ANALYSE 6

(*Calcul intégral et formes différentielles*)

SMA4, 2014-2017, 2018-2020

A. Lesfari

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr
Site Web : http://lesfari.com

Le programme porte sur les notions suivantes : intégrales dépendants d'un paramètre, théorème de convergence dominée, intégrale dépendant d'un paramètre (continuité et dérivabilité), intégrales multiples, intégrale d'une fonction sur un pavé, théorème de Fubini et applications, intégrales doubles et triples et changement de variables, applications aux calculs des surfaces et des volumes, formes différentielles de degré 1, 2 *dans* $\mathbb{R}^2$ *et* $\mathbb{R}^3$*, formes exactes et fermées, théorème de Poincaré, intégrales curvilignes, longueur d'un arc, intégrale sur un chemin, formule de Green-Riemann, fonction holomorphe, formule de Cauchy, théorème de résidus, calcul d'intégrale par la méthode des résidus. Si le temps le permet, d'autres notions complémentaires seront données.*

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Ce chapitre concerne l'étude des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre.

1.1 Intégrales définies

Soit $f : I \times [u, v] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction intégrable par rapport à $t \in [u, v]$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et u, v sont des fonctions de x ou des constantes. Soit $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$F(x) = \int_u^v f(x,t)dt.$$

Proposition 1 *Si f est continue sur $I \times [u, v]$ et si u, v sont continues sur $[\alpha, \beta]$, alors la fonction F est continue sur I.*

Proposition 2 *(Formule de Leibniz). Si u, v sont dérivables sur I et si f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $I \times [u, v]$, alors la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a*

$$F'(x) = f(x,v)v'(x) - f(x,u)u'(x) + \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Proposition 3 *(Formule de Fubini). Si f est continue sur $I \times [u, v]$, $I = [\alpha, \beta]$, alors*

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_u^v f(x,t)dt \right) dx = \int_u^v \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \right) dt.$$

(voir chapitre 2).

1.2 Intégrales généralisées

Soit $(x,t) \longmapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I \times [a,b[$, b fini ou infini. On considère le cas $b = +\infty$, c'est-à-dire, les intégrales généralisées de la forme

$$\int_a^{+\infty} f(x,t)dt,$$

dépendant d'un paramètre $x \in I$.

Les résultas suivants sont valables aussi pour les autres intégrales généralisées de la forme

$$\int_a^b f(x,t)dt,$$

dépendant d'un paramètre $x \in I$.

Définition 4 *On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ converge pour $x \in I$ si et seulement si la limite*

$$\lim_{u \to +\infty} \int_a^u f(x,t)dt,$$

existe. Autrement dit,

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists A(\varepsilon, x) : \forall u \geq A(\varepsilon, x) \Longrightarrow \left| \int_a^u f(x,t)dt - F(x) \right| \leq \varepsilon$$

($A(\varepsilon, x)$ dépend en général de ε et x).

Définition 5 *On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ converge absolument sur I si et seulement si $\int_a^{+\infty} |f(x,t)|dt$ converge sur I.*

Les questions que l'on rencontre lors de l'étude des suites et séries de fonctions concernant la continuité, la dérivabilité et l'intégration, se posent aussi aux intégrales généralisées dépendant d'un paramètre. En l'absence d'hypothèses supplémentaires, les trois propositions précédentes ne sont plus valables pour le cas de ces intégrales. Par exemple, la fonction définie par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt}dt, \quad x \in [0,1], t \geq 0$$

n'est pas continue sur $[0,1]$ car

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et pourtant la fonction $f(x,t) = xe^{-xt}$ est continue pour $x \in [0,1]$.

Nous allons introduire la notion de convergence uniforme.

Définition 6 *On dit que l'intégrale généralisée* $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge uniformément sur* I *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A(\varepsilon) : \forall u \geq A(\varepsilon), \forall x \in I \Longrightarrow \left| \int_a^u f(x,t)dt - F(x) \right| \leq \varepsilon$$

($A(\varepsilon)$ *ne dépend pas de* x*).*

Notons que

$$\left| \int_a^u f(x,t)dt - F(x) \right| = \left| \int_u^{+\infty} f(x,t)dt \right|.$$

Théorème 7 *(Critère de Cauchy). L'intégrale généralisée* $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge uniformément sur* I *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A(\varepsilon) : \forall u > v \geq A(\varepsilon), \forall x \in I \Longrightarrow \left| \int_v^u f(x,t)dt \right| \leq \varepsilon$$

Théorème 8 *Si* f *est continue sur* $I \times [a, +\infty[$ *et si l'intégrale généralisée* $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge uniformément sur* I *vers* $F(x)$*, alors* F *est continue sur* I*.*

Théorème 9 *Supposons que* f *et* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *sont continues sur* $I \times [a, +\infty[$*. S'il existe* $x_0 \in I$ *tel que* $\int_a^{+\infty} f(x_0,t)dt$ *converge et si* $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ *converge uniformément sur* I*, alors* $F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge uniformément sur* I *et elle est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I*. En outre, on a*

$$F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Théorème 10 *Si* f *est continue sur* $I \times [a, +\infty[$ *et si l'intégrale généralisée* $\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ *converge uniformément sur* $I = [\alpha, \beta]$ *vers* $F(x)$*, alors*

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^{+\infty} f(x,t)dt \right) dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx \right) dt.$$

Théorème 11 *S'il existe une fonction positive $\varphi(t)$, intégrable sur $[a,u]$, $u \geq a$, telle que :*

$$|f(x,t)| \leq \varphi(t), \quad \forall x \in I$$

et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)dt$ converge absolument et uniformément sur I.

Exemple 12 *L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos tx}{t^2}dt$ converge absolument et uniformément car*

$$\left|\frac{\cos tx}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2},$$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge

Le critère d'Abel-Dirichlet s'énonce comme suit,

Théorème 13 *Soient $f, g : I \times [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est positive, décroissante et $\lim_{t\to+\infty} f(x,t) = 0$ uniformément sur I.

(ii) pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $[a,u]$, $u \geq a$ et il existe une constante C (indépendante de u et de x) telle que,

$$\left|\int_a^u g(x,t)\right| \leq C, \quad \forall u \geq a$$

Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,t)g(x,t)dt$ converge absolument et uniformément sur I.

Théorème 14 *(de convergence dominée). Soit (f_k) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux sur I et convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux. S'il existe une fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue par morceaux sur I telle que :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |f_k(x)| \leq g(x), \text{ (hypothèse de domination)}$$

alors f est intégrable sur I et

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)dx = \int \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = \int f(x)dx.$$

Théorème 15 *Soit (f_k) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$, continues par morceaux, intégrables sur I et telle que la série $\sum f_k$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux. Si la série $\sum \int_I |f_k|$ converge, alors f est intégrable sur I et*

$$\int_I \sum f_k = \sum \int_I f_k = \int_I f_k.$$

Théorème 16 *(de convergence dominée de Lebesgue). Soit (f_k) une suite de fonctions sommables. Si (f_k) converge simplement presque partout vers une fonction f et s'il existe une fonction sommable g telle que :*

$$|f_k(x)| \leq g(x),$$

presque partout, alors $f(x)$ est sommable et

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)dx = \int \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = \int f(x)dx.$$

Pour des notions sur les fonctions sommables, voir le complément (facultatif) ci-dessous :

Compléments : on a rassemblé ici quelques notions sommaires sur la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue.

Définition 17 *Soit Ω un ensemble. Une classe $\mathcal{A}$ de parties de Ω est dite une tribu (ou σ-algèbre de Boole) sur Ω si les conditions suivantes sont satisfaites : i) $\Omega \in \mathcal{A}$, ii) $\forall\ A \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$, iii) si $A_1, A_2, \ldots$ est une infinité dénombrable de parties de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.*

Exemple 18 *L'ensemble $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (dite triviale) de Ω. L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω, est une tribu (dite grossière) de Ω. L'ensemble $\{\emptyset, \mathbb{N}, \{1,2\}, \{3,4,\ldots\}\}$ est une tribu sur $\mathbb{N}$. Par contre, l'ensemble $\mathcal{A} = \{A : A \subseteq \mathbb{N}$ et A fini$\}$ n'est pas une tribu sur $\mathbb{N}$ car $\mathbb{N} \notin \mathcal{A}$.*

Définition 19 *Soient Ω un ensemble et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ un ensemble de parties de Ω. On appelle tribu $\tau(\mathcal{B})$ engendrée par $\mathcal{B}$, la plus petite tribu contenant $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $\tau(\mathcal{B})$ est une tribu telle que : $\mathcal{B} \subseteq \tau(\mathcal{B})$ et pour toute autre tribu $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{B}$, $\tau(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$.*

Exemple 20 *Soient A et B deux sous-ensembles de Ω. On a*

$$\begin{aligned} \tau(\{A\}) &= \{\emptyset,\ \Omega,\ A,\ A^c\}, \\ \tau(\{A,B\}) &= \{\emptyset, \Omega, A, B, A^c, B^c, A\cup B, A^c \cup B, A \cup B^c, \\ &\quad A^c\cup B^c, A\cap B, A^c\cap B, A\cap B^c, A^c\cap B^c, \\ &\quad (A\cup B)\cap(A^c\cup B^c), (A\cap B)\cup(A^c\cap B^c)\}. \end{aligned}$$

Définition 21 *Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ la tribu de parties de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$. On dit que $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne (ou tribu de Borel) de $\mathbb{R}$ et ses éléments sont appelés les boréliens de $\mathbb{R}$.*

Remarque 22 *La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ contient tous les intervalles et tous les points de $\mathbb{R}$. La tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$ est la tribu engendrée par les parties de $\mathbb{R}^n$ de la forme $]-\infty, a_1] \times \cdots \times]-\infty, a_n]$, où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.*

Définition 23 *a) Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{B}$. On dit qu'une fonction $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ est une mesure définie sur $\mathcal{B}$ si $\exists B \in \mathcal{B}$ tel que : $\mu(B) < \infty$ et si $B_1, B_2, \ldots$ est une infinité dénombrable de parties disjointes de $\mathcal{B}$, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i),$$

c'est-à-dire μ est dénombrablement ou complètement additive.
b) Un ensemble $E \subset \Omega$ est dit mesurable lorsque $E \in \mathcal{B}$.
c) Une mesure définie sur $\mathcal{B}$ est dite positive si, $\forall B \in \mathcal{B}$, $\mu(B) \geq 0$.

Exemple 24 *$\mu(\emptyset) = 0$. Mesure de Lebesgue : $\mu(]a, b]) = b - a =$ longueur de $]a, b]$. $\mu\left(]a, b] \times]c, d]\right) = (b - a)(d - c) =$aire de $]a, b] \times]c, d]$. Mesure de Dirac au point a : $\mu(A) = 1$ si $a \in A$ et $= 0$ si $a \notin A$*

Définition 25 *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ensembles munis respectivement des tribus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. On dit qu'une fonction $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est mesurable si, $\forall B_2 \in \mathcal{B}_2$, $f^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}_1$.*

On trouvera dans la littérature d'autres définitions,

a) Une partie $E \subseteq \mathbb{R}$ est dite de mesure nulle si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite (I_k) d'intervalles de longueur l_k telle que :

$$E \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} l_k \leq \varepsilon.$$

b) La locution "presque partout" (en abrégé p.p.) signifie sauf sur un ensemble de mesure nulle.

c) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite mesurable s'il existe une suite (φ_k) de fonctions en escalier sur I qui converge simplement presque partout vers f sur I.

Toutes les fonctions que l'on rencontre en pratique sont mesurables.

Avant de définir l'intégrale au sens de Lebesgue, rappelons briévement ce qu'est l'intégrale au sens de Riemann. Soit f une fonction réelle bornée définie sur un intervalle $[a, b]$. Pour définir l'intégrale au sens de Riemann, notée $\int_a^b f(x)dx$, on considère une subdivision de $[a, b]$ en un nombre fini de points tels que : $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k = b$, et on écrit

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\xi_i), \ \alpha_i \leq \xi_i \leq \alpha_{i+1},$$

ce qui représente l'aire comprise entre le graphe de f et l'axe ox. Pour qu'une fonction bornée soit intégrable au sens de Riemann, il faut et il suffit que l'ensemble des points de discontinuités de f soit de mesure nulle.

