\left(\frac{s_k}{\sqrt{k}}\right)$ *est bornée.*

(ii) la série $\sum |b_k - b_{k+1}| \sqrt{k}$ *est convergente.*

(iii) $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k\sqrt{k} = 0.$

1) Montrer que la série $\sum a_k b_k$ *est convergente.*

2) En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k}$ *est convergente. Ici $E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x.*

3) Montrer que les séries $\sum \frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k^\alpha}$ *sont convergentes pour $\alpha > \frac{1}{2}$ et divergentes pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$.*

Exercice 1.17 *Déterminer la nature des séries suivantes :*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, \quad \alpha \geq 0,$

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right).$

<u>*Réponse*</u> :

a) Converge.

b) Diverge.

Exercice 1.18 *1) Soit (b_k) une suite décroissante de nombres positifs convergeant vers zéro. Montrer que la série alternée* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$*, converge et soit S sa somme.*

2) Montrer que : $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$, où S_p est la somme partielle d'ordre p.

3) Donner une majoration du reste de cette série.

Exercice 1.19 *Montrer que le critère de la racine de Cauchy est plus général que celui du quotient de d'Alembert* au sens suivant *: soit (a_k) une suite à termes strictement positifs. Montrer que si* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$ *existe, alors* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$*. Trouver un exemple montrant que la réciproque est fausse en général.*

Exercice 1.20 *Déterminer la nature des séries suivantes :*

a) $\sum \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2k)}{3 \times 5 \times \cdots \times (2k+1)}$,

b) $\sum \frac{(2k)!}{(k!)^2 2^{2k}}$.

Réponse : a) Diverge. b) Diverge.

Exercice 1.21 *Soit* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *une série et* S_k *la suite de ses sommes partielles. Posons*

$$\sigma_1 = S_1, \quad \sigma_2 = \frac{S_1 + S_2}{2}, ..., \sigma_k = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_k}{k}.$$

On dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge au sens de Cesaro et a pour somme* σ *si et seulement si la suite* (σ_k) *converge vers* σ.

a) Montrer que si la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge (au sens usuel) et a pour somme* S, *alors elle converge au sens de Cesaro vers la même somme.*

b) La réciproque est-elle exacte ? Justifier la réponse.

Cesaro

Exercice 1.22 *Déterminer :*

$$\lim_{\alpha \to 1^+} (\alpha - 1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Réponse : 1.

Exercice 1.23 *Soient les deux séries de termes généraux respectifs,*

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \qquad b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}.$$

a) Montrer que : $a_k \underset{+\infty}{\sim} b_k$.
b) Montrer que $\sum a_k$ *converge et que* $\sum b_k$ *diverge.*
c) Qu'en conclure ?

<u>*Réponse*</u> :
c) $\sum a_k$ et $\sum b_k$ ne sont pas de même nature bien que $a_k \underset{+\infty}{\sim} b_k$ car a_k et b_k ne sont pas de signe constant à partir d'un certain rang. La décroissance n'est pas conservée par équivalence.

Exercice 1.24 *Déterminer la nature de la série* $\sum a_k$, *à termes positifs donnée par* $a_0 > 0$ *et*

$$a_k = \frac{1}{ke^{a_{k-1}}}.$$

<u>*Réponse*</u> : Diverge.

Exercice 1.25 *Soit* (a_k) *une suite telle que :* $a_0 = 0$, $\lim_{k\to\infty} a_k = l \in]0, \infty[$. *Comme* $\sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) = a_k$ *alors*

$$\begin{aligned}
0 \neq l &= \lim_{k\to\infty} a_k = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots \\
&= a_1 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \cdots \\
&= a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \cdots \\
&= (a_1 - a_1) + (a_2 - a_2) + \cdots \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - a_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui est absurde. Expliquer pourquoi ce raisonnement est contradictoire.

Exercice 1.26 *Les familles* $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\left(\frac{(-1)^k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *sont-elles sommables ? Que dire des séries associées ?*

<u>*Réponse*</u> : $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, $\left(\frac{(-1)^k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Exercice 1.27 *(*Extrait du concours communs TSI*). 1) Soit (a_k) une suite de réels non nuls telle que le produit infini $\prod_{k\in\mathbb{N}} a_k$ converge. Montrer que la suite (a_k) tend vers 1 et étudier la réciproque.*

2) Soit (a_k) une suite de réels strictement positifs. Montrer que le le produit infini $\prod_{k\in\mathbb{N}} a_k$ converge si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \ln a_k$ converge et que, dans ce cas de convergence, on a : $\prod_{k=0}^{\infty} a_k = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \ln a_k\right)$.

3) La première propriété motive l'écriture $a_k = 1 + u_k$ avec (u_k) à valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, notation qui sera souvent adoptée dans la suite. Soit (u_k) une suite de réels positifs.

(a) Montrer que la suite $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 + \cdots + u_n \leq P_n \leq \exp(u_0 + \cdots + u_n).$$

(b) En déduire que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge si et seulement si le produit infini $\prod_{k\in\mathbb{N}}(1+u_k)$ converge.

(c) Reprendre (b) en utilisant le résultat de la question 2).

4) Etudier les produits infinis ci-après, en précisant la valeur de leur produit en cas de convergence :

$$(a) \prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{(2k+1)(n+2)}\right), \qquad (b) \prod_{k\in\mathbb{N}} \left(1 + x^{2^k}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Indication : pour calculer les produits, en cas de convergence, on pourra : dans (a), écrire P_n comme produit de deux produits "télescopiques"; dans (b), multiplier P_n par $(1-x)$ et utiliser une identité remarquable).

5) On définit la suite (λ_k) par $\lambda_1 = x > 1$ et $\forall k \geq 1$, $\lambda_{k+1} = 2\lambda_k^2 - 1$. Démontrer avec soin la relation

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\lambda_k}\right) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

(Indication : on pourra poser $x = \cosh\theta$ et utiliser des formules de trigonométrie hyperbolique).

Réponse : 1) La réciproque est fausse en général comme le montre l'exemple $a_k = e^{\frac{1}{k+1}}$. 4) (a) Le produit infini en question converge et vaut 2. (b) Pour $|x| \geq 1$, le produit infini en question diverge. Pour $|x| < 1$, le produit infini en question converge et vaut $\frac{1}{1-x}$.

2 Suites et séries de fonctions

2.1 Convergence simple, convergence absolue

Soient Ω un ensemble non vide et (f_k) une suite de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Définition 55 *On dit que la suite (f_k) converge simplement dans Ω vers une fonction*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}(ou\ \mathbb{C})$$

si

$$\forall x \in \Omega, \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

Autrement dit, si

$$\forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x) : k \geq N(\varepsilon, x) \Longrightarrow |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

($N(\varepsilon, x)$ dépend en général de ε et x).

Exemple 56 *La suite de fonctions (f_k) définie par*

$$f_k(x) = x^k, \quad x \in [0, 1]$$

converge simplement vers

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & si\ x = 1 \end{cases}$$

Définition 57 *On dit que la série de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge simplement dans Ω vers une fonction*

$$S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}(ou\ \mathbb{C})$$

si la suite des sommes partielles $(S_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)$ converge simplement vers S. On dit que S est la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

Par analogie avec les séries numériques, le reste de la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ s'écrit

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k = S(x) - S_n(x).$$

Dire que la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge simplement vers S équivaut à dire que la suite (R_n) converge simplement vers 0.

Exemple 58 *La série de fonctions*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin x}{2^k}, \quad x \in [0,1]$$

converge simplement vers $S(x) = 2\sin x$.

Définition 59 *La série $\sum f_k$ converge absolument dans Ω si $\sum |f_k|$ converge simplement dans Ω*

Proposition 60 *Si la série $\sum f_k$ converge absolument, alors elle converge simplement.*

2.2 Convergence uniforme

2.2.1 Définitions et propriétés générales

Définition 61 *On dit que la suite (f_k) converge uniformément dans Ω vers une fonction*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}(ou\ \mathbb{C})$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall k \geq N(\varepsilon), \forall x \in \Omega \Longrightarrow |f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

($N(\varepsilon)$ ne dépend que de ε), c'est-à-dire, si

$$\lim_{k\to\infty} \left(\sup_{x\in\Omega} |f_k(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Autrement dit, s'il existe une suite numérique a_k,

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 : |f_k(x) - f(x)| \leq a_k,$$

pour tout $x \in \Omega$.

Exemple 62 *La suite de fonctions (f_k) définie par*

$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}, \quad k \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}$$

converge simplement vers $f(x) = 0$.

