Université Chouaib Doukkali *Année Universitaire 2018-2019*
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida

MODULE : ANALYSE 4, SMA3 (*Durée de l'épreuve* : $1^h30'$)

EXERCICE 1 : a) Montrer que la série numérique $\sum a_k b_k$ converge si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$.

(ii) la série $\sum |b_{k+1} - b_k|$ converge.

(iii) $\exists C : \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leq C, \; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que la série $\sum a_k b_k$ converge si on suppose que (b_k) décroît vers 0 pour $k \to \infty$ et que la condition (iii) est satisfaite.

c) On considère la série numérique suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\cos k\alpha + i \sin k\alpha) b_k.$$

Déterminer des conditions suffisantes sur α et la suite (b_k) pour que cette série converge. Justifier la réponse.

Solution : a) Posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ et utilisons une transformation d'Abel,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \\
&= S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + \cdots + (S_n - S_{n-1}) b_n, \\
&= S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \cdots + S_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + S_n b_n, \\
&= S_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_{k+1} - b_k).
\end{aligned}$$

Comme, la suite (S_n) est bornée et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} S_n b_n = 0.$$

D'autre part, on a

$$|S_k(b_{k+1} - b_k)| \leq C|b_{k+1} - b_k|,$$

en vertu de (iii). Comme la série $\sum |b_{k+1} - b_k|$ converge, alors d'après le critère de comparaison, la série $\sum S_k(b_{k+1} - b_k)$ converge aussi. Par conséquent, la série $\sum a_k b_k$ converge.

b) Il suffit évidemment de montrer que la condition (ii) dans a) est satisfaite. Comme (b_k) décroît vers 0 pour $k \to \infty$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} |b_{k+1} - b_k| = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1},$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |b_{k+1} - b_k| = b_1,$$

et par conséquent, la série $\sum |b_{k+1} - b_k|$ converge.

c) La série complexe $\sum b_k(\cos k\alpha + i \sin k\alpha)$, converge si on suppose que (b_k) décroît vers 0 pour $k \to \infty$ et que $\alpha \neq 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. En effet, il suffit de montrer que la condition (iii) (question a)) est satisfaite. Posons

$$z = \cos\alpha + i \sin\alpha,$$

d'où $|z| = 1$ et on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (\cos k\alpha + i \sin k\alpha)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right|,$$

donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n} (\cos k\alpha + i \sin k\alpha)\right| \leq \frac{2}{|1 - z|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right|},$$

où $\alpha \neq 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.

<u>Exercice 2</u> : Développer en série de Fourier (en justifiant clairement la réponse) la fonction :

$$x \longmapsto e^{\cos x} \cos(\sin x).$$

<u>Solution</u> : - On a

$$\begin{aligned} e^{\cos x} \cos(\sin x) + i e^{\cos x} \sin(\sin x) &= e^{\cos x} e^{i \sin x}, \\ &= e^{e^{ix}}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^k}{k!}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\cos kx}{k!} + i \frac{\sin kx}{k!} \right). \end{aligned}$$

- D'après le critère de Weierstrass, les séries $\sum \frac{\cos kx}{k!}$ et $\sum \frac{\sin kx}{k!}$ convergent normalement (et donc absolument et uniformément) sur $\mathbb{R}$. En effet, On a

$$\left|\frac{\cos kx}{k!}\right| \leq \frac{1}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et comme la série numérique $\sum \frac{1}{k!}$ converge (utiliser par exemple le critère du quotient de d'Alembert : $\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1$) alors la série $\sum \frac{\cos kx}{k!}$ converge normalement en vertu du critère de Weierstrass. Et il en de même pour la série $\sum \frac{\sin kx}{k!}$. Dès lors,

$$e^{\cos x}\cos(\sin x) + ie^{\cos x}\sin(\sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} i\frac{\sin kx}{k!},$$

et on en déduit que le développement

$$e^{\cos x}\cos(\sin x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k!},$$

représente la série de Fourier cherchée.

<u>EXERCICE 3</u> : Déterminer le domaine de convergence simple de la suite de fonctions réelles définie par

$$f_k(x) = \frac{1}{1+kx^2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Y a-t-il convergence uniforme sur ce domaine ? Justifier la réponse.

<u>Solution</u> : - La suite de fonctions (f_k) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$, de (f_k) vers f car pour

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

on a

$$|f_k(b_k) - f(b_k)| = \frac{1}{2}.$$

Rappel du cours : pour montrer qu'une suite de fonctions (f_k) ne converge pas uniformément vers f, plusieurs méthodes existent. Ici, il suffit par exemple de trouver une suite numérique (b_k) telle que :

$$\lim_{k\to\infty} (f_k(b_k) - f(b_k)) \neq 0.$$

EXERCICE 4 : a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière complexe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{2k}}{3^k k^2},$$

et examiner son comportement sur le bord du disque de convergence.

b) Déterminer les valeurs de z pour lesquelles cette série converge et la série dérivée ne converge pas.

Solution : a) - La série en question s'écrit sous la forme $\sum a_k u^k$ où

$$a_k = \frac{1}{3^k k^2}, \qquad u = (z-1)^2.$$

On a

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}} = \frac{1}{3}.$$

Le rayon de convergence de la série $\sum a_k u^k$ est égal à 3. La série $\sum a_k u^k$ converge absolument si $|u| < 3$ et diverge si $|u| > 3$. Or

$$|u| < 3 \iff |z-1| < \sqrt{3},$$
$$|u| > 3 \iff |z-1| > \sqrt{3},$$

donc le rayon de convergence de la série proposée est égal à $\sqrt{3}$.

- Pour $|z-1| = \sqrt{3}$, la série en question s'écrit $\sum \frac{1}{k^2}$ et donc converge absolument sur le bord du disque de convergence.

b) La série dérivée s'écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(z-1)^{2k-1}}{3^k k} &= \frac{2}{3}(z-1)\left(1 + \frac{(z-1)^2}{3.2} + \frac{(z-1)^4}{3^2.3} + \frac{(z-1)^6}{3^3.4} + \cdots\right) \\
&= \frac{2}{3}(z-1)\left(1 + \frac{v}{2} + \frac{v^2}{3} + \frac{v^3}{4} + \cdots\right), \text{ où } v = \frac{(z-1)^2}{3} \\
&= \frac{2}{3}(z-1)\sum_{l=0}^{\infty} \frac{v^l}{l+1}.
\end{aligned}$$

La série dérivée et la série $\sum \frac{v^l}{l+1}$ convergent ou divergent simultanément. Le rayon de convergence de cette dernière est égal à 1 et elle converge absolument pour $|v| < 1$ et diverge pour $|v| > 1$. La suite $(\frac{1}{l+1})$ décroît vers 0 et d'après un théoème du cours, la série $\sum \frac{v^l}{l+1}$ converge sur le bord du disque de convergence sauf peut-être au point $v = 1$. Or en ce point cette série diverge, donc la série $\sum \frac{v^l}{l+1}$ converge sur le bord du disque de convergence sauf au point $v = \frac{(z-1)^2}{3} = 1$, c-à-d., $z = 1 \pm \sqrt{3}$. Par conséquent, les valeurs de z pour lesquelles la série proposée converge et la série dérivée ne converge pas sont $z = 1 \pm \sqrt{3}$.