L'idée principale de la construction de l'intégrale de Lebesgue, réside dans le fait de considérer une subdivision du domaine des valeurs de f (et non du domaine $[a, b]$ de f, comme dans le cas de Riemann). Soit f une fonction mesurable réelle et positive. Soit $[m, M]$ un intervalle sur l'axe oy tel que : $\text{Im}f \subset [c, d]$ et considérons une subdivision de $[c, d]$ en un nombre fini de valeurs distinctes y_k. Posons $E_i = \{x \in [a, b] : y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}\} = f^{-1}([y_i, y_{i+1}])$, et $\mu(E_i) =$ mesure de E_i. C'est la longueur usuelle de E_i si E_i est un intervalle ou une réunion finie d'intervalles disjoints.

Définition 26 *a) L'intégrale de Lebesgue $\int f d\mu$ (μ étant la mesure de Lebesgue) est la limite commune des sommes $\sum_{i=1}^{k} y_i \mu(E_i)$ et $\sum_{i=1}^{k} y_{i+1} \mu(E_i)$. Autrement dit, l'expression $\sum_{i=1}^{k} \eta_i \mu(E_i)$, $\forall \eta_i \in [y_i, y_{i+1}[$, représente une approximation de l'aire comprise entre le graphe de f et l'axe ox.*

b) On dit qu'une fonction f est intégrable au sens de Lebesgue ou sommable si et seulement si f est mesurable et $\int |f| d\mu$ est fini.

Une autre façon de définir l'intégrale au sens de Lebesgue, consiste à introduire la notion de fonction positivement intégrable. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

a) On dit que f est positivement intégrable, s'il existe une suite croissante (φ_k) de fonctions en escalier sur I qui converge simplement vers f presque partout sur I et telle que $\lim\limits_{k \to \infty} \int_I \varphi_k$ existe.

b) La fonction f est dite intégrable au sens de Lebesgue ou sommable sur I, si elle est la différence de deux fonctions f_1 et f_2 positivement intégrables c'est-à-dire si $f = f_1 - f_2$.

c) L'intégrale de Lebesgue de f sur I est $\int_I f = \int_I f_1 - \int_I f_2$.

d) Si $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$ avec f_1, f_2, g_1, g_2 positivement intégrables sur I, alors $\int_I f_1 - \int_I f_2 = \int_I g_1 - \int_I g_2$. Autrement dit, l'intégrale $\int_I f$ est indépendante du mode de représentation de la fonction f par une différence de fonctions positivement intégrables.

e) Si deux suites croissantes (φ_k) et (ψ_k) de fonctions en escalier vérifient les conditions de la définition précédente (voir fonction positivement intégrable) pour une même fonction f, alors $\lim\limits_{k \to \infty} \int_I \varphi_k = \lim\limits_{k \to \infty} \int_I \psi_k$. Autrement dit, la limite $\lim\limits_{k \to \infty} \int_I \varphi_k$ qui intervient dans la définition de fonction positivement intégrable, ne dépend pas du choix de la suite (φ_k).

f) Le nombre $\lim\limits_{k \to \infty} \int_I \varphi_k$, est appelé l'intégrale de Lebesgue de f sur I et est noté $\int_I f$.

Toute fonction intégrable au sens de Riemann est intégrable au sens de Lebesgue et les deux intégrales sont égales. L'intégrale de Lebesgue généralise celle de Riemann puisqu'elle permet d'intégrer des fonctions qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann dès que les discontinuités ne forment pas un ensemble de mesure nulle.

Exemple 27 *La fonction de Dirichlet $f(x) = 1$ si x est rationnel et $= 0$ sinon, n'est pas intégrable au sens de Riemann (elle est discontinue en tout point), par contre, elle est intégrable au sens de Lebesgue et son intégrale est nulle.*

Remarques importantes pour les applications : $a)$ Une condition suffisante, très utilisée, pour montrer qu'une fonction est sommable est la suivante : une fonction f n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuité est sommable si et seulement si $|f|$ est intégrable au sens de Riemann.

$b)$ Dans la pratique, pour prouver qu'une fonction est sommable, il suffit de montrer qu'elle est majorée en module par une fonction positive dont l'intégrale est convergente. Lorsque l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, il ne s'agit pas d'intégrales généralisée car il y a convergence absolue.

Définition 28 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{L}^1(\Omega)$ ou plus simplement $\mathcal{L}^1$, l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des fonctions sommables sur Ω. L'espace $L^1(\Omega)$ ou L^1 est, par définition, le quotient de $\mathcal{L}^1$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout".*

Remarques 29 $a)$ *Pour montrer que $f \in \mathcal{L}^1$, il suffit de vérifier que l'intégrale $\int_\Omega |f(x)|dx$ existe. De même, pour montrer que $f \in \mathcal{L}^2$, il suffit de vérifier que $\int_\Omega |f(x)|^2 dx$ existe. Rappelons que si f est réelle, $|f(x)|^2 = f^2(x)$ et si f est complexe, $|f(x)|^2 = f(x)\overline{f(x)}$.*

$b)$ *Deux fonctions égales presque partout seront considérées comme égales. Et conformément à l'usage, on confondra d'une part $\mathcal{L}^1$ et L^1 et de l'autre $\mathcal{L}^2$ et L^2.*

Exemple 30 *La fonction $f :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, appartient à L^1 mais pas à L^2. Par contre la fonction $g :]1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$, appartient à L^2 mais pas à L^1.*

Propriétés : $a)$ Si $f, g \in L^1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors $\alpha f + \beta g \in L^1$ et

$$\int (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int f dx + \beta \int g dx.$$

$b)$ Pour qu'une fonction $f \in L^1$, il faut et il suffit que $|f| \in L^1$. En outre

$$\left|\int f dx\right| \leq \int |f| dx.$$

$c)$ Si f est mesurable et s'il existe une fonction positive $g \in L^1$ telle que : $|f(x)| \leq g(x)$ presque partout, alors $f \in L^1$.

$d)$ Si $f(x) \geq 0$ est mesurable, alors $\int f dx = 0$ si et seulement si $f = 0$ presque partout.

$e)$ Si $f \in L^1$ et $f = g$ presque partout, alors $g \in L^1$ et $\int f dx = \int g dx$.

$f)$ La quantité $\|f\| = \int_\Omega |f(x)|dx$, est une norme sur $L^1(\Omega)$.

$g)$ La quantité $\|f\| = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 dx}$, est une norme sur $L^2(\Omega)$.

$h)$ Inégalité de Schwarz : Si $f, g \in L^2$, alors

$$\left|\int_\Omega f(x)\overline{g(x)} dx\right|^2 \leq \int_\Omega |f(x)|^2 dx \int_\Omega |g(x)|^2 dx.$$

1.3 Exercices

Exercice 1.3.1 *On considère la fonction F définie par $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt$.*

a) Montrer que F est continue pour $x \geq a > 0$.

b) Montrer que $F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

c) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{2k}e^{-xt^2}dt$, $k \in \mathbb{N}^*$, $x \geq a > 0$.

Exercice 1.3.2 *Soit $x \longmapsto F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)\sqrt{t}}dt$.*

a) Montrer que F est définie sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que l'intégrale ci-dessus converge uniformément sur $[a, +\infty[$, $a > 0$ et que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

b) Montrer que F vérifie une équation différentielle du premier ordre avec second membre et déterminer F sous une autre forme intégrale.

Exercice 1.3.3 *Soit l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ où*

$$f(x,t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ e^{-xt}\frac{\sin t}{t} & si\ t > 0 \end{cases}$$

a) Etudier la convergence uniforme de cette intégrale et montrer que F est dérivable pour $x > 0$.

b) Montrer que F vérifie une équation différentielle du premier ordre qu'on précisera.

c) Déterminer explicitement $F(x)$.

d) Calculer $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 1.3.4 *a) En utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, montrer que :*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \ln x dx = \int_0^\infty e^{-x} \ln x dx.$$

b) Montrer que :

$$\int_0^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \ln x dx = \frac{k}{k+1}\left(\ln k - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j}dt\right).$$

c) En déduire que :

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln x dx = -\gamma,$$

où $\gamma = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j}dt - \ln k\right) = 0,57721...$, est la constante d'Euler.

Exercice 1.3.5 *Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de la fonction F définie par $F(x) = \int_e^x \ln(\ln t)dt$.*

Exercice 1.3.6 *1) Montrer que la fonction définie par*

$$f(x)=\frac{\sin x}{x^{\alpha}},\quad \alpha\in\mathbb{R}_+^*$$

est sommable sur $[0,1]$ *pour* $0<\alpha<2$ *et sur* $[1,\infty[$ *pour* $\alpha>1$.

2) Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), une fonction localement sommable (c-à-d., intégrable sur tout intervalle borné). On appelle transformée de Laplace de* $f(x)$ *la fonction de la variable complexe* $p=\sigma+i\omega$ *définie par*

$$F(p)=\int_0^{\infty}f(x)e^{-px}dx.$$

a) Montrer que si cette intégrale converge pour Re $p=\sigma_0$, *alors il en est de même pour tout* p *tel que : Re* $p\geq\sigma_0$.

b) Que peut-on dire si l'intégrale ci-dessus diverge pour Re $p=\sigma_0$ *?*

Exercice 1.3.7 *On appelle fonction gamma d'Euler la fonction définie par*

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt.$$

a) Montrer que Γ *est définie sur* $]0,+\infty[$.

b) Montrer que cette intégrale converge uniformément sur l'intervalle $[a,b]$ *où* $0<a<b<+\infty$.

c) En déduire que Γ *est continue sur* $]0,+\infty[$.

d) Montrer que Γ *est de classe* $\mathcal{C}^{\infty}$ *sur* $]0,+\infty[$ *avec*

$$\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}(\ln t)^k t^{x-1}dt.$$

e) Montrer que : $\forall x>0$, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

f) En déduire que : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(k+1)=k!$.

g) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, *on a*

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\sqrt{\pi},\qquad \Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^k2^{2k}k!}{(2k)!}\sqrt{\pi}.$$

Exercice 1.3.8 *Soit* $\Gamma(x)$ *la fonction gamma d'Euler (voir exercice 8.3.13).*

a) Montrer que Γ *est convexe.*

b) Montrer que Γ' *s'annule une et une seule fois en un point* $\alpha\in]1,2[$.

c) Montrer que : $\lim_{x\to0^+}x\Gamma(x)=1$ *et*

$$\lim_{x\to0^+}\Gamma(x)=\lim_{x\to+\infty}\Gamma(x)=+\infty.$$

d) Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x)}{x}$ *et interpréter le résultat obtenu.*

e) Montrer que l'on peut définir la fonction $\Gamma(x)$ *pour des valeurs négatives de* x *et qu'elle agit comme un prolongement de la fonction factorielle.*

f) Esquisser une représentation graphique de la fonction $\Gamma(x)$.

Exercice 1.3.9 *a) Montrer que*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \lim_{k\to+\infty}\int_0^k \left(1-\frac{t}{k}\right)^k t^{x-1}dt, \quad x>0$$

où Γ est la fonction gamma étudiée dans l'exercice précédent.

b) Montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to+\infty}\frac{k^x.k!}{x(x+1)...(x+k)}, \quad x>0$$

c) En déduire la formule de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}, \quad x>0$$

où $\gamma = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{l=1}^k \frac{1}{l} - \ln k\right) = 0,57721...$, est la constante d'Euler.

Exercice 1.3.10 *On définit la fonction bêta d'Euler par*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Montrer que cette intégrale converge pour $p\in]0,+\infty[$ et $q\in]0,+\infty[$.

Chapitre 2

Intégrales multiples

2.1 Réduction des intégrales multiples (FUBINI)

Considérons une fonction continue

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, ..., x_n) \longmapsto f(x_1, ..., x_n),$$

où D est un pavé de $\mathbb{R}^n$ ou un borné (fermé) quelconque de $\mathbb{R}^n$.

2.1.1 D est un pavé de $\mathbb{R}^n$

Considérons d'abord le cas $n = 2$. L'ensemble

$$D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}),$$

est un rectangle.

Considérons les fonctions définies par

$$\begin{aligned} f &: [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto f(x, y), \\ g &: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = \int_c^d f(x, y)dy, \\ h &: [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto h(y) = \int_c^d f(x, y)dx. \end{aligned}$$

Proposition 31 *Si $f(x, y)$ est continue sur D, alors*
(i) $g(x)$ est continue sur $[a, b]$.
(ii) $h(y)$ est continue sur $[c, d]$.