Remarque 63 *Pour montrer qu'une suite de fonctions* (f_k) *ne converge pas uniformément vers* f*, il suffit de trouver une suite numérique* b_k *telle que :*

$$\lim_{k\to\infty}(f_k(b_k)-f(b_k))\neq 0.$$

Exemple 64 *La suite de fonctions* (f_k) *définie par*

$$f_k(x)=\frac{1}{1+kx^2},\quad k\in\mathbb{N}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ *vers*

$$f(x)=\begin{cases}0 & si\ x\neq 0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$$

On montre que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$*, de* (f_k) *vers* f*.*

Théorème 65 *La convergence uniforme entraine la convergence simple. La réciproque est fausse en général.*

Définition 66 *On dit que la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ *converge uniformément dans* Ω *vers une fonction*

$$S:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}(ou\ \mathbb{C})$$

si la suite des sommes partielles $(S_n)=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f_k\right)$ *converge uniformément dans* Ω *vers* S*. Il revient au même de dire que la suite*

$$(R_n)=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k\right),$$

converge uniformément vers 0*.*

Théorème 67 *(Critère de Cauchy pour la convergence uniforme). a) La suite de fonctions* (f_k) *converge uniformément dans* Ω *si et seulement si*

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)>0:\forall n\geq N(\varepsilon),\forall m\geq N(\varepsilon),\forall x\in\Omega\Longrightarrow|f_n(x)-f_m(x)|\leq\varepsilon$$

b) La série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ *converge uniformément dans* Ω *si et seulement si*

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)>0:\forall n>m\geq N(\varepsilon),\forall x\in\Omega\Longrightarrow\left|\sum_{k=m+1}^{n}f_k\right|\leq\varepsilon$$

Théorème 68 *Si la série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ *converge uniformément dans* Ω*, alors*

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=0,$$

uniformément dans Ω*. La réciproque est fausse en général.*

2.2.2 Continuité, intégration et dérivation

Théorème 69 *(continuité). Soient $f_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, des fonctions continues.*

a) Si la suite (f_k) converge uniformément dans Ω vers f, alors f est continue sur Ω.

b) Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniformément dans Ω vers S, alors S est continue sur Ω.

Remarque 70 *Soient $f_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, des fonctions continues.*

a) Si la suite (f_k) converge simplement dans Ω vers f et si f est discontinue, alors la convergence n'est pas uniforme.

b) Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge simplement dans Ω vers S et si S est discontinue, alors la convergence n'est pas uniforme.

Exemple 71 *La suite de fonctions (f_k) définie par*

$$f_k(x) = \frac{k(x^2+1)x}{(kx+1)e^x}, \quad x \in [0,1]$$

converge simplement vers

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{e^x} & si\ x \in]0,1] \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On montre que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$, par contre, il y'a convergence uniforme sur $[a,1]$, $a > 0$.

Remarque 72 *Soit $a \in \Omega$ un point d'accumulation (c-à-d. tout voisinage de a contient au moins un point de Ω autre que a). Le théorème précédent signifie que*

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right) = \lim_{k\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_k(x)\right),$$

$$\lim_{x\to a}\sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to a} f_k(x).$$

Théorème 73 *(Dini). Soit (f_k) une suite de fonctions réelles continues convergeant vers une fonction continue f sur $[a,b]$. Si la suite (f_k) est monotone, alors elle converge uniformément vers la fonction f.*

Dini

Théorème 74 *(dérivation). Soit* (f_k) *une suite de fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

a) Si la suite (f_k) *converge simplement en* $x_0 \in [a,b]$ *et si la suite des dérivées* (f_k') *converge uniformément sur* $[a,b]$*, alors la suite* (f_k) *converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$*,* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et on a*

$$\left(\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right)' = \lim_{k\to\infty} f_k'(x).$$

b) Si la série $\sum f_k$ *converge simplement en* $x_0 \in [a,b]$ *et si la série des dérivées* $\sum f_k'$ *converge uniformément sur* $[a,b]$*, alors la série* $\sum f_k$ *converge uniformément vers* S *sur* $[a,b]$*,* S *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *et on a*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x).$$

Théorème 75 *(intégration). Soit* (f_k) *une suite de fonctions intégrables de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

a) Si la suite (f_k) *converge uniformément vers* f *dans* $[a,b]$*, alors* f *est intégrable sur* $[a,b]$ *et on a*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^u f_k(x)dx = \int_a^u \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = \int_a^u f(x)dx, \quad u \in [a,b]$$

(la convergence de la suite ainsi obtenue est uniforme sur $[a,b]$*).*

b) Si la série $\sum f_k$ *converge uniformément vers* S *dans* $[a,b]$*, alors* S *est intégrable sur* $[a,b]$ *et on a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^u f_k(x)dx = \int_a^u \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) dx = \int_a^u S(x)dx, \quad u \in [a,b]$$

(la convergence de la série ainsi obtenue est uniforme sur $[a,b]$*).*

2.3 Convergence normale et critère de Weierstrass

Théorème 76 *(Critère de Weierstrass). Si*

$$|f_k(x)| \leq a_k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \Omega,$$

et si la série numérique $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge, alors la série de fonctions* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *converge absolument et uniformément sur* Ω.

Weierstrass

Définition 77 *On dit que la série de fonctions* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *converge normalement dans* Ω *si on peut lui appliquer le critère de Weierstrass. Autrement dit, si* $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$ *converge où* $\|f_k\| = \sup_{x\in\Omega} |f_k(x)| < +\infty$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 78 *Pour une série de fonctions, on les implications suivantes :*

$$\begin{tikzcd} & CN \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[dr] & \\ CU \arrow[dr] & & CA \arrow[dl] \\ & CS & \end{tikzcd}$$

En l'absence d'hypothèses supplèmentaires, toutes les réciproques sont fausses en général.

Exemple 79 *La série de fonctions*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{(2k^2-1)(3k^2-2)},$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exemple 80 *La fonction f définie par*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \cos(3^k x), \quad x \in \mathbb{R}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais elle n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

2.4 Critère d'Abel-Dirichlet de convergence uniforme

Théorème 81 *(Critère d'Abel-Dirichlet). Soient (f_k) et (g_k) deux suites de fonctions vérifiant les conditions suivantes :*

(i) la suite (g_k) est positive, décroissante et converge uniformément vers 0.

(ii) il existe une constante C telle que :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq C, \quad \forall x \in [a, b]$$

Alors la série de fonction $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) g_k(x)$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Corollaire 82 *Si (g_k) est une suite positive, décroissante et converge uniformément vers 0 alors la série alternée $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} g_k(x)$ converge uniformément sur Ω.*

Exemple 83 *La série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2\sqrt{k} + \cos x},$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

2.5 Exercices

Exercice 2.1 *On considère la suite d'applications*

$$f_k : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{k \ln\left(1 - \frac{1}{kx}\right)} & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > \frac{1}{k} \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{k} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

a) Vérifier que f_k est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.

c) Construire le graphe de la fonction f_k. Points remarquables. Branches infinies. Montrer que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_k - f|$ existe et le calculer. Ce maximum est-il atteint ?. Que peut-on dire de la convergence uniforme de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Réponse :
b) $f(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.2 *Soit la suite de fonctions (f_k) définie sur $[0,1]$ par*

$$f_k(x) = \frac{k(x^2+1)x}{(kx+1)e^x}.$$

a) Montrer que la suite (f_k) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
b) La suite (f_k) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
c) Même question sur $[a,1]$, $a>0$?

Réponse
a) (f_k) converge simplement vers

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{e^x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Non.
c) Oui.

Exercice 2.3 *On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$f_k(x) = \begin{cases} x^{2k}\ln x & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction $S(x)$ que l'on précisera.
b) La convergence de cette série est-elle uniforme sur $[0,1]$?
c) Montrer que la convergence de cette série est normale sur $[0,\alpha]$ pour tout $\alpha \in]0,1[$.

Exercice 2.4 *Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions définie sur $[-1,1]$ par*

$$f_k(x) = \sin(kxe^{-kx^2}).$$

Réponse : (f_k) converge simplement vers 0 mais ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 2.5 *(*Extrait d'un examen, Fac. Sc. El Jadida*). a) Soit (f_k) une suite de fonctions satisfaisant à*

$$|f_k(x) - f_{k-1}| \leq a_k \in \mathbb{R}, \quad k \geq 2.$$

On suppose que la série numérique $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ *converge. Montrer que la suite de fonctions (f_k) converge uniformément.*

b) Montrer que la limite uniforme de fonctions bornées est uniforme. Que peut-on dire si la limite est simple ? (justifier la réponse).

Exercice 2.6 *On considère la série de fonctions*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que cette série est convergente pour tout réel. Montrer que la somme de la série n'est pas continue à l'origine.

b) Montrer que la série ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$, mais qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, -a]$ avec $a > 0$.

Exercice 2.7 *(*Extrait de l'oral, concours X, école polytechnique*). Déterminer la nature et calculer la somme de la série*

$$\sum \frac{1}{\cosh kx.\cosh(k+1)x}.$$

Réponse : La série en question converge simplement pour $x \in \mathbb{R}^*$ vers

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sinh x} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{1}{\sinh x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 2.8 *Soit la série réelle*

$$\sum_{k\geq 0} \frac{e^{-kx}}{1+k^2}.$$

a) Quel est le domaine de convergence $\mathcal{D}$ de cette série ?

b) Montrer que la somme de cette série est continue sur $\mathcal{D}$. Cette somme sera notée f.

c) Trouver le domaine de convergence de la série dérivée dont la somme sera notée g. Déterminer la plus grande partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle $f'(x) = g(x)$.