Théorème 32 *(Fubini). Si $f(x, y)$ est continue sur D, alors*

$$(*) \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Définition 33 *Dans le théorème précédent, le nombre* $(*)$ *s'appelle intégrale double de* f *sur* D *et on note* $\int_D f$, $\int\int_D f$ *ou* $\int\int_D f(x,y)dxdy$.

On peut par convention écrire

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \quad \text{pour} \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx,$$

et

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \quad \text{pour} \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Exemple 34 *Calculons l'intégrale* $\int\int_D f(x,y)dxdy$ *où* $f(x,y) = 2x+3y^2$ *et* $D = [1,3]\times[1,2]$. *On a*

$$\int_1^3 \left(\int_1^2 (2x+3y^2)dy\right)dx = \int_1^3 (2x+7)dx = 22.$$

De même, on a

$$\int_1^2 \left(\int_1^3 (2x+3y^2)dx\right)dy = \int_1^2 (8+6y^2)dx = 22.$$

D'après cet exemple, on voit bien que l'ordre dans lequel on effectue les intgrations n'a pas d'importance <u>*mais*</u> *dans certains cas, un ordre d'intégration sera plus avantageux que l'autre. Par exemple, si*

$$f(x,y) = \cos(x - e^y), \quad D = [0, 2\pi]\times[1,2],$$

il est plus difficile d'utiliser la formule

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^2 \cos(x-e^y)dy\right)dx,$$

car il n'est pas facile de calculer l'intégrale $\int_1^2 \cos(x-e^y)dy$. *On a donc intérêt à utiliser l'autre formule, c-à-d.,*

$$\int_1^2\left(\int_0^{2\pi}\cos(x-e^y)dx\right)dy = \int_1^2 \left(\sin(2\pi - e^y) + \sin e^y\right)dy = 0.$$

<u>Interprétation géométrique</u> : On suppose que $f(x,y)\geq 0$, $\forall (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$. On a

$$\int\int_D f = \text{volume (dans } \mathbb{R}^3\text{) de l'ensemble } \{(x,y,z) : (x,y)\in D, 0\leq z\leq f(x,y)\}.$$

En particulier, si $f(x,y) = 1$, alors

$$\begin{aligned}\int\int_D 1dxdy &= \text{volume d'un ensemble dont la base est D et la hauteur 1},\\ &= \text{aire de D},\\ &= \text{base } \times \text{ hauteur}.\end{aligned}$$

(Si f est négative sur D, $\int\int_D f$ sera négative, sa valeur absolue représentera le volume de l'ensemble $\{(x,y,z) : (x,y)\in D, f(x,y)\leq z\leq 0\}$).

Propriété 35 *Si f et g sont continues sur D et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + \beta g$ et continue sur D et*

$$\int\int_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \int\int_D f + \beta \int\int_D g.$$

Propriété 36 *Si f est continue sur D, alors $|f|$ et continue sur D et*

$$\left|\int\int_D f\right| \leq \int\int_D |f|.$$

Propriété 37 *Si f est continue sur D et si $f \geq 0$, alors*

$$\int\int_D f \geq 0,$$
$$\int\int_D f = 0 \Longleftrightarrow f = 0.$$

Propriété 38 *Si f et g sont continues sur D, alors*

$$f \leq g \Longrightarrow \int\int_D f \leq \int\int_D g.$$

Théorème 39 *(de la moyenne). Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors il existe $(x_0, y_0) \in D$ tel que :*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0)\ Aire(D).$$

Pour $n = 3$, $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, $(a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i,\ 1 \leq i \leq 3)$, on parle dans ce cas d'intégrale triple et le théorème de Fubini fournit

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \begin{cases} - & \text{succession d'une intégrale double et} \\ & \text{d'une intégrale simple.} \\ - & \text{succession d'une intégrale simple et} \\ & \text{d'une intégrale double.} \\ - & \text{succession de trois intégrales simples} \\ & \text{(réduction complète).} \end{cases}$$

Pour $n > 3$, $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, $(a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i,\ 1 \leq i \leq n)$, le théorème de Fubini fournit, parmi d'autres, les formules de réduction complète :

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \ldots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_n \right) \ldots dx_2 \right) dx_1, \\ &= \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \ldots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) dx_n \right) \ldots dx_{n-1} \right) dx_n. \end{aligned}$$

Pour $n = k + l$, avec $D = I \times J \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \mathbb{R}^n$ où I est un pavé de $\mathbb{R}^k$ et J est un pavé de $\mathbb{R}^l$, le théorème de Fubini fournit,

$$\begin{aligned}\int_D f &= \int_I \left(\int_J f(x,y)dy\right) dx,\\ &= \int_J \left(\int_I f(x,y)dx\right) dy, \quad x \in I, y \in J\end{aligned}$$

et plus particulièrement, si $f(x,y) = g(x)h(y)$, alors

$$\int_D f = \left(\int_I g(x)dx\right)\left(\int_J h(y)dy\right).$$

2.1.2 D est un borné (fermé) quelconque de $\mathbb{R}^n$

Considérons d'abord le cas $n = 2$. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction où D est un borné (par exemple une courbe fermée dans $\mathbb{R}^2$). Rappelons que D est un borné s'il existe un rectangle $P = [a,b] \times [c,d]$ tel que : $D \subset P$.

Soit $\widetilde{f} : P \longrightarrow \mathbb{R}$, le prolongement de f défini par

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \forall (x,y) \in D\\ 0, & \forall (x,y) \in P \backslash D.\end{cases}$$

Si $\widetilde{f}$ est bornée et Aire $\{(x,y) : \widetilde{f}(x,y) \text{ discontinue}\} = 0$, alors $\widetilde{f}$ est intégrable sur P. Dès lors, $\widetilde{f}$ est intégrable sur P si f est continue sur D et si Aire (fr D)$= 0$ (car les seuls points où $\widetilde{f}$ peut être discontinue doivent appartenir à la frontière fr D de D.

Par définition, on a

$$\int\int_D f = \int\int_P \widetilde{f},$$

avec $\widetilde{f}$ intégrable sur P. Soit $\alpha_i, \beta_j \in \Delta_{ij}$ où

$$\Delta_{ij} = \max_{0 \leq i,j \leq k-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}, \quad [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset P.$$

On a

$$\int\int_D = \lim_{\Delta_{ij} \longrightarrow 0} \sum_{i,j=0}^{k-1} f(\alpha_i, \beta_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

<u>1^{er} ***cas***</u> : on considère l'ensemble

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

où $g_1, g_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, sont deux fonctions continues telles que : $g_1 \leq g_2$. Dans ce cas le théorème de Fubini fournit,

$$\int\int_D f = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right) dx.$$

<u>$2^{\text{ème}}$ ***cas***</u> : on considère l'ensemble

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

où $h_1, h_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, sont deux fonctions continues telles que : $h_1 \leq h_2$. Dans ce cas le théorème de Fubini fournit,

$$\int\int_D f = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right) dy.$$

<u>$3^{\text{ème}}$ ***cas***</u> : on considère un ensemble combinant les deux cas précédents. Dans ce cas le théorème de Fubini fournit,

$$\begin{aligned}\int\int_D f &= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right) dx,\\ &= \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right) dy.\end{aligned}$$

Exercice 2.1.1 *Calculons* $\int\int_D f(x,y)dxdy$, *où*

$$f(x,y) = (1-x^2)^{3/2},$$

et

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}.$$

En utilisant le 1^{er} *cas, c-à-d.,* $a = 0$, $b = 1$, $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = \sqrt{1-x^2}$, *on obtient*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2)^{3/2}dy\right) dx = \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \frac{8}{15}.$$

Si on utilise le $2^{\text{ème}}$ *cas, c-à-d.,* $c = 0$, $d = 1$, $h_1(y) = 0$, $h_2(y) = \sqrt{1-y^2}$, *on obtient*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (1-x^2)^{3/2}dx\right) dy,$$

ce qui montre que dans cet exemple, il est avantageux d'intégrer d'abord par rapport à y, puis par rapport à x, c-à-d., d'utiliser le 1^{er} *cas.*

Exercice 2.1.2 *Calculons* $\int\int_D f(x,y)dxdy$, *où*

$$f(x,y) = xy,$$

et

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x, x^2+y^2 > 4, xy < 4\}.$$

Notons que : $D = D_1 \cup D_2$, *où*

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{\sqrt{5}} < x < \sqrt{2}, \sqrt{4-x^2} < y < 2x\},$$

et

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{2} < x < 2, x < y < \frac{4}{x}\}.$$

On a

$$\begin{aligned}\int\int_D f(x,y)dxdy &= \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{\sqrt{4-x^2}}^{2x} xydy\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\int_{x}^{\frac{4}{x}} xydy\right) dx,\\ &= \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{5x^3}{2} - 2x\right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(\frac{8}{x} - \frac{x^3}{2}\right) dx,\\ &= -\frac{3}{5} + 4\ln 2.\end{aligned}$$

Lemme 40 *(Inégalité de Young). Soient $p > 1$ et $q > 1$ deux nombres réels tels que :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}.$$

Proposition 41 *(Inégalité de Hölder). Si p et q sont comme ci-dessus et si $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, sont deux fonctions continues et bornées, alors*

$$\int\int_D |fg| \leq \left(\int\int_D |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int\int_D |f|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Proposition 42 *(Inégalité de Cauchy-Shwarz). C'est l'inégalité de Hölder avec $p = q = 2$.*

Proposition 43 *(Inégalité de Minkowski). Soient $p \geq 1$ un nombre réel et $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et bornées. On a*

$$\left(\int\int_D |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\int_D |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\int_D |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $n = 3$ et

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x,y) \leq z \leq \psi_2(x,y)\},$$

où $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, sont deux fonctions continues telles que : $\varphi_1 \leq \varphi_2$ et $\psi_1, \psi_2 : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \longrightarrow \mathbb{R}$, sont deux fonctions continues telles que : $\psi_1 \leq \psi_2$. Dans ce cas, le théorème de Fubini fournit

$$\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx.$$

Soit $n = k + l$, $D \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$. Désignons respectivement par $pr_{\mathbb{R}^k}$ et $pr_{\mathbb{R}^l}$ les projections définies par

$$pr_{\mathbb{R}^k} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^k, \quad (x, y) \longmapsto x,$$

$$pr_{\mathbb{R}^l} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^l, \quad (x, y) \longmapsto y,$$

et posons

$$A = pr_{\mathbb{R}^k} D = \{x \in \mathbb{R}^k : \exists y \in \mathbb{R}^l, (x, y) \in D\},$$

$$B = pr_{\mathbb{R}^l} D = \{y \in \mathbb{R}^l : \exists x \in \mathbb{R}^k, (x, y) \in D\},$$

$$\forall x \in A, \quad B_x = \{y \in\in \mathbb{R}^l, (x, y) \in D\} = \text{ section de D par une droite},$$

$$\forall y \in B, \quad A_y = \{x \in\in \mathbb{R}^k, (x, y) \in D\} = \text{ section de D par une droite}.$$

Notons que

$$D = \{(x, y) : x \in A, y \in B_x\} = \{(x, y) : y \in B, x \in A_y\}.$$

Dans ces conditions, le théorème de Fubini s'écrit

$$\int_D = \int_A \left(\int_{B_x} f(x, y) dy \right) dx = \int_B \left(\int_{A_y} f(x, y) dx \right) dy.$$

2.2 Changements de variables dans les intégrales multiples

Considérons l'application

$$g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \longmapsto g(y) = x,$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On a

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(y_1, ..., y_n), \\ x_2 &= g_2(y_1, ..., y_n), \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(y_1, ..., y_n). \end{aligned}$$

On suppose que les dérivées partielles $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y)$, $1 \leq i, j \leq n$, existent pour tout $y \in \Omega$. Rappelons que le jacobien de g est

$$\det J_g(y) = \frac{\partial(x_1, ..., x_n)}{\partial(y_1, ..., y_n)} = \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(y) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Si $n = 2$, on a

$$\det J_g(y) = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}.$$

Théorème 44 *(de changement de variable). Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,*

$$g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad y \longmapsto g(y) = x,$$

une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $\det J_g(y) \neq 0$, $\forall y \in \Omega$ *et*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x),$$

une fonction intégrable où $D \subset g(\Omega)$. Alors $(fog)\,|\det J_g(y)|$ est intégrable sur $g^{-1}(D)$ et

$$\int_D f = \int_{g^{-1}(D)} (fog)\,|\det J_g(y)|\,.$$

Coordonnées polaires : Considérons l'application

$$g : \Omega =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\}, (r,\theta) \longmapsto (x,y),$$

où

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta.$$

g est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ dont le jacobien est

$$\det J_g = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r \neq 0 \text{ sur } \Omega.$$

Soit D un secteur de couronne circulaire

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, r \in [r_1, r_2], \theta \in [\theta_1, \theta_2]\right\},$$

où $0 < r_1 < r_2$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$. On a

$$g^{-1}(D) = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2].$$

D'après le théorème du changement de variable, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors

$$\begin{aligned} \int\int_D f(x,y)dxdy &= \int\int_{g^{-1}(D)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta, \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr \right) d\theta. \end{aligned}$$

Si $D = C$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon R, alors en passant à la limite, la formule ci-dessus devient

$$\int_C f = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr \right) d\theta.$$

Exercice 2.2.1 *Calculons* $\int\int_D \sin(x^2+y^2)dxdy$*, où*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\right\}.$$

En passant aux coordonnées polaires, on trouve

$$g^{-1}(D) = \{(r,\theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

d'où

$$\int\int_D \sin(x^2+y^2)dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin r^2).rd\theta\right) dr = \frac{\pi}{4}(\cos 1 - \cos 4).$$

Coordonnées sphériques : Considérons l'application

$$g : \Omega =]0,+\infty[\times]0,2\pi[]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0\},$$

$$(r,\theta,\varphi) \longmapsto (x,y,z),$$

où

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\varphi, \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned}$$

(Note : on emploie également le système : $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$ où $(r,\theta,\varphi) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[]0,\pi[$).

g est une bijection dont le jacobien est

$$\det J_g = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix} = -r\sin\varphi.$$

Soit D un secteur sphérique

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = r\cos\theta\sin\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\varphi\right\},$$

où $r \in [r_1,r_2]$, $\theta \in [\theta_1,\theta_2]$, $\varphi \in [\varphi_1,\varphi_2]$, avec $0 < r_1 < r_2$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$. On a

$$g^{-1}(D) = [r_1,r_2] \times [\theta_1,\theta_2] \times [\varphi_1,\varphi_2].$$

D'après le théorème du changement de variable, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors

$$\begin{aligned} &\int\int\int_D f(x,y,z)dxdydz \\ &\quad = \int\int\int_{g^{-1}(D)} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)|J_g|drd\theta d\varphi, \\ &\quad = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr\right)d\theta\right)d\varphi. \end{aligned}$$

Si $D = S$ est la sphère de rayon R, on peut faire le passage à la limite, $r_1 \to 0$, $\theta_1 \to 0$, $\theta_2 \to 2\pi$, $\varphi_1 \to 0$, $\varphi_2 \to \pi$, et la formule précédente devient

$$\int_S f = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr \right) d\theta \right) d\varphi.$$

Exercice 2.2.2 *Déterminons le volume de l'intersection D du cône : $x^2 + y^2 < z^2$ avec la boule : $x^2 + y^2 + z^2 < 2az$. En coordonnées sphériques, on a*

$$g^{-1}(D) = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}, 0 < r < 2a\cos\varphi\},$$

d'où

$$V = \int_{g^{-1}(D)} r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi a^3.$$

Coordonnées cylindriques : Considérons l'application

$$g : \Omega =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \backslash \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y = 0, z \in \mathbb{R}\},$$
$$(r, \theta, \varphi) \longmapsto (x, y, z),$$

où

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \\ z &= z \end{aligned}$$

g est bijective et son jacobien est

$$\det J_g = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \neq 0 \text{ sur } \Omega.$$

On a

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z \in \mathbb{R}\right\},$$

où $r \in [r_1, r_2]$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, avec $0 < r_1 < r_2$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$. D'après le théorème du changement de variable, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable, alors

$$\int\int\int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int\int\int_{g^{-1}(D)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr d\theta dz.$$

Si D est le cylindre

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < R^2, h_1 < z < h_2\},$$

rt $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable, alors

$$\int\int\int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_{h_1}^{h_2} \left(\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr \right) dz \right) d\theta.$$

En particulier, si $f \equiv 1$,

$$V(D) = \int\int\int_D dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_{h_1}^{h_2} \left(\int_0^R r dr \right) dz \right) d\theta = \pi r^2 (h_2 - h_1).$$

Exercice 2.2.3 *Calculons* $\int\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, *où*

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z^2 < x^2+y^2 < ax\}.$$

On a, en coordonnées cylindriques,

$$g^{-1}(D) = \{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < r < a\cos\theta, -r < z < r\},$$

d'où

$$\int\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r^2dr \int_{-r}^{r} dz = \frac{3a^4}{32}.$$

2.3 Exercices

Exercice 2.3.1 *Calculer*

a) $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{\frac{y}{x}} dx$.

b) $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 ye^{xy}dx$.

Exercice 2.3.2 *Calculer*

a) $\int\int_D xydxdy$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x < y < 2x, x^2+y^2 > 4, xy < 4\}$.

b) $\int\int_D \sin(x^2+y^2)dxdy$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$.

c) $\int\int_D |x+y|dxdy$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$.

Exercice 2.3.3 *Soit* f *une application continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

a) Exprimer l'intégrale multiple

$$\int_0^b dx_n \int_0^{x_n} dx_{n-1} ... \int_0^{x_3} dx_2 \int_0^{x_2} f(x_1)dx_1,$$

sous la forme d'une intégrale en x_1.

b) Soit y *une fonction de* x, *de classe* $\mathcal{C}^n$, *définie sur* $\mathbb{R}$ *et satisfaisant aux conditions suivantes :*

$$y(0) = y'(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0, \qquad y^{(n)}(x) = f(x).$$

Montrer que :

$$y(x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{(n-1)}}{(n-1)!}dt.$$

Exercice 2.3.4 *Calculer le volume de l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (a,b,c > 0).$$

Exercice 2.3.5 *a) La transformation suivante peut-elle être utilisée comme changement de variables sur le domaine* D *du plan limité par les droites* $u = 0$,$v = 0$ *et* $u + v = 2$, $\varphi(u,v) = (u+v, v-u^2)$ *?*

b) Caratériser l'image de D *par* φ.

c) Calculer l'aire de $\varphi(D)$ *directement et par changement de variables.*

d) Calculer directement et par changement de variables l'intégrale sur $\varphi(D)$ *de la fonction* $\frac{1}{x-y+1}$.

Exercice 2.3.6 *Calculer l'intégrale de* $e^{\frac{x-y}{x+y}}$ *sur le domaine limité par les droites* $x = 0$, $y = 0$ *et* $x + y = 1$.

Exercice 2.3.7 *Soit* D *la région du premier quadrant limitée par les hyperboles,* $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$. *Calculons l'intégrale de* $x^2 + y^2$ *sur* D.

Exercice 2.3.8 *Calculer l'intégrale de* xy *sur* D,

a) lorsque D *est le domaine limité par la droite* $y = 0$ *et le demi cercle défini par* $(x-1)^2 + y^2 = 1$ *et* $y \geq 0$.

b) lorsque D *est le domaine limité par les droites* $x = 0$ *et* $y = 0$ *et par l'arc d'astroïde* $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.3.9 *Une sphère de rayon* R_1 *est percée d'un trou cylindrique de rayon* R_2 *dont l'axe passe par le centre de la sphère. Calculer le volume résiduel de la sphère.*

Exercice 2.3.10 *Soit* $P = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ *le pavé de* $\mathbb{R}^2$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *contenat* P. *On considère une fonction* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, *de classe* $\mathcal{C}^2$. *Calculer*

$$\int\int_P \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy.$$

Exercice 2.3.11 *Calculer l'aire du quadrilatère curviligne limité par les arcs d parabole* $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = cx$, $y^2 = dx$ *où* $0 < a < b$ *et* $0 < c < d$.

Exercice 2.3.12 *Calculer le volume du corps limité par le plan* $z = 0$, *le cylindre* $x^2 + y^2 = 2ax$ *et le cône* $x^2 + y^2 = z^2$.

Exercice 2.3.13 *Calculer l'aire de la surface découpée sur la sphère* $x^2+y^2+z^2 = a^2$ *par le cylindre* $x^2 + y^2 - ax = 0$.

Exercice 2.3.14 *Calculer l'intégrale* $\int\int_D \frac{xy}{x^2+y^2} dxdy$, *où*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}.$$

Exercice 2.3.15 *Déterminer le volume de l'intersection* D *du cône :* $x^2 + y^2 < z^2$ *avec la boule :* $x^2 + y^2 + z^2 < 2az$.

Exercice 2.3.16 *On définit la fonction bêta d'Euler par*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx.$$

a) Montrer que cette intégrale converge pour $p \in]0, +\infty[$ *et* $q \in]0, +\infty[$.

b) Etablir la formule suivante : $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ *où* Γ *est la fonction gamma d'Euler définie précédemment.*

Exercice 2.3.17 *Etablir la formule des compléments suivante :*

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0 < p < 1$$

où Γ *et* B *sont les fonctions gamma et bêta d'Euler définies dans les exercices précédents.*

Exercice 2.3.18 *Exprimer à l'aide des fonctions gamma et bêta d'Euler, les intégrales elliptiques* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ *et* $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ *ainsi que l'intégrale trigonométrique* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx$, $m > -1$, $n > -1$.

Chapitre 3

Formes différentielles, intégrales curvilignes

(N.B. Seules les formes différentielles de degré 1, 2 dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, sont au programme. Les formes différentielles de degré k, sont données ici en tant que complément).

3.1 Généralités

Formes différentielles de degré 1 : considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et son espace dual $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Ce dernier étant l'espace des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. On note $(dx_1, ..., dx_n)$ la base duale de la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, $dx_1, ..., dx_n$ sont n formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ définies par

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Définition 45 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle forme différentielle de degré* 1 *ou* 1*-forme différentielle sur U, l'application définie par*

$$\omega : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad x \longmapsto \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) dx_i,$$

où f_i sont des applications de U dans $\mathbb{R}$. Si $f_i \in \mathcal{C}^p$, $(0 \leq p \leq +\infty)$, on dit alors que ω est de classe $\mathcal{C}^p$.

Notation : On désigne parfois une 1-forme différentielle par $\omega = \omega_f^1$ où $f = (f_i)$.

Remarque 46 *Soit*

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, ..., x_n) \longmapsto f(x_1, ..., x_n),$$

une fonction de classe $\mathcal{C}^p$. La différentielle

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{p-1}$. Par ailleurs, il existe des formes différentielles qui ne sont pas la différentielle d'une fonction. Considérons par exemple la forme

$$\omega = x_1 dx_2,$$

et supposons qu'elle soit la différentielle d'une fonction $f(x_1, x_2)$. On aurait donc

$$\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = x_1 dx_2.$$

On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ (donc f ne dépend pas de x_1) et $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1$ (donc f dépend de x_1), ce qui est absurde.

Formes différentielles de degré 2 : considérons l'espace $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ des applications

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (y, z) \longmapsto \varphi(y, z),$$

bilinéaires et antisymétriques. Rappelons que :
a) φ est bilinéaire si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall y, z, u \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(\alpha y + \beta z, u) = \alpha\varphi(y, u) + \beta\varphi(z, u),$$

$$\varphi(y, \alpha z + \beta u) = \alpha\varphi(y, z) + \beta\varphi(y, u).$$

b) φ est antisymétrique si $\forall y, z \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(y, z) = -\varphi(z, y).$$

Notons que $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel réel (voir ci-dessous). Pour décrire une base de cet espace, on introduit les applications $dx_i \wedge dx_j \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq i, j \leq n$, définies par

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (y, z) \longmapsto \det \begin{pmatrix} y_i & z_i \\ y_j & z_j \end{pmatrix} = y_i z_j - y_j z_i.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} dx_i \wedge dx_j &= -dx_j \wedge dx_i, \\ dx_i \wedge dx_i &= 0. \end{aligned}$$

Proposition 47 *$\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ et sa base est déterminée par la famille des fonctions bilinéires antisymétriques $(dx_i \wedge dx_j)_{1 \leq i < j \leq n}$.*

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

$$f_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_{ij}(x), 1 \leq i < j \leq n$$

des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, $0 \leq p \leq +\infty$. Une fonction à valeurs dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ est dite de classe $\mathcal{C}^p$, si ses coordonnées dans la base $(dx_i \wedge dx_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ sont de classe $\mathcal{C}^p$. Le choix de cette base dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ détermine un isomorphisme de cet espace avec $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Définition 48 *On appelle forme différentielle de degré* 2 *ou* 2*-forme différentielle sur* U*, l'application décrite par*

$$\omega : U \longrightarrow \Lambda^2(\mathbb{R}^n), \quad x \longmapsto \omega(x) = \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} f_{ij}(x)dx_i \wedge dx_j.$$

Si $f_{ij} \in \mathcal{C}^p$*,* $(0 \leq p \leq +\infty)$*, on dit alors que* ω *est de classe* $\mathcal{C}^p$*.*

Notation : On désigne parfois une 2-forme différentielle par $\omega = \omega_f^2$ où $f = (f_{ij})$.