Réponse :

a) $\mathcal{D} = [0, +\infty[$.

c) $f'(x) = g(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2.9 (Extrait d'un examen, Fac. Sc. El Jadida). *On considère la série de fonctions* $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} f_k(x)$ *où*

$$f_k(x) = \frac{x}{k^\alpha(1+x^2k^\beta)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*.$$

1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres α *et* β *pour que cette série converge simplement sur* $\mathbb{R}$.

2) On désigne par $S(x)$ *la somme de cette série. Montrer que si* $\alpha + \frac{\beta}{2} > 1$, *alors* S *est continue sur* $\mathbb{R}$.

3) On suppose que la série converge simplement et que $\alpha + \frac{\beta}{2} \leq 1$.

a) Montrer que S *est continue sur* $\mathbb{R}^*$.

b) On pose

$$g_k(x) = \frac{x}{k^\alpha + x^2k^{2-\alpha}}.$$

Vérifier que $|f_k(x)| \geq |g_k(x)|$ *sur* $\mathbb{R}$. *Montrer que*

$$\sum_{p=k+1}^{2k} g_p(k^{\alpha-1}) \geq \frac{1}{2^\alpha + 2^{2-\alpha}},$$

et en déduire que S *n'est pas continue en* 0.

Réponse :
1) $\alpha + \beta > 1$.

Exercice 2.10 (Extrait du concours X, école polytechnique). *Soit la suite de fonctions* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dafinie par :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \frac{2^kx}{1+k2^kx^2}.$$

1) Etudier la convergence simple de la suite (f_k).

2) Calculer $\int_0^1 f_k$ *et* $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k$. *La convergence est-elle uniforme ?*

Réponse :
1) (f_k) converge simplement vers 0 (sur $\mathbb{R}$).
2) On obtient,

$$\int_0^1 f_k = \frac{\ln(1+k2^k)}{2k}, \qquad \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k = \frac{\ln 2}{2}.$$

La convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2.11 *Soit $\mathcal{D}$ le domaine défini par $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$.*

a) Montrer que la série complexe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{(1+z^2)^k},$$

converge absolument mais non uniformément sur $\mathcal{D}$.

b) Montrer que si on multiplie le terme général de cette série par $(-1)^k$, il y a alors convergence uniforme sur $\mathcal{D}$.

Exercice 2.12 *(*Extrait d'un examen, Fac. Sc. El Jadida*). On considère la fonction définie par :*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k^4 x^2}.$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

c) Etudier la dérivabilité en $x = 0$.

d) Représenter graphiquement f.

Exercice 2.13 *(*Extrait de l'oral, concours X, école polytechnique*). Etudier la suite de fonctions*

$$f_k : x \longmapsto \frac{kx^2 e^{-kx}}{(1-e^{-x})^2}.$$

Réponse :

1) (f_k) converge simplement vers 0 (sur $]0, +\infty[$).

2) La convergence n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$. La convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$, $a > 0$.

Exercice 2.14 *On pose*

$$f_k(z) = \frac{z^{2^k}}{z^{2^{k+1}} - 1}, \quad k \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ est absolument convergente pour $|z| < 1$ et pour $|z| > 1$.

b) Montrer que pour tout nombre réel $r > 1$, la série $\sum f_k(z)$ est uniformément convergente pour $|z| \geq r$ et pour $|z| \leq \frac{1}{r}$.

c) Calculer

$$S_n(z) = \frac{1}{1-z} + \sum_{k=0}^{n} \frac{z^{2^k}}{z^{2^{k+1}} - 1},$$

par récurrence sur n.

d) En déduire la somme $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$, *pour* $|z| < 1$ *et pour* $|z| > 1$.

Exercice 2.15 *a) Montrer que la série de terme général*

$$f_k(x) = \sin\left(a^k x\right), \quad 0 < a < 1,$$

est simplement et uniformément convergente sur tout intervalle $I = [-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) On pose

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(a^k x).$$

(i) Montrer que S est continue sur I.

(i) Montrer que S est indéfiniment dérivable sur I.

c) Trouver une relation entre $S(x)$ et $S(ax)$.

d) Montrer que $S(x)$ est développable en série entière et trouver les coefficients b_k de la série

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Exercice 2.16 *(*Extrait du concours CCP*). Soit (a_k) une suite réelle de carré sommable (c'est-à-dire telle que $\sum a_k^2$ converge) telle que $a_0 \neq 0$.*

1) Montrer que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+x},$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Réponse :

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ si $a_0 > 0$ et $-\infty$ si $a_0 < 0$.

Exercice 2.17 *On considère la fonction f définie par*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sin(2^{4k}\pi x).$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.18 (Extrait du concours Centrale). *Montrer les égalités suivantes en justifiant l'existence des intégrales et des séries écrites :*

$$a) \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}dx = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3}, \qquad b) \int_0^\infty \frac{\sin bx}{e^{ax}-1}dx = 2\sum_{k=1}^\infty \frac{b}{b^2+k^2a^2}, \quad (a>0).$$

Exercice 2.19 (Extrait du concours communs, MP). *On considère la fonction ζ, somme de la série de fonctions*

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^s}.$$

1) *Montrer que la fonction ζ a pour domaine de définition $I =]1, +\infty[$.*

2) *Montrer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^s}$ vers ζ sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 1$.*

3) *Cette série de fonctions converge-t-elle uniformément sur I ?*

4) *Montrer que ζ est continue sur I.*

5) *Déterminer avec soin ses limites aux bornes de I.*

6) *Par comparaison avec une intégrale montrer l'équivalent*

$$\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1},$$

au voisinage de 1.

7) *Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et donner une expression de sa dérivée.*

8) *Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et donner une expression de ses dérivées successives.*

9) *Montrer l'équivalent*

$$\zeta(s) - 1 \sim 2^{-s},$$

au voisinage de $+\infty$ et en déduire la convergence de la série

$$\sum_{k\geq 2} (\zeta(s) - 1).$$

10) *En introduisant une suite double sommable bien choisie, calculer la somme de la série précédente.*

<u>*Réponse*</u> :

3) Non.

5) $\lim_{s\to+\infty} = 1$, $\lim_{s\to 1} = +\infty$.

7) $\zeta'(s) = \sum_{k=1}^\infty -\frac{\ln k}{k^s}$, $\forall s \in I$.

8) $\zeta^{(p)}(s) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^p \frac{\ln^p k}{k^s}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall s \in I$.

10) On introduit la suite double sommable $(\frac{1}{k^n})_{k,n\geq 2}$ et on obtient la somme $\sum_{k\geq 2}(\zeta(s) - 1) = 1$.

3 Séries entières

3.1 Généralités

Une série entière réelle est une série de fonctions de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k,$$

où (a_k) est une suite de nombres réelles, x_0 est un nombre réel fixé et $x \in \mathbb{R}$.

On définit de la même manière une série entière complexe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k,$$

où (a_k) est une suite de nombres complexes, $z, z_0 \in \mathbb{C}$.

Un lemme d'Abel affirme que si la suite $(|a_k|r^k)$ est bornée, alors la série $\sum a_k z^k$ converge absolument pour tout z tel que : $|z| < r$. Le nombre r est la borne supérieure de ensembles

$$\{r \in \mathbb{R}_+ : \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \text{ converge}\}, \quad \{r \in \mathbb{R}_+ : \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \text{ borné}\}.$$

Ce nombre s'appelle rayon de convergence.

On dispose de plusieurs méthodes pour déterminer la nature d'une série entière en tant qu'une série de fonctions. Une fois le domaine de convergence est déterminé, on en déduira aisément le rayon r de convergence. Le rayon de convergence d'une série entière peut donc être obtenu de plusieurs manières mais il serait intéressant d'avoir des formules directes qui permettent de le calculer. On disposes de certaines recettes pour calculer ou estimer le rayon de convergence. Les résultats qui suivent sont des conséquences assez immédiates des critèes de la racine de Cauchy (qui nous fournira la formule très connue de Cauchy-Hadamard) et du quotient de d'Alembert. On utilisera aussi le fait qu'une série enttière, sa série dérivée ainsi que sa série primitive ont même rayon de convergence.

Proposition 84 *Soit $\sum a_k(z-z_0)^k$ une série entière. Alors il existe un nombre $r \geq 0$ fini ou non tel que :*

a) si $|z-z_0| < r$, la série $\sum a_k(z-z_0)^k$ converge absolument.

b) si $|z-z_0| > r$, la série $\sum a_k(z-z_0)^k$ diverge.

De plus, on a

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}, \quad \textit{(formule de Cauchy-Hadamard)}$$

Hadamard

Exemple 85 *Le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} z^k,$$

est égal à 1.