Formes différentielles de degré k : considérons l'espace $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ des applications

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (y_1, y_2, ..., y_k) \longmapsto \varphi(y_1, y_2, ..., y_k),$$

k-linéaires et antisymétriques. Rappelons que :

a) φ est k-linéaire si $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall i (1 \leq i \leq k)$, $\forall y_1, ..., y_k, z_i \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(y_1, ..., \alpha y_i + \beta z_i, ..., y_k) = \alpha\varphi(y_1, ..., y_i, ..., y_k) + \beta\varphi(y_1, ..., z_i, ..., y_k).$$

b) φ est antisymétrique si $\forall y_1, ..., y_k \in \mathbb{R}^n$, $\forall i, j (1 \leq i, j \leq k, i \neq j)$, on a

$$\varphi(y_1, ..., y_i, ..., y_j, ..., y_k) = -\varphi(y_1, ..., y_j, ..., y_i, ..., y_k).$$

On montre que $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel réel (voir ci-dessous). Introduisons les applications $dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq i_1, i_2, ..., i_k \leq n$, définies par

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(y_1, y_2, ..., y_k) \longmapsto \det \begin{pmatrix} y_{1i_1} & y_{1i_2} & \cdots & y_{1i_k} \\ y_{2i_1} & y_{2i_2} & \cdots & y_{2i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{ki_1} & y_{ki_2} & \cdots & y_{ki_k} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n$$

On déduit des propriétés des déterminants que :

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r} \wedge ... \wedge dx_{i_s} \wedge dx_{i_k} = -dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_s} \wedge ... \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{i_k},$$

et en particulier si $i_r = i_s$, alors

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r} \wedge ... \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{i_k} = 0.$$

Pour $k > n$, on a $dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = 0$.

Proposition 49 $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ *est un espace vectoriel de dimension* $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ *et la famille des fonctions bilinéires antisymétriques* $(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})_{1\leq i_1 < ... < i_k \leq n}$*, forme une base de cet espace.*

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

$$f_{i_1,\ldots,i_k} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_{i_1,\ldots,i_k}(x), 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$$

des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, $0 \leq p \leq +\infty$. Une fonction à valeurs dans $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ est dite de classe $\mathcal{C}^p$, si ses coordonnées dans la base $(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ sont de classe $\mathcal{C}^p$. Le choix de cette base détermine un isomorphisme : $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^{\frac{n!}{k!(n-k)!}}$.

Définition 50 *On appelle forme différentielle de degré k ou k-forme différentielle sur U, l'application décrite par*

$$\omega : U \longrightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \quad x \longmapsto \omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Si $f_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{C}^p$, $(0 \leq p \leq +\infty)$, on dit alors que ω est de classe $\mathcal{C}^p$.

Notation : On désigne parfois une k-forme différentielle par $\omega = \omega_f^k$ où $f = (f_{i_1,\ldots,i_k})$.

Notons que pour $k = 0$, on convient qu'une 0-forme dans U est simplement une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$. On utilisera parfois la notation ω_f^0.

Proposition 51 *Les k-formes différentielles sur U, forment un espace vectoriel noté $\Omega^k(U)$.*

3.2 Produit extérieur

Soient

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

une k-forme différentielle sur U et

$$\lambda = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq n} g_{j_1,\ldots,j_l} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l},$$

une l-forme différentielle sur U.

Définition 52 *Le produit extérieur de ω et λ est la $(k+l)$-forme différentielle dans U définie par*

$$\omega \wedge \lambda = \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_l \leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} g_{j_1,\ldots,j_l} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}.$$

Proposition 53 *a) Si $k + l > n$, alors $\omega \wedge \lambda = 0$.*

b) Le produit extérieur est associatif :

$$(\omega \wedge \lambda) \wedge \eta = \omega \wedge (\lambda \wedge \eta).$$

c) Le produit extérieur est distributif :

$$(\omega + \eta) \wedge \lambda = (\omega \wedge \lambda) + (\eta \wedge \lambda).$$

d) Le produit extérieur est anticommutatif :

$$\omega \wedge \lambda = (-1)^{kl}(\lambda \wedge \omega).$$

Exemple 54 *Le produit extérieur des deux 1-formes différentielles dans $U \subset \mathbb{R}^3$,*

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i, \qquad \lambda = \sum_{j=1}^{3} g_j dx_j,$$

s'écrit

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \lambda &= \sum_{1\leq i,j\leq 3}^{3} f_i g_j dx_i \wedge dx_j,\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i\neq j}}^{3} f_i g_j dx_i \wedge dx_j,\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i<j}}^{3} f_i g_j dx_i \wedge dx_j + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i>j}}^{3} f_i g_j dx_i \wedge dx_j,\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i<j}}^{3} f_i g_j dx_i dx_j + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ j>i}}^{3} f_j g_i dx_j \wedge dx_i,\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i<j}}^{3} f_i g_j dx_i \wedge dx_j - \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i<j}}^{3} f_j g_i dx_i \wedge dx_j,\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i<j}}^{3} (f_i g_j - f_j g_i) dx_i \wedge dx_j,\\
&= (f_1 g_2 - f_2 g_1) dx_1 \wedge dx_2 + (f_1 g_3 - f_3 g_1) dx_1 \wedge dx_3\\
&\qquad + (f_2 g_3 - f_3 g_2) dx_2 \wedge dx_3,
\end{aligned}$$

où $(f_2g_3 - f_3g_2, f_3g_1 - f_1g_3, f_1g_2 - f_2g_1)$ est le produit vectoriel de $f = (f_1, f_2, f_3)$ par $g = (g_1, g_2g_3)$ et que l'on note également $f \wedge g$. En abrégé, on note $\omega = \omega_f^1$, $\lambda = \omega_g^1$ et donc

$$\omega_f^1 \wedge \omega_g^1 = \omega_{f\wedge g}^2.$$

Exemple 55 *Le produit extérieur des deux formes différentielles,*

$$\begin{aligned}
\omega &= f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3,\\
\lambda &= g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_3 \wedge dx_1 + g_3 dx_1 \wedge dx_2,
\end{aligned}$$

est une 3-forme différentielle. On obtient

$$\omega \wedge \lambda = (f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

où la fonction $f_1g_1 + f_2g_2 + f_3g_3$ est le produit scalaire de $f = (f_1, f_2, f_3)$ par $g = (g_1, g_2g_3)$ et que l'on note $\langle f, g\rangle$. En abrégé, on note $\omega = \omega_f^1$, $\lambda = \omega_g^2$ et donc

$$\omega_f^1 \wedge \omega_g^2 = \omega_{\langle f,g\rangle}^3.$$

Exemple 56 *Le produit mixte de trois champs de vecteurs f, g et h peut s'exprimer par la formule*

$$\langle f \wedge g, h\rangle = \langle f, g \wedge h\rangle = \det \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}.$$

3.3 Différentielle extérieure

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, une application de classe $\mathcal{C}^1$. La différentielle extérieure de f est la 1-forme différentielle dans U définie par

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Soient

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n} f_{i_1,...,i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k},$$

une k-forme différentielle sur U de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 57 *La différentielle extérieure (ou cobord) de ω, est la $(k+1)$- forme différentielle dans U définie par*

$$d\omega = \sum_{1\leq i_1,...,i_k\leq n} df_{i_1,...,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k},$$

où $df_{i_1,...,i_k}$ est la différentielle extérieure de l'application $f_{i_1,...,i_k}$ de U dans $\mathbb{R}$,

$$df = \sum_{i_0=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,...,i_k}}{\partial x_{i_0}} dx_{i_0}.$$

On a

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1\leq i_1,...,i_k\leq n} df_{i_1,...,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}, \\ &= \sum_{1\leq i_1,...,i_k\leq n} \left(\sum_{i_0=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,...,i_k}}{\partial x_{i_0}} dx_{i_0} \right) \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}, \\ &= \sum_{1\leq i_0,i_1,...,i_k\leq n} \frac{\partial f_{i_1,...,i_k}}{\partial x_{i_0}} \wedge dx_{i_0} \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}, \end{aligned}$$

et en particulier,

$$\forall 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n, \quad d(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}) = 0.$$

Proposition 58 *a) Si ω et λ sont deux k-formes différentielles dans U de classe $\mathcal{C}^1$, alors*

$$d(a\omega + b\lambda) = ad\omega + bd\lambda, \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

b) Si ω est une k-forme différentielle dans U de classe $\mathcal{C}^1$ et si g est une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$d(g\omega) = dg \wedge \omega + gd\omega.$$

c) Si ω est une k-forme différentielle dans U de classe $\mathcal{C}^1$ et si λ est une l-forme différentielle dans U de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega \wedge \lambda) + (-1)^k(\omega \wedge d\lambda).$$

d) Si ω est une k-forme différentielle dans U de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$d(d\omega) = 0.$$

Exemple 59 *Soit f une application dans $U \subset \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$. Sa différentielle*

$$df = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

est une 1-forme. Il lui correspond un champ de vecteurs que l'on appelle le gradient de f et que l'on note grad $f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$. En abrégé, on note

$$\omega^1_{grad\ f} = df.$$

Exemple 60 *Soit*

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} f_i dx_i,$$

une 1*-forme dans* $U \subset \mathbb{R}^3$ *de classe* $\mathcal{C}^1$*. On a*

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^{3} df_i \wedge dx_i,\\
&= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_j\right)\wedge dx_i,\\
&= \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_j \wedge dx_i,\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i<j}}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_j \wedge dx_i + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i>j}}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_j \wedge dx_i,\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i<j}}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_j \wedge dx_i + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ j>i}}^{3}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i \wedge dx_j,\\
&= -\sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i<j}}^{3}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}dx_i \wedge dx_j + \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i<j}}^{3}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i \wedge dx_j,\\
&= \sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i<j}}^{3}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)dx_i \wedge dx_j,\\
&= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)dx_2 \wedge dx_3\\
&\qquad\qquad + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)dx_1 \wedge dx_3.
\end{aligned}$$

Dès lors, $d\omega$ *est une* 2*-forme différentielle dans* U *et il lui correspond un champ de vecteurs qu'on appelle le rotationnel de* $f = (f_1, f_2, f_3)$ *et que l'on note*

$$rot\ f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).$$

En abrégé, on note

$$d\omega_f^1 = \omega_{rot\ f}^2.$$

Exemple 61 *Soit*

$$\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

une 2-forme différentielle dans $U \subset \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\begin{aligned}
d\omega &= df_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + df_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + df_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2,\\
&= \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge dx_3 \wedge dx_1\\
&\qquad + \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_3}{\partial x_i} dx_i\right) \wedge dx_1 \wedge dx_2,\\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2,\\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.
\end{aligned}$$

Dès lors, $d\omega$ est une 3-forme différentielle dans U et il lui correspond la fonction scalaire

$$div\ f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3},$$

appelée divergence de $f = (f_1, f_2, f_3)$. En abrégé, on note

$$d\omega_f^2 = \omega_{div\ f}^3.$$

Exemple 62 *Soit f une application dans $U \subset \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$. L'expression*

$$\Delta g = div\ grad\ f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2},$$

s'appelle Laplacien de f.

3.4 Formes fermées et formes exactes

Définition 63 *Une k-forme différentielle ω dans U de classe $\mathcal{C}^1$ est dite fermée si $d\omega = 0$.*

Proposition 64 *La 1-forme différentielle dans U de classe $\mathcal{C}^1$,*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i,$$

est fermée si et seulement si

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Exemple 65 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, une application de classe $\mathcal{C}^1$. La 1-forme différentielle*

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3,$$

est fermée si et seulement si $rot\ f = rot\ (f_1, f_2, f_3) = 0$ car $d\omega_f^1 = \omega_{rot\ f}^2$.

Exemple 66 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, une application de classe $\mathcal{C}^1$. La 2-forme différentielle*

$$\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

est fermée si et seulement si div $f =$ div $(f_1, f_2, f_3) = 0$ car $d\omega_f^2 = \omega_{div\ f}^3$.