Remarque 86 *Si* $r = \infty$*, alors* $\sum a_k(z-z_0)^k$ *converge absolument pour tout* $z \in \mathbb{C}$*. Si* $r = 0$*, alors* $\sum a_k(z-z_0)^k$ *converge absolument pour tout* $z = z_0$ *et diverge pour tout* $z \neq z_0$*. Pour* $|z - z_0| = r$*, on ne peut rien affirmer à priori (voir section suivante pour l'étude du comportement sur le bord du disque de convergence).*

Définition 87 *On appelle disque de convergence de centre* z_0 *et de rayon* r *(voir proposition précédente) de la série* $\sum a_k(z-z_0)^k$*, l'ensemble*

$$\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Le nombre r *s'appelle rayon de convergence de la série. Le bord du disque de convergence est le cercle*

$$\partial\mathcal{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Dans le cas d'une série entière réelle $\sum a_k(x-x_0)^k$*, au lieu de disque de convergence, on dit intervalle de convergence :* $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Proposition 88 *Soit* $\sum a_k(z-z_0)^k$ *une série entière telle que* $a_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}^*$*. Si la limite*

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|,$$

existe, alors elle est égale au rayon de convergence r*.*

Exemple 89 *Le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)z^{2k-1},$$

est égal à 1.

Définition 90 *On appelle série entière dérivée de* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$*, la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^{k-1}.$$

Proposition 91 *Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.*

Exemple 92 *Le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1},$$

est égal à 1.

Proposition 93 *Soient* $\sum a_k z^k$ *et* $\sum b_k z^k$ *deux séries entières ayant respectivement* r_1 *et* r_2 *pour rayon de convergence. Soient* r *le rayon de convergence de la série somme* $\sum(a_k+b_k)z^k$ *et* r' *celui de la série produit* $\sum c_k z^k$ *où*

$$c_k=\sum_{i=0} k a_i b_{k-i}.$$

a) Si $r_1 \neq r_2$*, alors* $r=\inf(r_1,r_2)$ *et si* $r_1=r_2$*, alors* $r \geq r_1$*. En outre, on a*

$$\sum(a_k+b_k)z^k=\sum a_k z^k+\sum b_k z^k,$$

pour $|z|<\inf(r_1,r_2)$*.*

b) On a $r' \geq \inf(r_1,r_2)$ *et*

$$\sum c_k z^k=\left(\sum a_k z^k\right)\left(\sum b_k z^k\right),$$

pour $|z|<\inf(r_1,r_2)$*.*

3.2 Comportement sur le bord du disque de convergence

Proposition 94 *Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence r. Si*

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| r^k \neq 0,$$

alors $\sum a_k z^k$ diverge en tout point du bord du disque de convergence.

Proposition 95 *Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence r. Si cette série converge absolument en un point du bord du disque de convergence, alors elle converge absolument en tout point du bord du disque de convergence.*

Proposition 96 *Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence r. Supposons que :*

$$a_k \in \mathbb{R}, \quad a_k > a_{k+1}, \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Si $r = 1$, alors la série $\sum a_k z^k$ converge en tout point du bord du disque de convergence sauf peut-être au point $z = 1$.

Exemple 97 *La série entière*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2},$$

a un rayon de convergence égal à 1 et elle converge absolument sur le domaine

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

Exemple 98 *Le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} z^k,$$

est égal à 2 et cette série converge absolument sur le domaine

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}.$$

Exemple 99 *Soit $x \in \mathbb{R}$. La série entière réelle*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

a un rayon de convergence égal à 1 et elle converge sur l'intervalle

$$\mathcal{D} = [-1, 1[.$$

Exemple 100 *Soit $z \in \mathbb{R}$. La série entière complexe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k},$$

a un rayon de convergence égal à 1 *et elle converge absolument sur le domaine*

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

et converge en tout point du bord

$$\partial\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

sauf au point $z = 1$.

3.3 Convergence normale et uniforme

Théorème 101 *Une série entière $\sum a_k(z - z_0)^k$ de rayon de convergence r, converge normalement dans le disque fermé*

$$\overline{\mathcal{D}}(z_0, \varrho) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varrho\},$$

où ϱ est tel que : $0 < \varrho < r$.

Cas particulier important : Une série entière converge normalement dans tout compact contenu dans le disque (ou intervalle) ouvert de convergence.

Théorème 102 *(Abel). Soit $\sum a_k x^k$, une série entière de rayon de convergence r. Si cette série converge pour $x = r$ (resp. $x = -r$), alors elle converge uniformément sur $[0, r]$ (resp. $[-r, 0]$) et on a*

$$\lim_{x \to r^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k,$$

(resp. $\lim_{x \to -r^+} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-r)^k$*).*

3.4 Continuité, dérivation et intégration d'une série entière

Théorème 103 *(Continuité). La somme d'une série entière*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

est une fonction continue dans le disque de convergence $\mathcal{D}(z_0, r)$.

Théorème 104 *(Intégration). Soit* $\sum a_k x^k$*, une série entière de rayon de convergence* $r \neq 0$*. On peut intégrer terme à terme cette série dans* $]-r, r[$,

$$\int_0^{x_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^{x_0} a_k x^k dx \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x_0^{k+1}}{k+1}, \quad x_0 \in]-r, r[$$

Théorème 105 *(Dérivation). La somme d'une série entière*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ *sur son intervalle de convergence et on a*

$$f^{(p)}(x) = \sum_{k=p}^{\infty} k(k-1)...(k-p+1) a_k (x - x_0)^{k-p}.$$

3.5 Développement d'une fonction en série entière. Calcul de la somme d'une série entère

En posant $x = x_0$ dans le théorème précédent, on obtient

$$f^{(p)}(x_0) = p! a_p,$$

d'où

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Cette dernière expression s'appelle développement en série entière de f autour de x_0. Ce développement est unique. On dit aussi développement en série de Taylor si $x_0 \neq 0$ et de Mac-Laurin si $x_0 = 0$.

Taylor

Mac-Laurin

Une condition nécessaire pour qu'une fonction

$$f : I =]x_0 - r, x_0 + r[\longrightarrow \mathbb{R},$$

soit développable en série entière est

$$f \in \mathcal{C}^\infty \text{ dans } I, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

La réciproque n'est pas vraie en général ; une fonction f possédant des dérivées de tout ordre en x_0, n'est pas nécessairement égale à la série entière

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

correspondante. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Définition 106 *Une fonction égale à sa série entière au voisinage de x_0 est dite analytique en x_0.*

Théorème 107 *(Condition nécessaire et suffisante). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $I =]x_0 - r, x_0 + r[$. Pour que l'on ait*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,$$

dans I, il faut et il suffit que

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

où $R_n(x)$ est le reste dans la formule de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x).$$

Théorème 108 *(Condition suffisante). Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $I =]x_0 - r, x_0 + r[$ et s'il existe une $M > 0$ tels que :*

$$\forall x \in I, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(k)}(x)\right| \leq M,$$

alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad \forall x \in I$$

Exemples de développement de fonctions en série entière :

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad r = \infty$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad r = \infty$$

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad r = \infty$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad r = \infty$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad r = \infty$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \quad r = 1, x \in]-1, 1[$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad r = 1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k, \quad r = 1, x \in]-1, 1[, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$$

Pour déterminer la somme d'une série entière, plusieurs méthodes sont possibles. On peut par exemple utiliser le théorème de dérivation ainsi que celui d'intégration. On peut aussi utiliser une équation différentielle ou encore décomposer le terme général de la série en élments simples et calculer la somme des séries correspondantes, etc.

Exemple 109 *Le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k,$$

est égal à 1*, elle converge sur l'intervalle* $]-1,1[$ *et sa somme est*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Exemple 110 *Le rayon de convergence de la série entière*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{k^2+3k-1}{k+3}\right)\frac{x^k}{k!},$$

est égal à l'infini et elle converge sur $\mathbb{R}$*. On a* $f(0) = -\frac{1}{3}$ *et pour* $x \neq 0$*, on a*

$$f(x) = xe^x - \frac{1}{x^3}\left(e^x(x^2-2x+2)-2\right).$$

Exemple 111 *Le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{k!}x^k, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

est égal à l'infini, elle converge donc sur $\mathbb{R}$ *et sa somme est égale à*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{k!}x^k = e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta).$$

3.6 Résolution des équations différentielles à l'aide des séries entières

Problème 1 : Considérons l'équation différentielle

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0,$$

où P_1 et P_2 sont des fonctions analytiques sur $]x_0-r, x_0+r[$. On montre que dans ce cas toute solution de l'équation ci-dessus est analytique sur ce même intervalle.

Exemple 112 *On considère l'équation différentielle*

$$xy'' + (1-x)y' - y = 0,$$

où y est une fonction de la variable réelle x. Supposons qu'il existe une série entière, de rayon de convergence $r > 0$,

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

qui soit solution de cette équation et telle que : $y(0) = 1$. On montre que

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}, \quad r = +\infty,$$

et

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Exemple 113 *Etudier l'équation de Legendre :*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$$

où n est un nombre réel.

Legendre

<u>Problème 2</u> : Considérons l'équation différentielle

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0])P_1(x)y' + P_2(x)y = 0,$$

où P_1 et P_2 sont des fonctions analytiques sur $]x_0 - r, x_0 + r[$. On cherche à satisfaire l'équation ci-dessus par une relation dy type

$$y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

et il s'agira de déterminer α ainsi que les coefficients a_k.

Exemple 114 *Etudier l'équation de Bessel :*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Bessel

3.7 Exercices

Exercice 3.1 *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cosh k}{\sinh^2 k} x^{2k}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k! z^{k!}$.