Définition 67 *Une k-forme différentielle ω dans U est dite exacte s'il existe une $(k-1)$-forme différentielle λ dans U de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $\omega = d\lambda$.*

Proposition 68 *La 1-forme différentielle dans U de classe $\mathcal{C}^1$,*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i,$$

est exacte s'il existe une application $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (de classe $\mathcal{C}^1$) telle que :

$$f_i = \frac{\partial h}{\partial x_i}.$$

Exemple 69 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, une application continue. La 1-forme différentielle*

$$\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3,$$

est exacte si et seulement s'il existe une application $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (de classe $\mathcal{C}^1$) telle que : $\omega_f^1 = dh = \omega_{grad\ h}^1$, c-à-d., telle que $f =$ grad h car les écritures sont canoniques. On dit alors que le champ de vecteurs $f = (f_1, f_2, f_3)$ dérive d'un potentiel scalaire h.

Exemple 70 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, une application continue. La 2-forme différentielle*

$$\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2,$$

est exacte si et seulement s'il existe une 1-forme différentielle

$$\omega = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3,$$

de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $d\lambda = \omega$ (que l'on peut noter sous la forme $\omega_f^2 = d\omega_{rot\ g}^1$). Cela revient à dire qu'il existe un champ de vecteurs $g = (g_1, g_2, g_3)$ tel que : $f = (f_1, f_2, f_3) =$ rot g. On dit alors que f dérive d'un potentiel vecteur g.

Proposition 71 *Toute forme différentielle exacte de classe $\mathcal{C}^1$ est fermée.*

Remarque 72 *La réciproque de cette proposition est fausse en général et dépend de l'ouvert U sur lequel la forme différentielle est de classe $\mathcal{C}^1$. Par exemple, si $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ alors la forme différentielle*

$$\omega = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 - \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2,$$

est fermée mais n'est pas exacte.

Définition 73 *Soit $a \in U \subset \mathbb{R}^n$. On dit que U est étoilé par rapport à a si pour tout $x \in U$, $\{a + t(x-a), 0 \leq t \leq 1\} \subset U$. Autrement dit, si le segment joignant x à a est contenu dans U.*

Exemple 74 *$\mathbb{R}^n$ est étoilé par rapport à chacun de ses points.*

Exemple 75 *La boule $B_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_j \leq r\}$, $j = 1, 2$ ou ∞, de centre $a \in \mathbb{R}^n$, de rayon $r > 0$, relative aux normes :*

$$
\begin{aligned}
\|.\|_1 &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+, x = (x_1, ..., x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \\
\|.\|_2 &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+, x = (x_1, ..., x_n) \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \\
\|.\|_\infty &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+, x = (x_1, ..., x_n) \longmapsto \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\},
\end{aligned}
$$

est étoilé par rapport à a.

Proposition 76 *(lemme ou théorème de Poincaré). La réciproque de la proposition 5.1.20, est vraie si l'ouvert U est étoilé. Autrement dit, toute forme différentielle fermée est exacte dans le voisinage d'une variété (ou encore, dans $\mathbb{R}^n$ toute forme différentielle fermée est exacte).*

Application à la résolution de certaines équations différentielles : soit l'équation

$$P(t, y) + Q(t, y)y' = 0,$$

ou

$$P(t, y)dt + Q(t, y)dy = 0,$$

avec P et Q sonr définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert D. Rappelons que la forme différentielle de degré 1, $Pdt + Qdy$, est fermée si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t}$. Elle est dite exacte si et seulement si il existe une fonction f telle que : $P = \frac{\partial f}{\partial t}$ et $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ ou ce qui revient au même $df = Pdt + Qdy$. Dès lors, en écrivant l'équation en question sous la forme $df = 0$, alors sa solution générale sera donnée par $f(t, y) =$ constante. Rappelons aussi que toute forme différentielle exacte est fermée. La réciproque est vraie si l'ouvert D esr étoilé (ou simplement connexe). Dans certains cas, même si $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial t}$, on peut rendre exacte une équation qui ne l'est pas, en la multipliant par un facteur intégrant c-à-d. une fonction $h(t, y) \neq 0$ telle que : $\frac{\partial P}{\partial t} = h.P$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = h.Q$, ou ce qui revient au même que $hPdt + hQdy$ soit exacte. Pour déterminer un facteur intégrant h, on procède comme suit :

(i) Si $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q} = \alpha(t)$, alors $h = e^{\int \alpha(t)dt}$, est un facteur intégrant.

(ii) Si $\frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \beta(y)$, alors $h = e^{\int \beta(y)dy}$, est un facteur intégrant.

(iii) On peut trouver un facteur intégrant dépendant des deux variables t et y.

Exemple 77 *L'équation suivante :*

$$2t + 3t^2y + (t^3 - 3y^2)y' = 0.$$

s'écrit sous la forme

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0,$$

où

$$P(t,y) = 2t + 3t^2y, \qquad Q(t,y) = t^3 - 3y^2,$$

d'où

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t} = 3t^2.$$

Déterminons f tel que :

$$df = Pdt + Qdy.$$

Or

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

donc

$$P = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

c-à-d.,

$$2t + 3t^2y = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad t^3 - 3y^2 = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dès lors,

$$f(t,y) = t^2 + t^3y + C(y),$$
$$t^3 - 3y^2 = \frac{\partial f}{\partial y} = t^3 + C'(y),$$
$$C'(y) = -3y^2,$$
$$C(y) = -y^3 + K, \quad K = \textit{constante}.$$

Donc

$$f(t,y) = t^2 + t^3y - y^3 + K,$$

et par conséquent,

$$df = 0 \Longrightarrow t^2 + t^3y - y^3 = \textit{constante}.$$

Exemple 78 *L'équation suivante :*

$$2y + t(2+y)y' = 0.$$

s'écrit sous la forme

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0,$$

où

$$P(t,y) = 2y, \qquad Q(t,y) = t(2+y),$$

d'où
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 \neq 2 + y = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$
L'équation en question n'est pas exacte. Pour la rendre exacte, on cherche un facteur intégrant h : comme
$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{1}{2} = \beta(y),$$
alors
$$h = e^{\int \beta(y)dy} = e^{\frac{y}{2}},$$
est un facteur intégrant et l'équation
$$hPdt + hQdy = Rdt + Sdy = 0,$$
est exacte où $R = 2ye^{\frac{y}{2}}$, $S = t(2+y)e^{\frac{y}{2}}$ *et*
$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial t} = (2+y)e^{\frac{y}{2}}.$$
Déterminons f tel que :
$$df = Rdt + Sdy = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$
On a
$$R = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad S = \frac{\partial f}{\partial y},$$
c-à-d.,
$$2ye^{\frac{y}{2}} = \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad t(2+y)e^{\frac{y}{2}} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$
Dès lors,
$$f(t,y) = 2ye^{\frac{y}{2}} + C(y),$$
$$t(2+y)e^{\frac{y}{2}} = \frac{\partial f}{\partial y} = 2te^{\frac{y}{2}} + 2tye^{\frac{y}{2}} + C'(y),$$
$$C'(y) = 0,$$
$$C(y) = K, \quad K = constante.$$
Finalement,
$$f(t,y) = 2tye^{\frac{y}{2}} + K,$$
et
$$df = 0 \Longrightarrow 2tye^{\frac{y}{2}} = constante.$$

3.5 Transformée ou transposée des formes différentielles

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ des ouverts, $g : V \longrightarrow U$ une application différentiable et
$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} f_{i_1,...,i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k},$$
une k-forme différentielle dans U.

Définition 79 *On définit une k-forme différentielle dans V (appelée le pull-back par g ou image inverse ou encore transposée de ω par g) en posant*
$$g^*\omega = \sum_{1 \leq i_1,...,i_k \leq n} (f_{i_1,...,i_k} \circ g)\, dg_{i_1} \wedge ... \wedge dg_{i_k},$$
où
$$dg_{i_l} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_{i_l}}{\partial y_j} dy_j,$$
sont des 1*-formes dans* V.

Exemple 80 *Soit* $g(y_1, y_2) = (e^{y_1}, y_1 y_2, y_1)$ *et*
$$\omega = \ln x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_3 dx_3 \wedge dx_1.$$
On montre aisément que :
$$g^*\omega = -y_1^2 dy_1 \wedge dy_2.$$

Proposition 81 *Soient ω est une k-forme différentielle dans U et λ une l-forme différentielle dans U.*

a) Si $k = l$*, alors*
$$g^*(\omega + \lambda) = g^*\omega + g^*\lambda.$$

b) On a
$$g^*(\omega \wedge \lambda) = g^*\omega \wedge g^*\lambda.$$

c) Si $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une application continue, alors*
$$g^*(h\omega) = (h \circ g) g^*\omega.$$

d) Si ω *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *dans* U *et* g *est de classe* $\mathcal{C}^2$ *dans* V*, alors*
$$g^*(d\omega) = d(g^*\omega).$$

e) Si S *est une variété différentiable de dimension* p*,* $W \subset S$ *un ouvert et si* $h : W \longrightarrow V$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$*, alors*
$$(g \circ h)^*\omega = h^*(g^*\omega).$$

3.6 Formules de Green-Riemann, Stokes-Ampère et Gauss-Ostrogradski

Un chemin γ dans $\mathbb{R}^n$ est une application, $\gamma : \mathbb{R} \supset [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, continue. Nous appelons chemin, l'application γ et non son image $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$. Le chemin γ est dit

- simple si γ est injective.
- fermé si $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- de classe $\mathcal{C}^1$ si γ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- régulier si γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a,b]$.

Soient $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ et soit ω une forme différentielle continue sur une partie $D \subset \mathbb{R}^n$ contenant l'image de γ. On définit l'intégrale de ω sur γ, comme le nombre

$$\int_\gamma \omega = \int_{[a,b]} \omega(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Les résultats de ce paragraphe sont encore vrais pour des chemins de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Rappelons qu'un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est une application $\gamma([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$ telle qu'il existe une subdivision

$$a = \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n = b,$$

de $[a,b]$ pour laquelle la restriction de γ à chaque intervalle $]\alpha_{k-1}, \alpha_k[$, $1 \leq k \leq n$, soit de classe $\mathcal{C}^1$. L'intégrale est alors définie par

$$\int_\gamma \omega = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma(]\alpha_{k-1},\alpha_k[)}.$$

(Voir quelques propriétés dans le chapitre suivant).

<u>Formule de Green-Riemann</u> : soit

$$\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

une 1-forme différentielle dans $D \subset \mathbb{R}^2$. On suppose que $P, Q \in \mathcal{C}^1$. La formule de Green-Riemann s'écrit

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

où γ est un chemin fermé simple de classe $\mathcal{C}^1$ (parcouru suivant l'orientation, sens positif c-à-d., sens trigonométrique).

<u>Formule de Stokes-Ampère (ou de la circulation)</u> : soit

$$\omega = f_1(x_1,x_2,x_3)dx_1 + f_2(x_1,x_2,x_3)dx_2 + f_3(x_1,x_2,x_3)dx_3,$$

une 1-forme différentielle dans $D \subset \mathbb{R}^3$. On suppose que $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^1$. La formule de Stokes-Ampère s'écrit

$$\int_\gamma f_1dx_1 + f_2dx_2 + f_3dx_3$$

$$=$$

$$\int\int_D \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2,$$

c-à-d., le flux du rotationnel de f à travers une surface D est égal à la circulation de f le long de γ (courbe).

Formule de Gauss-Ostrogradski (ou de la divergence) : soit

$$\omega = f_1(x_1, x_2, x_3)dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x_1, x_2, x_3)dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x_1, x_2, x_3)dx_1 \wedge dx_2,$$

une 2-forme différentielle dans $D \subset \mathbb{R}^3$. On suppose que $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^1$. La formule de Gauss-Ostrogradski s'écrit

$$\int_\gamma f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$$

$$=$$

$$\int\int\int_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

c-à-d., l'intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs dans un volume est égale au flux du champ à travers la surface fermée délimitant ce volume

3.7 Exercices

Exercice 3.7.1 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que :*

$$rot\ grad\ f = 0.$$

Exercice 3.7.2 *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que :*

$$div\ rot\ f = 0.$$

Exercice 3.7.3 *Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ dans lequel on aura fixé des coordonnées $x_1, x_2, x_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. Soient f et g des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, u et v des fonctions de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. Démontrer les formules suivantes :*

$$\begin{aligned} grad\,(fg) &= f\,grad\ g + g\ grad\ f, \\ rot\,(fu) &= grad\ f \wedge u + f\,rot\ u, \\ div\,(fu) &= \langle grad\ f,\ u\rangle + f\ div\ u, \\ div\,(u \wedge v) &= \langle rot\ u,\ v\rangle - \langle u, rot\ v\rangle. \end{aligned}$$

Exercice 3.7.4 *Soit D un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ càd. un ouvert tel que : $(x_1, x_2) \in D$ et $0 \leq t \leq 1$ entraînent $(tx_2, tx_3) \in D$, et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit ω une $2-$forme différentielle définie et continûment dérivable sur $I \times D$, telle que :*

$$dx_1 \wedge \omega = 0, \qquad d\omega = 0.$$

a) Montrer que

$$\omega = dx_1 \wedge \sum_{i=2}^{3} f_i dx_i,$$

où les f_i *sont des fonctions complexes, définies et continûment dérivables sur* $I \times D$. *Quelles conditions les* f_i *doivent-ils satisfaire ?*

b) Si $x = (x_1, x_2, x_3) \in I \times D$, *on pose*

$$h(x) = \sum_{i=2}^{3} \int_0^1 x_i f_i(x_1, tx_2, tx_3)\, dt.$$

Montrer que h *est continûment dérivable et que*

$$\omega = dx_1 \wedge dh.$$

En déduire une forme différentielle λ *de degré* 1, *définie et continûment dérivable sur* $I \times D$, *telle que* $\omega = d\lambda$.

Exercice 3.7.5 *Soit la forme différentielle*

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

Calculer ω^n.

Réponse : $\omega^n = n! dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$.

Exercice 3.7.6 *Examiner si les formes différentielles suivantes dans* $\mathbb{R}^2$ *sont exactes et, le cas échéant, en trouver les primitives (c-à-d., une fonction* f *telle que :* $\omega = df$*).*

a) $\omega = (xy \cos xy + \sin xy)\, dx + \left(x^2 \cos xy + y^2\right) dy$.

b) $\omega = \left(5x^2 y - 4xy\right) dx + \left(3x^2 - 2y\right) dy$.

Exercice 3.7.7 *Même question pour les formes différentielles suivantes dans* $\mathbb{R}^3$ *:*

a) $\omega = \left(3x^2 + 2y^2 + 3z\right) dx + (4xy + 2y - z)\, dy + (3x - y - 2)\, dz$.

b) $\omega = x^2 dy + 3xzdz$.

Exercice 3.7.8 *a) Examiner si la forme différentielle suivante dans l'ouvert* $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) : x + y \neq 0\}$ *:*

$$\omega = \frac{x + 2y}{(x + y)^2} dx + \frac{y}{(x + y)^2} dy,$$

est exacte et, le cas échéant, en trouver les primitives.

b) Même question pour les formes différentielles suivantes dans $\mathbb{R}^3$ *:*

$$\begin{aligned} \omega &= (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz, \\ \omega &= yzdx + xzdy + xydz. \end{aligned}$$

Exercice 3.7.9 *Soit la forme différentielle définie dans* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$\omega = \frac{(1-x^2)dy + 2xydx}{(1-x^2)^2 + y^2}.$$

Montrer que ω *est exacte et déterminer la fonction* f *telle que :* $\omega = df$.

Exercice 3.7.10 *Résoudre l'équation différentielle dans* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$(2xy^3+1) + (3x^2y^2 - 2y)y' = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Exercice 3.7.11 *Soit la* 1*-forme différentielle dans l'ouvert* $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *:*

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

Montrer que la forme ω *st fermée mais n'est pas exacte sur* Ω*. Trouver, si possible, un ouvert dont la différence avec* Ω *soit de mesure nulle et sur lequel* ω *soit exacte.*

Exercice 3.7.12 *Soit la* 1*-forme différentielle dans l'ouvert* $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *:*

$$\omega = \frac{x+2y}{x^2+y^2}dx + \frac{y-2x}{x^2+y^2}dy.$$

Même question que l'exercice précédent.

Exercice 3.7.13 *Soit la sphère* $S^2 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\} \subset \mathbb{R}^3$*. Montrer que la 2-forme différentielle sur* S^2*,*

$$\omega = \frac{dx_2 \wedge dx_3}{x_1} = \frac{dx_3 \wedge dx_1}{x_2} = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_3},$$

est fermée mais pas exacte.

Exercice 3.7.14 *Soient* ω *une forme différentielle et* $g^*\omega$ *sa transformée par* g *où* g *est de classe* $\mathcal{C}^2$*. Montrer que si* ω *est fermée, alors* $g^*\omega$ *est fermée. Inversement, supposons que* $g^*\omega$ *est fermée,* g *est bijective, de classe* $\mathcal{C}^2$*,* g^{-1} *de classe* $\mathcal{C}^2$*, montrer que* ω *est fermée.*

Exercice 3.7.15 *Utiliser la formule de Green-Riemann pour le calcul de l'intégrale curviligne*

$$\int_{\mathcal{C}} x^3dy - y^3dx,$$

où $\mathcal{C}$ *est le cecle (de centre* 0 *et de rayon* R*), orienté dans le sens direct.*

Exercice 3.7.16 *Calculer l'intégrale curviligne*

$$\int_{\mathcal{C}} 2(x^2+y^2)dx + (x+y)^2dy,$$

où $\mathcal{C}$ *est le bord d'un triangle* D *de sommets* $(1,1)$*,* $(2,2)$ *et* $(1,3)$*.*

Chapitre 4

Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

4.1 Généralités

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ et

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto f(z) = w,$$

une fonction complexe d'une variable complexe $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Définition 82 *On dit que la fonction f est uniforme si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de w. Sinon, elle est dite multiforme.*

Exemples de fonctions uniformes :

a) La *fonction linéaire* :

$$w = az + b, \quad (a, b \in \mathbb{C}).$$

b) La *fonction exponentielle* :

$$w = e^z.$$

Par définition, on a

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Lorsque z est réel c'est-à-dire $z = x$, nous retrouvons la fonction exponentielle $e^z = e^x$. La fonction e^z est périodique, de période $2\pi i$. En outre, on a

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

En écrivant

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta},$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg z$, on obtient la formule de Moivre

$$z^n = r^n e^{in\theta},$$

et les formules d'Euler

$$\begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{aligned}$$

c) Les *fonctions circulaires*. Par extension des définitions dans le cas réel, on pose

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}. \end{aligned}$$

Les relations entre les fonctions trigonométriques réelles s'étendent au cas complexe. Les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont périodiques, de période 2π. Elles ont les mêmes zéros que les fonctions réelles correspondantes. Signalons que les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ ne sont pas bornées.

d) Les *fonctions hyperboliques*. Nous les définirons par extension du cas réel, en posant

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \\ \sinh z &= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \end{aligned}$$

et de là

$$\begin{aligned} \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z} \\ \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z}. \end{aligned}$$

Les fonctions $\cosh z$ et $\sinh z$ sont périodiques, de période $2\pi i$ et sont, respectivement, paires et impaires. Les relations entre les fonctions hyperboliques réelles s'étendent au cas complexe.

Remarque 83 *On peut définir les fonctions* $e^z, \cos z, \sin z, \cosh z, \sinh z$*, par leurs développements en série entière qui convergent dans tout le plan complexe :*

$$\begin{aligned}
e^z &= 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\\
\cos z &= 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\\
\sin z &= z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\\
\cosh z &= 1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\\
\sinh z &= z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots
\end{aligned}$$

Exemples de "fonctions" multiformes :

a) La *fonction racine carrée* :

$$w=\sqrt{z}.$$

Considérons

$$f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C},\ z\longmapsto w:w^2=z.$$

Il est clair que f n'est pas une fonction : à chaque valeur de $z\neq 0$, correspond deux valeurs de w. Lorsque l'on tourne autour du point $z=0$, par exemple le long d'un cercle centré en 0, alors w change de signe. En effet, soit

$$z=re^{i\theta},\ w=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}},$$

où $r=|z|$ et $\theta=\arg z$. On veut tourner autour de $z=0$, donc r sera petit et θ variera entre 0 et 2π. Si $\theta=0$, alors

$$w=\sqrt{r}e^0=\sqrt{r}.$$

Si $\theta=2\pi$, alors

$$w=\sqrt{r}e^{\pi i}=-\sqrt{r}.$$

On peut utiliser le fait que l'argument θ d'un nombre complexe z est défini à $2k\pi$ près. On pose $\theta=\theta_0+2k\pi$ et dès lors la fonction $w=\sqrt{z}$ prend deux valeurs distinctes w_1 et w_2 pour chaque valeur de $z\neq 0$:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt{r}e^{i\frac{\theta_0}{2}},\\
w_2 &= \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta_0}{2}+\pi)}=-w_1.
\end{aligned}$$

On dit que la fonction $w=\sqrt{z}$ a deux branches ou déterminations. Donc si z décrit un cercle entourant 0, la fonction $\sqrt{z}$ est multiforme et passe de manière continue d'une branche à l'autre ; de $w=\sqrt{r}$ à $w=-\sqrt{r}$. Si on refait de nouveau un tour complet c'est-à-dire de $\theta=2\pi$ à $\theta=4\pi$, alors on obtient $\sqrt{r}$ c'est-à-dire la valeur de départ. On dit que le point $z = 0$ est un point de branchement ou de ramification de la fonction $w = \sqrt{z}$. A distance finie, le point $z = 0$ est le seul point de branchement de $\sqrt{z}$, car la considération de tout cercle autour d'un point $z \neq 0$ ne conduit à aucun changement de branches de $\sqrt{z}$. On peut rendre la fonction $\sqrt{z}$ uniforme en faisant une coupure le long de la demi droite issue de $z = 0$.

b) *Logarithme complexe*. Soit $z \in \mathbb{C}$. Sous forme trigonométrique z s'écrit sous la forme

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r > 0$$

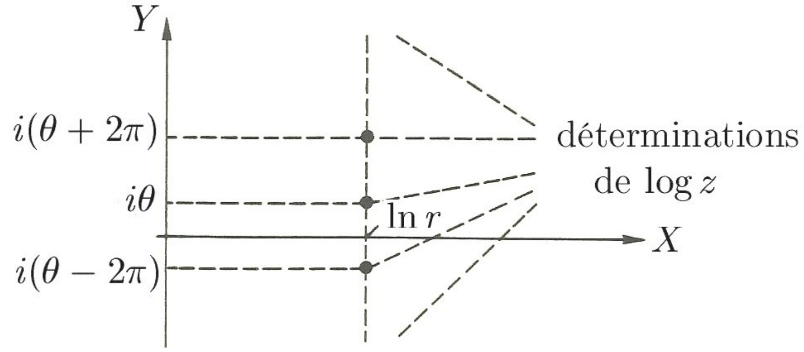
Posons $Z = X + iY$. L'équation $e^Z = z$, s'écrit $e^X e^{iY} = re^{i\theta}$ ou sous la forme

$$e^X(\cos Y + i\sin Y) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

D'où, $e^X = r$ et $Y = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dès lors,

$$Z = \log z = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

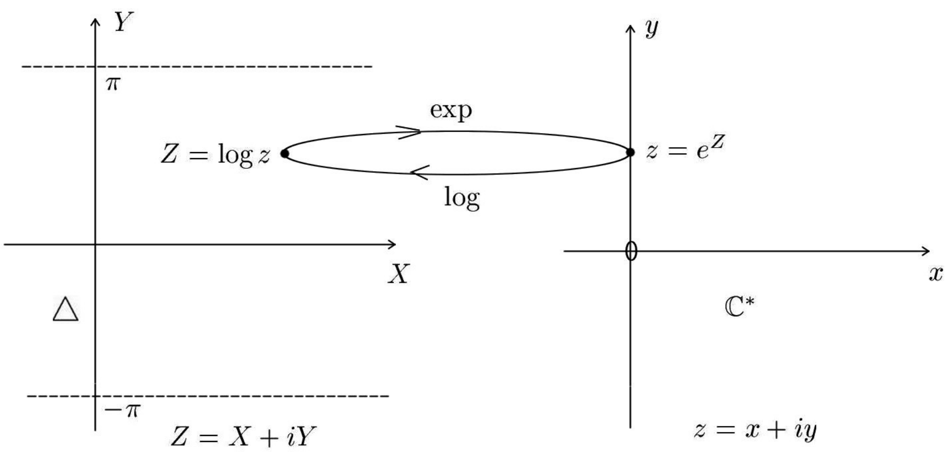
La fonction $\log z$ est définie comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle. On montre que la fonction $\log z$ est multiforme, à une infinité de déterminations.