Réponse :

a) $\sqrt{e}$.

b) 1.

Exercice 3.2 *a) Soit r le rayon de convergence de la série entière $\sum a_k z^k$. Quel est celui de la série $\sum a_k k^p z^k$? où p désigne un entier naturel.*

b) Soit $P(z)$ un polynôme distinct du polynôme nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum P(k) z^k$.

Réponse :

a) r.

b) 1.

Exercice 3.3 *(*Extrait du concours Centrale*). Même question pour la série entière $\sum a_k x^k$ où (a_k) est une suite de réels définie par $a_0 > 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}$: $a_{k+1} = \ln(1 + a_k)$.*

Réponse : 1.

Exercice 3.4 *Etudier la convergence des trois séries de fonctions suivantes :*
a) $2 - 3z + z^2 + 2z^3 - 3z^4 + z^5 + 2z^6 - 3z^7 + z^8 + \cdots$
b) $(2 - 3z + z^2) + (2z^3 - 3z^4 + z^5) + (2z^6 - 3z^7 + z^8) + \cdots$
c) $2 + (-3z + z^2 + 2z^3) + (-3z^4 + z^5 + 2z^6) + \cdots$

<u>*Réponse*</u> :
a) La série en question converge si $|z| < 1$.
b) La série proposée converge si $|z| < 1$, $z = 1$ et $z = 2$.
c) La série en question converge si $|z| < 1$, $z = 1$ et $z = -\frac{3}{2}$.

Exercice 3.5 *(*Extrait d'un examen, Fac. Sc. El Jadida*). On considère la série entière*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

a) Déterminer le rayon de convergence r de la série (3.1). Trouver les valeurs de x pour lesquelles la série (3.1) converge et la série dérivée ne converge pas.

b) Soit $x_0 \in]-r, r[$. Montrer que la série dérivée converge uniformément sur $[0, x_0]$. Calculer la somme de la série (3.1) pour $x \in]-r, r[$.

c) Montrer que la série (3.1) converge uniformément sur $[0, 1]$ et déterminer sa somme pour $x = 1$.

<u>*Réponse*</u> :
a) $r = 1$, les valeurs cherchées sont $x = \pm 1$.
b) $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} x^{2k-1} = \arctan x$.
c) $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 3.6 *Soit* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, *la somme d'une série entière supposée convergente sur le disque ouvert* $\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. *De plus, on suppose que les conditions suivantes sont satisfaites*

$$a_1 \neq 0, \quad \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k| \leq |a_1|.$$

Montrer que f est injective sur $\mathcal{D}_1$ et que la série considérée converge sur le disque fermé $\mathcal{D}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Exercice 3.7 *Déterminer somme des séries entières réelles suivantes :*
a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+3)k!}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2+3k-1}{(k+3)k!}x^k.$

*c) (*Extrait d'un examen, Fac. Sc. El Jadida*) :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos k\theta}{k!}x^k, \quad \theta\in\mathbb{R}.$

Réponse :

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+3)k!}=\frac{e^x(x^2-2x+2)-2}{x^3}$ si $x\neq 0$ et vaut $\frac{1}{3}$ si $x=0$.

b) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2+3k-1}{(k+3)k!}x^k=xe^x-\frac{e^x(x^2-2x+2)-2}{x^3}$ si $x\neq 0$ et vaut $-\frac{1}{3}$ si $x=0$.

c) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos k\theta}{k!}x^k=e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$.

Exercice 3.8 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x\neq 0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$$

Montrer que la fonction f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 3.9 *(*Extrait d'un examen, Fac. Sc. El Jadida*). On considère la série entière*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(3k)!}x^{3k}.$$

a) Quel est le rayon de convergence de cette série ? Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire du troisième ordre à coefficients constants et sans second membre.

b) Montrer que l'on peut déterminer trois constantes C_1, C_2, C_3 de sorte que l'on ait dans l'intervalle de convergence :

$$f(x)=C_1e^{w_1x}+C_2e^{w_2x}+C_3e^{w_3x},$$

où w_1, w_2 et w_3 sont les trois racines cubiques de -1. En déduire l'expression de $f(x)$.

c) En déduire la somme de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(3k)!}.$$

Réponse :

a) $r=+\infty$, $f'''(x)+f(x)=0$.

b) $C_1=C_2=C_3=\frac{1}{3}$, $f(x)=\frac{1}{3}(e^{-x}+2e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)$.

c) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(3k)!}=\frac{1}{3}(e^{-1}+2e^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Exercice 3.10 *Développer en séries entières au voisinage de* 0*, les fonctions suivantes :*

a) $x \longmapsto \ln(x^3 - x^2 - x + 1)$.

b) $x \longmapsto (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.

<u>*Réponse*</u> :

a) $\ln(x^3 - x^2 - x + 1) = \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{(-1)^{k-1}-2}{k}\right) x^k$, $x \in]-1,1[$.

b) $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^\infty \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$, $x \in]-1,1[$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.

Exercice 3.11 *On considère l'équation différentielle*

$$xy'' + (n-x)y' - y = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

où y *est une fonction de la variable réelle* x*. Supposons qu'il existe une série entière, de rayon de convergence* $r > 0$*,* $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$*, qui soit solution de cette équation et telle que :* $f_n(0) = 1$*.*

a) Déterminer les coefficients de cette série. Quel est son rayon de convergence ?

b) Donner la valeur de $f_1(x)$*,* $f_2(x)$ *et établir une relation simple entre* $f_n(x)$ *et* $f_{n+1}(x)$*.*

c) En déduire la valeur de $f_n(x)$ *pour tout* $n \in N^*$*.*

<u>*Réponse*</u> :

a) $a_k = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k-1)}$, $r = +\infty$.

b) $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, $f_{n+1}(x) = \frac{n}{x}(f_n(x) - 1)$.

c) $f_n(x) = \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} - \cdots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\right)$, $\forall n \in N^*$.

Exercice 3.12 *Soit* $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$*, une série entière de rayon de convergence* r*.*

a) Montrer que si $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty a_k r^k$ *converge, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty a_k x^k$ *converge uniformément sur* $[0,r]$ *et*

$$\lim_{x \to r^-} f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k r^k.$$

Réciproque ? Justifier votre réponse.

b) On pose $r = 1$ *et* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k$*. On suppose que* $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = L$ *existe et que* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} k a_k = 0$*. Montrer que :*

(i) $|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=0}^{n} ka_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\,|x|^k, \ \forall x \in \left]-1,1\right[$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ *où* $\lambda_n = \sup\{|ka_k| : k \rangle\ n+1\}$.

(iii) $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\,|x|^k \leq \frac{\lambda_n}{n(1-|x|)}, \ \forall x \in \left]-1,1\right[$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} ka_k = 0$.

c) En utilisant ce qui précéde, calculer

$$\lim_{n\to\infty}\left|S_n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|.$$

En déduire que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge et que sa somme est L.*

d) On suppose que $a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|f(x)| \leq C$, $0 \leq x < 1$. *Montrer que* $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ *existe et est égale à* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Exercice 3.13 *On considère la fonction définie par*

$$f(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}},$$

a) Montrer que pour $x \in]0,1[$, f *vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients variables et avec second membre.*

b) On suppose qu'il existe une série entière $\sum a_k x^k$ *solution de cette équation différentielle. Déterminer* a_k *ainsi que le rayon de convergence de cette série.*

c) En déduire le développement en série entière dans $]0,1[$ *de* $f(x)$.

Réponse :

a) $2x(1-x)f'(x) + (1-2x)f(x) = 1$.

b) $a_k = \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!}$, $k \in \mathbb{N}$, $r = 1$.

c) Le développement en série entière de $f(x)$ dans $]0,1[$, n'est autre que la solution de l'équation différentielle ci-dessus et il est égal à $\sum \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!} x^k$.

Exercice 3.14 *Soit* $f :]-r,r[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *telle que pour tout* $x \in]-r,r[$ *et tout* $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x) \geq 0$. *Montrer que pour tout* $x \in]-r,r[$, *on a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k.$$

4 Séries de Fourier

4.1 Séries trigonométriques

Définition 115 *On appelle série trigonométrique, une série de la forme*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\quad x\in\mathbb{R} \tag{4.1}$$

où les a_k et b_k sont des nombres réels ou complexes.

Remarque 116 *En fait une série trigonométrique s'écrit sous la forme*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\quad x\in\mathbb{R}$$

Mais comme $\sin 0=0$, on peut sans restreindre la généralité, poser $b_0=0$. En outre, nous avons désigné par $\frac{a_0}{2}$ le terme d'indice 0. Ceci provient du fait que a_0 est choisi de façon à se calculer par la même formule (voir plus loin) que les autres a_k.

Proposition 117 *Si les séries numériques $\sum a_k$ et $\sum b_k$ convergent absolument, alors la série trigonométrique (4.1) converge normalement dans $\mathbb{R}$. En outre, sa somme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 118 *Les séries $\sum\frac{\cos kx}{k^2}$ et $\sum\frac{\sin kx}{k^2}$, convergent normalement sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 119 *Si (a_k) et (b_k) sont des suites réelles positives, décroissantes et tendant vers zéro, alors la série trigonométrique (4.1) converge simplement pour tout $x\neq 2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$ et uniformément sur tout intervalle de la forme $[\alpha,2\pi-\alpha]$ pour tout $l\in\mathbb{Z}$ et $\alpha\in]0,\pi[$. En outre, sa somme est une fonction continue sur $]2l\pi,2(l+1)\pi[$, $l\in\mathbb{Z}$.*

Exemple 120 *Les séries $\sum\frac{\cos kx}{k}$, $\sum\frac{\sin kx}{k}$ convergent pour tout $x\neq 2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$ et leur sommes sont des fonctions continues en tout point $x\neq 2l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$.*

Propriété 121 *Si la série trigonométrique (4.1) converge vers $f(x)$ sur $[-\pi,\pi]$, alors $f(x)$ est 2π-périodique, c-à-d., $f(x+2\pi)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.*

Propriété 122 *Soit f une fonction définie, intégrable sur $[-\pi,\pi]$ et développable en série trigonométrique*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Si cette série est intégrable terme à terme, ce développement est unique (ceci est vérifié par exemple lorsque la série converge uniformément sur $[-\pi,\pi]$).

Série trigonométrique associée à une série entière : Soit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

une série entière de rayon de convergence $r > 0$. Posons

$$z = \rho e^{ix} = \rho(\cos x + i \sin x), \quad 0 < \rho < r, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On a $z^k = \rho^k(\cos kx + i \sin kx)$ et par conséquent

$$f(\rho e^{ix}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k (\cos kx + i \sin kx).$$

Cette série converge normalement sur $\mathbb{R}$ en vertu du critère de Weierstrass puisque $|a_k \rho^k (\cos kx + i \sin kx)| \leq |a_k| \rho^k$ et $\sum |a_k| \rho^k$ converge car d'après le critère de la racine de Cauchy, on a

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\rho^k} = \rho \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{\rho}{r} < 1.$$

Si la fonction f est à valeurs réelles, a_k et b_k sont nécessairement réels. On a

$$\mathrm{Re}\ f(\rho e^{ikx}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \cos kx, \qquad \mathrm{Im}\ f(\rho e^{ikx}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \sin kx.$$

4.2 Séries de Fourier, Théorème de Dirichlet

Définition 123 *Soit f une fonction définie et intégrable sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Les nombres a_k et b_k définis par*

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k \geq 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \geq 1, \end{aligned} \tag{4.2}$$

s'appellent coefficients de Fourier de f et la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4.3}$$

est dite série de Fourier de f.

Fourier

Remarque 124 *On écrit*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

pour dire que la série (4.2) est la série de Fourier associée à la fonction f. Le fait que les intégrales (4.1) existent, n'impliquent pas que la série (4.2) converge et, même si elle converge, sa somme n'est pas nécessairement égale à $f(x)$.

Remarque 125 *Au lieu de considérer l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on peut considérer tout autre intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[0, 2\pi]$.*

Propriété 126 *Pour une fonction f, $2L$-périodique, définie et intégrable sur un intervalle $[-L, L]$ d'amplitude quelconque finie, la série de Fourier associée à la fonction f est donnée par*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right),$$

où

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx, \quad k \geq 1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Remarque 127 *Soit f une fonction $2L$-périodique, définie et intégrable sur un intervalle $[-L, L]$. Au lieu de développer $f(x)$ en série de Fourier sur $[-L, L]$, on peut la développer, moyannant le changement de variable $t = \frac{\pi x}{L}$, sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.*

Propriété 128 *Pour une fonction f, $2L$-périodique, définie et intégrable sur un intervalle $[\alpha, \alpha + 2L]$ où α est une constante arbitraire, on a*

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)dx.$$

D'après la propriété précédente, on peut donc remplacer l'intervalle $[-L, L]$ par $[\alpha, \alpha+2L]$ et les coefficients de Fourier deviennent :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx, \quad k\geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{L}\int_{\alpha}^{\alpha+2L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx, \quad k\geq 1 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Propriété 129 *Si f est paire, alors*

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kxdx, \qquad b_k=0,$$

et

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx. \quad (\textit{série cosinus}).$$

Si f est impaire, alors

$$a_k=0, \qquad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kxdx,$$

et

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kx. \quad (\textit{série sinus}).$$

Remarque 130 *Soit f une fonction $2L$-périodique, définie sur l'intervalle $[0, L]$. On peut lui faire correspondre soit une fonction paire, soit une fonction impaire, définie sur $[-L, L]$. On procède comme suit : On prolonge $f(x)$ sur $[-L, 0]$ de telle façon qu'on ait pour $x\in[-L, 0]$, $f(x)=f(-x)$ ou $f(x)=-f(-x)$. Dans le premier cas, la fonction f sera paire sur $[-L, L]$, d'où $a_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos kxdx$ et $b_k=0$. Dans le second cas, f sera impaire sur $[-L, L]$, d'où $a_k=0$ et $b_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin kxdx$.*

Exemple 131 *Considérons sur $[-\pi, \pi]$, la fonction $f(x)=x$. Cette fonction étant impaire, on a*

$$a_k=0, \quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kxdx=2\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Par conséquent, la série de Fourier associée à f est

$$f(x)\sim 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx, \quad x\in[-\pi, \pi].$$

Exemple 132 *Considérons sur* $[-\pi, \pi]$*, la fonction* $f(x) = x^2$*. Cette fonction étant paire, on a*

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

et

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos kx dx = 4\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

D'où,

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Proposition 133 *En notation complexe, la série de Fourier d'une fonction* 2π*-périodique* f *s'écrit sous la forme*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

où

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Remarque 134 *On déduit de ce qui précède que si* f *est* $2L$*-périodique, sa série de Fourier s'écrit en notation complexe sous la forme*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{L}x},$$

où

$$c_k = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{k\pi}{L}x}dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 135 *Soit* f *la fonction* 2π*-périodique, définie dans l'intervalle* $]-\pi, \pi[$ *par* $f(x) = e^x$*,* $-\pi < x < \pi$*. La valeur de* f *pour* $x = \pi$ *est quelconque. On a*

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} = \frac{\sinh \pi}{\pi},$$

et

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-ikx}dx = \frac{\sinh \pi}{\pi}.\frac{(-1)^k}{1 - ik}.$$

Or $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, *d'où*

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 = 2\frac{\sinh \pi}{\pi}, \\ a_k &= c_k + c_{-k} = 2\frac{\sinh \pi}{\pi} . \frac{(-1)^k}{1+k^2}, \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) = -2\frac{\sinh \pi}{\pi} . \frac{(-1)^k k}{1+k^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} + 2\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kx - k \sin kx).$$

Plusieurs questions se posent : La série de Fourier associée à une fonction f est-elle convergente ? En cas de convergence, peut-on dire que que la somme de cette série coïncide avec f et de quelle type est-la convergence ? Tout d'abord, on déduit de ce qui précède que si la série de Fourier associée à une fonction continue converge uniformément, alors elle converge vers cette fonction. Après un rappel sur les fonctions réglées et une nouvelle notion de dérivée à droite et à gauche adaptée à l'étude des séries de Fourier, on aborde le théorème de Dirichlet donnant des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit représentable par une série de Fourier. D'autres questions et réponses seront évoquées plus loin.

Proposition 136 *Si la série de Fourier associée à une fonction continue f converge uniformément, alors elle converge vers f.*

Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C})$ et $x \in [a, b]$. Nous noterons $f(x+0)$ et $f(x-0)$ les limites à droite et à gauche de f en x, i.e.,

$$f(x+0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x+h), \qquad f(x-0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} f(x-h).$$

Aux extrémités a et b, la limite n'est définie que d'un côté.

On dit que la fonction f possède une discontinuité de première espèce au point $x \in [a, b]$ si f n'est pas continue en x et si les limites $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent et sont distinctes.

Définition 137 *Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$, est dite réglée si elle admet une limite à droite en tout point de $[a, b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.*

Les points de discontinuité des fonctions réglées sont toujours de première espèce. On montre aisément que toute fonction réglée est bornée et intégrable au sens de Riemann.

Exemples importants de fonctions réglées :

1) Toute fonction continue est réglée.

2) Toute fonction continue par morceaux est réglée. Une fonction f est dite continue par morceaux sur un intervalle $[a, b]$, si ce dernier admet une subdivision par un nombre fini de points : $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = b$, telle que dans chaque intervalle $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, $0 \leq i \leq k-1$, f soit continue et possède une limite finie aux extrémités droite et gauche. (Certains auteurs appellent de telles fonctions, des fonctions réglées continues par morceaux).

3) Toute fonction en escalier est réglée. Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$, est dite en escalier s'il existe une subdivision de $[a, b]$: $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = b$, telle que f soit constante dans chacun des intervalles ouverts $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, $0 \leq i \leq k-1$. Signalons qu'une fonction f est réglée si et seulement si f est limite d'une suite uniformément convergente de fonctions en escalier.

4) Toute fonction numérique monotone est réglée.

5) Toute fonction à variation bornée est réglée. Une fonction f est dite à variation bornée sur $[a, b]$, s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour toute subdivision de $[a, b]$: $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = b$, on ait

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)| \leq C.$$

On montre que toute fonction f, différence de deux fonctions bornées et non décroissante, est à variation bornée. Signalons aussi que toute fonction monotone est à variation bornée. Toute fonction admettant une dérivée à droite et à gauche en chaque point est à variation bornée. Mais une fonction continue n'est pas toujours à variation bornée.

Définition 138 *On appelle dérivée à droite de f au point x, la limite (si elle existe) suivante :*

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h}.$$

De même, on appelle dérivée à gauche de f au point x, la limite (si elle existe) suivante :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x-0) - f(x-h)}{h}.$$

Le résultat suivant (appelé lemme ou théorème de Riemann-Lebesgue), obtenu par Riemann a été généralisé par la suite par Lebesgue.

Lebesgue

Lemme 139 *Si f est une fonction bornée et intégrable sur $[a,b]$, alors*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0, \qquad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0.$$

Théorème 140 *(Dirichlet). Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, réglée et dérivable à droite et à gauche sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f converge simplement en tout point x vers*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \qquad (\textit{régularisée de } f).$$

En particulier, si f est continue au point x, sa série de Fourier converge vers la fonction $f(x)$.

Remarque 141 *Le théorème que l'on vient de prouver se généralise évidemment aux séries de Fourier de fonctions $2L$-périodique, définie et intégrable sur un intervalle $[-L,L]$ d'amplitude quelconque finie.*

Remarque 142 *Soulignons que la convergence de la série de Fourier au point x, ne dépend que du comportement de $f(x)$ au voisinage de x. Par conséquent, si on modifie la valeur de f en un seul point, sa série de Fourier n'est pas modifiée, puisque les coefficients sont définis par des intégrales.*

Remarque 143 *Si la fonction f est définie seulement sur $[-\pi,\pi]$, on peut la prolonger par périodicité en une fonction sur $\mathbb{R}$, sauf aux points $\pm\pi$ (et généralement aux points $\pi+2k\pi$) lorsque $f(\pi)\neq f(-\pi)$. Le théorème de*

Dirichlet s'applique à la fonction ainsi prolongée. Dès lors, si f satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge vers

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

en tout point intérieur au segment où les dérivées à droite et à gauche existent. Cependant, aux extrémités $x=\pm\pi$ (et généralement aux points $\pi+2k\pi$), la série converge vers

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2},$$

pourvu que f possède une dérivée à droite en $x=-\pi$ et une dérivée à gauche en $x=\pi$, car $f(-\pi-0)=f(\pi-0)$ et $f(\pi+0)=f(-\pi+0)$ (et généralement, $f(\pi+2k\pi-0)=f(\pi-0)$, $f(\pi+2k\pi+0)=f(-\pi+0)$).

Exemple 144 *Soit f la fonction 2π-périodique, définie dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ par $f(x)=|x|$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable à droite et à gauche sur $\mathbb{R}$. Comme elle est paire, on a donc $b_k=0$, $\forall k\geq 1$ et*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx=\pi,\\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kxdx=\begin{cases} 0 & si\ k=2p \\ -\frac{4}{\pi(2p+1)^2} & si\ k=2p+1 \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient ainsi la série :

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos(2p+1)x}{(2p+1)^2},\quad -\pi\leq x\leq\pi.$$

D'après le théorème de Dirichlet, cette série converge et sa somme est égale à $f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. En particulier, pour $x=0$,

$$f(0)=0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2},$$

donc

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Notons enfin que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

d'où la somme d'Euler

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 145 *Reprenons l'exemple de la fonction f, 2π-périodique, définie sur l'intervalle $]-\pi,\pi]$ par $f(x)=e^x$, $-\pi<x<\pi$. La valeur de f en $x=\pi$ est quelconque. Nous avons montré précédemment que*

$$f(x)\sim\frac{\sinh\pi}{\pi}+2\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx-k\sin kx).$$

La fonction f est réglée et dérivable à droite et à gauche sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, en tout point où f est continue, i.e., $\forall x\neq(2l+1)\pi$, $l\in\mathbb{Z}$, on a

$$e^x=\frac{\sinh\pi}{\pi}+2\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx-k\sin kx).$$

Au point de discontinuité $x=\pi$, on a

$$\frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{2}=\cosh\pi.$$

Donc

$$\cosh\pi=\frac{\sinh\pi}{\pi}+2\frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}.$$

Le théorème de Dirichlet que l'on vient de voir, montre que pour une fonction 2π-périodique, si ses discontinuités (si elles existent) sont de première espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini et si en outre, cette fonction admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche alors sa série de Fourier converge et on a :

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\begin{cases}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x\\ f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x\end{cases}$$

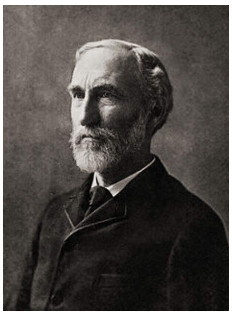
De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue. Par ailleurs, ce théorème permet de calculer la somme de certaines séries numériques. Il existe dans la littérature, de nombreuses formes du théorème de Dirichlet, en modifiant les hypothèses et le résultat que l'on obtient, dépend de ces hypothèses. Rappelons qu'une fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle $[a,b]$, si ce dernier admet une subdivision par un nombre fini de points : $a=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_k=b$, telle que dans chaque intervalle $]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$, $0\leq i\leq k-1$, f soit la restriction d'une fonction de $\mathcal{C}^1([\alpha_i,\alpha_{i+1}])$. Une fonction 2π-périodique est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si elle l'est sur $[0,2\pi]$. On démontre que si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, alors sa série de Fourier converge vers f normalement sur $\mathbb{R}$. On peut considérer le théorème de convergence uniforme de Dirichlet comme étant une version globale de celui de convergence simple. Pour une fonction périodique et continûment dérivable au voisinage de tout point d'un intervalle, la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur cet intervalle. Evidemment si la fonction f possède des points de discontinuité, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la raison qui empèche une fonction à ne pas admettre un développement en série de Fourier, n'a rien à voir avec la discontinuité de cette fonction. En effet, on peut construire une fonction continue mais dont la série de Fourier diverge.

Théorème 146 *Soit f une fonction 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement (et par suite absolument et uniformément) vers f sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 147 *Une question se pose : que se passe-t-il exactement au voisinage d'un point de discontinuité de la fonction f ? Lorsqu'on limite le développement de Fourier de $f(x)$ à un certain nombre n fixé (même très grand) de termes, on obtient une valeur approchée de $f(x)$. La courbe approchée obtenue dans ce cas, présente des oscillations de part et d'autre de la courbe d'équation $y = f(x)$ et plus précisément, c'est au voisinage du point de discontinuité que la courbe approchée s'écarte le plus de la courbe exacte. D'après le théorème de Dirichlet, lorsqu'on augmente le nombre de termes, la série de Fourier approxime de mieux en mieux la fonction en dehors de ses points de discontinuités, mais on constate qu'elle va au-delà de la valeur de la discontinuité. Nous avons démontré que la série de Fourier de $f(x)$ converge simplement en tout point x vers $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, mais cela ne signifie pas que le graphe de la somme partielle*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

converge vers celui de $f(x)$ lorsque $n \to \infty$. La position du maximum ou minimum tend vers le point de discontinuité, mais la valeur à ce maximum ou minimum ne tend pas vers la valeur de $f(x \pm 0)$. Ce phénomène, s'appelle "phénomène de Gibbs. Il se traduit par des oscillations du graphe de la somme partielle S_n autour des points de discontinuité. Cette singularité provient du non convergence uniforme de la série de Fourier au voisinage du point de discontinuité. Par ailleurs et contrairement à ce que l'intuition pourrait suggérer, une augmentation de n ne réduira pas l'amplitude de l'oscillation. Au contraire, l'écart reste supérieur à une valeur seuil, aussi grand soit l'entier n. Par ailleurs, on remarque que l'oscillation s'effectuera sur des intervalles de plus en plus petits.



Gibbs

4.3 Théorèmes de Cesaro, Fejér, Jordan et Weierstrass

Nous avons vu précédemment certaines conditions suffisantes de convergence pour une série de Fourier. Ils en existent d'autres. Une question se pose : est-ce que la série de Fourier associée à une fonction continue converge toujours ? La réponse est non. En effet, Fejér a montré que la série de Fourier d'une fonction continue pouvait diverger. Il a par contre démontré qu'elle converge vers f au sens de Cesaro.

Définition 148 *Soit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ une série et (S_n) la suite de ses sommes partielles. Posons*

$$\sigma_1 = S_1, \quad \sigma_2 = \frac{S_1 + S_2}{2}, ..., \sigma_n = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n}.$$

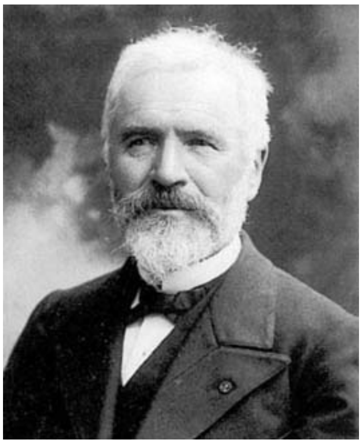
Rappelons que la série $\sum a_k$ converge au sens de Cesaro (ou en moyenne) et a pour somme σ si et seulement si la suite (σ_n) converge vers σ.

On montre que si la série $\sum a_k$ converge au sens usuel et a pour somme S, alors elle converge au sens de Cesaro vers la même somme. Inversement, une série peut converger au sens de Cesaro et diverger au sens usuel. Par exemple la série $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ diverge au sens usuel mais converge au sens de Cesaro vers $\frac{1}{2}$.

Théorème 149 *(Fejér). Soit f une fonction 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Alors, la série de Fourier de f converge au sens de Cesaro vers $f(x)$, uniformément sur $\mathbb{R}$.*

Fejér

Théorème 150 *(Jordan). Si f est périodique et à variation bornée sur un intervalle d'une période, sa série de Fourier converge pour tous les x vers $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. De plus, la convergence vers $f(x)$ est uniforme sur tout intervalle où f est continue.*



Jordan

Comme application du théorème de Fejér, on a le résultat suivant :

Théorème 151 *(d'approximation de Weierstrass) . Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.*

4.4 Egalité de Parseval et inégalité de Bessel

Soit f une fonction 2π-périodique et supposons pour le moment que sa série de Fourier converge uniformément vers $f(x)$;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Multiplions les deux membres de l'égalité ci-dessus par $f(x)$ et intégrons terme à terme sur $[-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx\right), \\ &= \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a l'égalité suivante, dite égalité de Parseval :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Parseval

Cette égalité est satisfaite pour une fonction 2π-périodique réglée ou plus généralement de carré intégrable (i.e., $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$) sur une période. Physiquement, l'égalité de Parseval signifie que l'énergie totale d'un phénomène périodique est égale à la somme des énergies associées aux différents harmoniques.

Définition 152 *Soit f une fonction 2π-périodique. On dit que le polynôme trigonométrique*

$$T_n(x) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

approche $f(x)$ en moyenne quadratique si les coefficients α_k et β_k sont tels que :

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2 dx,$$

soit minimum.

Proposition 153 *Parmi tous les polynômes trigonométriques d'ordre n, c'est le polynôme dont les coefficients α_k, β_k sont les coefficients de Fourier de la fonction f, c-à-d.,*

$$\alpha_k = a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad \beta_k = b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,$$

qui réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de cette fonction. Autrement dit, pour tout n, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - S_n(x))^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2 dx.$$

Corollaire 154 *On a l'inégalité de Bessel*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Définition 155 *Si $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n(x))^2dx = 0$, on dit alors que la série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

converge en moyenne quadratique vers $f(x)$.

Proposition 156 *Soit f une fonction 2π-périodique et réglée. Alors*

a) Il existe une suite de fonctions continues convergeant vers f en moyenne quadratique.

b) La série de Fourier de f converge en moyenne quadratique vers f.

Corollaire 157 *Soit $f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction réglée. On a l'égalité de Parseval*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

4.5 Exercices

Exercice 4.1 *Déterminer les séries de Fourier associées aux fonctions 2π-périodiques suivantes :*

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in [-\pi, 0] \\ x & si\ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi}{2} & si\ x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

b)

$$g(x) = e^x \ si\ x \in [-\pi,\pi].$$

<u>*Réponse*</u> : a) $f(x) \sim \frac{3\pi}{16} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\cos\frac{k\pi}{2} - 1\right)}{k^2\pi} \cos kx + \left(\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2\pi} - \frac{(-1)^k}{2k} \right) \sin kx \right)$. b) $g(x) \sim \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kx - k \sin kx) \right)$.

Exercice 4.2 *Soit f la fonction définie par*

$$f(x) = \sup\{\sin x, 0\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que cette fonction est développable en série de Fourier.
b) Déterminer cette série ainsi que le domaine de convergence uniforme.
c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}$.

<u>*Réponse*</u> : b) $f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos 2lx}{1-4l^2}$. Le domaine de convergence uniforme de cette série est $\mathbb{R}$. c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4.3 *Montrer que l'on peut utiliser les résultats obtenus dans l'exercice précédent pour prouver et obtenir le développement en série de Fourier de la fonction g définie par*

$$g(x) = \sup\{\cos x, 0\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>*Réponse*</u> : Il suffit de noter que $g(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$ où f est la fonction définie dans l'exercice précédent et d'utiliser les résultats obtenus dans cet exercice.

Exercice 4.4 *Soit f la fonction de période 2π qui vaut $\left(\pi^2 - x^2\right)^2$ quand $x \in [-\pi, \pi]$. Trouver le développement en série de Fourier de f. Peut-on calculer la série de Fourier de f' en dérivant terme à terme celle de f ?*

<u>*Réponse*</u> : $f(x) = \frac{8\pi^4}{15} - 48 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^4} \cos kx$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et on montre que : $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{48(-1)^k}{k^3} \sin kx$.

Exercice 4.5 *Soit la fonction périodique de période 2π définie par*

$$f(x) = \left|\sin^3 x\right|, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

a) Calculer pour $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

b) Soit

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

Montrer que S est définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $S(x)$ admet une dérivée troisième en tout point $x \neq l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que $f(x) = S(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.6 *(*Extrait du concours X, école polytechnique*). Déterminer la fonction paire, π-périodique f telle que ses coefficients de Fourier trigonométriques soient données par :*

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx dx = \begin{cases} (k+1)\alpha^k & si\ k \geq 1 \\ 1 & si\ k = 0 \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < 1$ et $b_k(f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Réponse : $f(x) = \frac{1+2\alpha\cos x+\alpha^2\cos 2x}{((1-\alpha\cos x)^2+\alpha^2\sin^2 x)^2}$.

Exercice 4.7 *Soit f la fonction périodique de période 2π définie $[0, 2\pi]$ par*

$$x \longmapsto f(x) = ch(x - \pi).$$

1) Déterminer la série de Fourier associée à la fonction f.
2) Montrer que la série obtenue converge uniformément vers f.
3) En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}.$$

4) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-|x+2l\pi|}$ *converge uniformément sur $[0, 2\pi]$. On désigne sa somme par $S(x)$.*

5) Exprimer au moyen d'intégrales prises dans l'intervalle $[2l\pi, 2l\pi + 2\pi]$, les coefficients de Fourier de la fonction périodique de période 2π égale entre 0 et 2π à $e^{-|x+2l\pi|}$.

6) En déduire que le développement de Fourier de $S(x)$ peut s'écrire

$$\frac{\varphi(0)}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k)\cos kx,$$

où

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\cos xt dt.$$

7) En calculant explicitement $\varphi(x)$ et $S(x)$, retrouver les résultats des questions 1) et 2).

Réponse :
1) $f(x) \sim \frac{\sinh\pi}{\pi} + \frac{2\sinh\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{1+k^2}$.
3) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\coth\pi$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2\sinh\pi}$.
5) $\frac{1}{\pi}\int_{2l\pi}^{2l\pi+2\pi} e^{-|y|}\cos ky dy$ et $\frac{1}{\pi}\int_{2l\pi}^{2l\pi+2\pi} e^{-|y|}\sin ky dy$.

Exercice 4.8 *Développer en série de Fourier les fonctions suivantes :*

$$x \longmapsto e^{\cos x}\cos(\sin x), \qquad x \longmapsto e^{\cos x}\sin(\sin x).$$

<u>*Réponse*</u> : $e^{\cos x}\cos(\sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k!}$ et $e^{\cos x}\sin(\sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{k!}$.

Exercice 4.9 *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et considérons la fonction définie par*

$$f(x) = \cos \alpha x, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

a) Montrer que f est développable en série de Fourier et déterminer cette série.

b) Etudier la convergence de la série obtenue dans a).

c) En déduire les relations :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2}, \\
\pi \cot \alpha\pi &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2}, \\
\frac{\pi^2}{\sin^2 \alpha\pi} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - k)^2}.
\end{aligned}$$

<u>*Réponse*</u> : a) $\cos \alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 - k^2} \cos kx\right)$. b) La série en question converge normalement (donc absolument et uniformément) sur $\mathbb{R}$.

Références

[1] Genet, J. et Pupion, G : Analyse moderne, tome 1, Vuibert, Paris, 1974.

[2] Genet, J. et Pupion, G : Analyse moderne, tome 2, Vuibert, Paris, 1974.

[3] Lesfari, A. : Eléments d'Analyse Mathématique. Cours et exercices. Sochepress Université, Casablanca, 1991, épuisé.

[4] Lesfari, A. : Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace (Cours et exercices), éditions Ellipses, Paris, 2012.

[5] Lesfari, A. : Notions fondamentales d'analyse mathématique (Résumés de cours, exercices et problèmes corrigés), éditions Ellipses, Paris, 2014.

[6] Lesfari, A. : *Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles (Cours et exercices corrigés)*, éditions Ellipses, Paris, 2015.

[7] Lesfari, A. : *Fonctions spéciales de la physique mathématique (Cours et exercices résolus)*, éditions Ellipses, Paris, 28 Novembre 2017.