La détermination principale de $\log z$ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ par

$$\log z = \ln r + i\theta, \qquad -\pi \leq \theta < \pi.$$

La détermination principale du logarithme est une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur la bande horizontale $\triangle$ du plan complexe, définie par $Z = X + iY \in \triangle \Longleftrightarrow -\pi \leq Y < \pi$.



Au lieu de choisir $\theta \in [-\pi, \pi[$, on peut prendre θ dans un intervalle quelconque semi-ouvert à droite ou à gauche et d'amplitude 2π, c-à-d., $[a, a+2\pi[$ ou $]a, a+2\pi]$. Soit $Z = X + iY \in \triangle$. On a $e^Z = e^X(\cos Y + i \sin Y)$, le module de e^Z est donc $r = e^X$ et $\theta = Y$ est l'argument satisfaisant à $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Dès lors,

$$\log e^Z = \ln r + i\theta = \ln e^X + iY = X + iY = Z,$$

où e^X désigne l'exponentielle réelle. Ainsi une détermination quelconque du logarithme, notée

$$\log_a : \mathbb{C}^* \longrightarrow \{z : \text{ Im } z \in [a, a+2\pi[\},$$

est l'inverse de la fonction exponentielle

$$\exp : \{z : \text{ Im } z \in [a, a+2\pi[\} \longrightarrow \mathbb{C}^*, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Une telle détermination prolonge la fonction logarithme réelle (définie sur $\mathbb{R}_+^*$) avec la condition $0 \in [a, a+2\pi[$ car si $z \in \mathbb{R}_+^*$, $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$ avec $\theta = 0$ comme seule valeur. Notons que l'expression $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$ ne sera pas toujours vraie si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ est toujours vraie. En fait, on a

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \pmod{2\pi i},$$

il suffit d'appliquer la formule : $\log z = \ln r + i\theta$, $-\pi \leq \theta < \pi$ car si on n'a pas $-\pi \leq \theta_1 + \theta_2 < \pi$ la formule en question n'est vraie qu'à $2\pi i$ près. La formule ci-dessus fournit également les logarithmes des nombres strictement négatifs. Soit, par exemple, $z = -e$. On a $r = e$, $\theta = -\pi$ et donc $\ln(-e) = 1 - \pi i$.

c) La *fonction puissance* z^α ($\alpha \in \mathbb{C}$). Elle est définie par

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

La fonction z^α est :
- uniforme si α est entier.
- multiforme, à q déterminations, si $\alpha = \pm\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers positifs premiers entre eux.
- multiforme, à une infinité de déterminations, si $\alpha = a + ib$ (a et b non nuls).

Soit

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \; z \longmapsto f(z),$$

une fonction uniforme et $z_0 \in \Omega$.

Définition 84 *On dit que $f(z)$ tend vers une limite l lorsque z tend vers z_0 et on écrit*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l,$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique. Les propriétés classiques concernant la limite d'une somme, d'un produit ou d'un rapport de deux fonctions, s'étendent du cas réel au cas complexe.

Remarque 85 *La fonction $f(z)$ tend vers sa limite indépendamment de la manière dont le point z tend vers z_0. En d'autres termes, si la limite existe, alors lorsque z tend vers z_0 suivant une loi quelconque (par exemple suivant une courbe), $f(z)$ tend vers cette limite.*

Le point à l'infini ∞ est défini par l'image de l'origine par la transformation $t = \frac{1}{z}$. Par définition :

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = l & \text{si} & \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : |z| > \delta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon. \\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty & \text{si} & \forall\varepsilon > 0, \exists\delta 0 : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > \varepsilon. \end{array}$$

Notons que si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l$, alors $\lim\limits_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \bar{l}$. Il en résulte que

$$\lim_{z\to z_0} Ref\,(z) = Re\,(l)\,, \qquad \lim_{z\to z_0} Imf\,(z) = Im\,(l)\,.$$

La réciproque est également vraie.

Définition 86 *Soit z_0 un point où la fonction f prend la valeur $f\,(z_0)$. On dit que $f(z)$ est continue en z_0 si et seulement si*

$$\lim_{z\to z_0} f\,(z) = f\,(z_0)\,.$$

La fonction $f\,(z)$ est continue dans Ω si et seulement si elle est continue en tout point de Ω.

Les propriétés classiques concernant la somme, le produit et le rapport de fonctions continues s'étendent du cas réel au cas complexe.

4.2 Fonctions holomorphes, fonctions analytiques

Définition 87 *On dit que $f\,(z)$ est dérivable au point $z \in \Omega$ si et seulement si*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\,(z+h) - f\,(z)}{h} = f'\,(z)\,,$$

existe, indépendamment de la façon dont h tend vers 0 dans $\mathbb{C}$. Cette limite, notée $f'\,(z)$, est appelée dérivée de f en z.

Définition 88 *La fonction f est différentiable en z si et seulement si il existe un nombre complexe $f'\,(z)$ tel que*

$$\forall h \in \mathbb{C}, \quad f\,(z+h) = f\,(z) + f'\,(z) \cdot h + o\,(|h|)\,.$$

Les règles de dérivation (somme, produit, quotient) sont les mêmes que celles utilisées en analyse réelle.

Proposition 89 *La fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en z si et seulement si elle est différentiable en z et $f'(z)$ a la même signification dans les deux définitions précédentes.*

Définition 90 *La fonction f est dite holomorphe dans Ω si elle est dérivable en tout point de Ω.*

Posons $z = x + iy$ et soit

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

où $u(x, y) = Ref(z)$ et $v(x, y) = Imf(z)$, sont des fonctions réelles de deux variables réelles x et y.

Théorème 91 *La fonction $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe dans Ω si et seulement si u et v sont différentiables dans Ω et satisfont aux conditions (ou équations) de Cauchy-Riemann :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En outre, on a

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Remarque 92 *Si u et v ne sont pas différentiables, alors les conditions de Cauchy-Riemann sont nécessaires mais pas suffisantes.*

Proposition 93 *Considérons les deux opérateurs*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

En outre, on a

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

Remarque 94 *On désigne par $\mathcal{H}(\Omega)$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On montre que : $\mathcal{H}(\Omega)$ est un espace vectoriel, un anneau (car stable pour la somme et le produit), une sous-algèbre de $\mathcal{C}^1(\Omega)$ et un sous-module fermé de $\mathcal{C}^1(\Omega)$. La composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe, l'application réciproque d'un difféomorphisme holomorphe est holomorphe et si une fonction holomorphe possède un logarithme alors celui-ci est holomorphe.*

4.3 Intégration des fonctions holomorphes, théorèmes de Cauchy

Définition 95 *On appelle chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux une application continue*

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},$$

définie sur un intervalle femé $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe une subdivision :

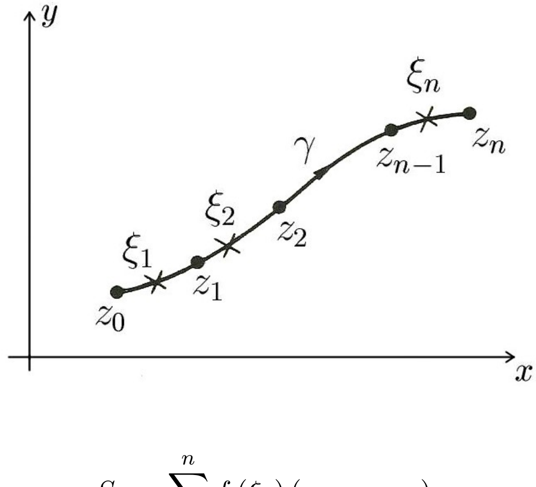
$$a = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = b,$$

de $[a,b]$ pour laquelle la restriction de γ à chaque intervalle $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que le chemin γ est fermé (ou un circuit, ou encore un lacet) si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 96 *Soient $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On appelle intégrale de f le long de γ l'expression*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Remarque 97 *Une autre façon de définir l'intégrale ci-dessus, est la suivante : partageons γ en n morceaux, au moyen des points $z_0, z_1, ..., z_n$. De plus, choisissons un point ξ_k sur chaque arc joignant z_{k-1} à z_k $(1 \leq k \leq n)$.*



On définit la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

La limite obtenue en faisant croître le nombre n de subdivisions, de façon que $\max_{1\leq k\leq n}|z_k - z_{k-1}|$ *tende vers zéro, est appelée intégrale curviligne de* $f(z)$ *le long de* γ *et est notée* $\int_\gamma f(z)dz$.

Proposition 98 *Si* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *et* $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, *alors*

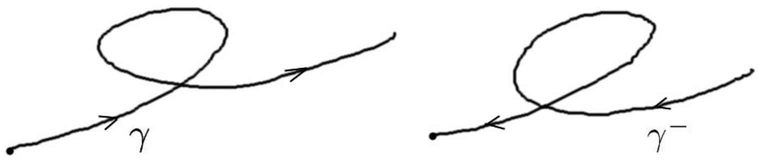
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int_\gamma (u(x,y)dy + v(x,y)dx).$$

La formule ci dessus, est une combinaison linéaire d'intégrales curvilignes réelles. Les propriétés habituelles de ces dernières sont donc conservées.

Si on change le sens du parcours du chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, l'intégrale change de signe

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)dz,$$

où $\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$, $t \in [a,b]$; le chemin γ^- se déduit de γ par un changement d'orientation :



Si le chemin γ admet la représentation paramétrique

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),$$

avec $a < t < b$, alors on a

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\left[u(\varphi(t),\psi(t)) + iv(\varphi(t),\psi(t))\right]\left(\varphi'(t) + i\psi'(t)\right)dt.$$

Proposition 99 *Si* f *est holomorphe, alors*

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

où $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *est un chemin* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux.*

Proposition 100 *(formules de majoration). Soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction continue et* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *un chemin* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux. Alors*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt,$$

et

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML,$$

où M *est une borne supérieure de* $|f(z)|$ *sur* γ *et* $L = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ *est la longueur du chemin* γ.

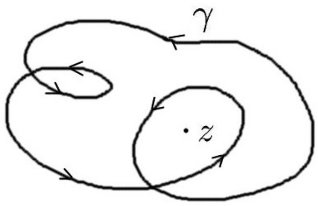
Théorème 101 *Soient $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé et Δ le complémentaire de l'image de γ, c'est-à-dire $\Delta = I^c$ où $I = \{z : \exists t \in [a,b],\ z = \gamma(t)\}$. Pour tout $z \in \Delta$, on a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = ind_\gamma(z),$$

où $ind_\gamma(z)$ est un entier dépendant du point z. Il est égal au nombre de tours que fait γ autour de z. La fonction $z \longmapsto ind_\gamma(z)$ est constante sur toute partie connexe de Δ et s'annule sur l'unique composante connexe non bornée de Δ.

Définition 102 *On dit que $ind_\gamma(z)$ est l'indice de γ par rapport à z.*

Pour γ ci-dessous, on a $ind_\gamma(z) = 2$:



Exemple 103 *Soit γ le cercle (orienté positivement) de centre a et de rayon r, défini par*

$$\gamma(t) = a + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Le complémentaire du cercle $|z-a| = r$ (support de γ) se divise en deux parties : le disque $|z - a < r$ et la couronne $|z-a| > r$. D'après le théorème précédent, l'indice $ind_\gamma(a)$ est constant dans le disque et il suffit de le calculer au point a,

$$ind_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{re^{it}}dt = 1.$$

Par ailleurs, dans la couronne, l'indice est nul. Par conséquent, on a

$$ind_\gamma(a) = \begin{cases} 1 & si\ |z-a| < r \\ 0 & si\ |z-a| > r \end{cases}$$

Définition 104 *Soient*

$$\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto \gamma_1(t),$$

$$\gamma_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto \gamma_2(t),$$

deux chemins définis sur le même intervalle $[a,b]$, ayant mêmes extrémités $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ et $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. On dit que γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\Omega \subset \mathbb{C}$ s'il existe une application continue

$$\varphi : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow \Omega,\ \ (t,s) \longmapsto \varphi(t,s),$$

telle que :

$$\begin{aligned}
\varphi(t,0) &= \gamma_1(t), \ \forall t \in [a,b], \\
\varphi(t,1) &= \gamma_2(t), \ \forall t \in [a,b], \\
\varphi(a,s) &= \gamma_1(a) = \gamma_2(a), \ \forall s \in [0,1], \\
\varphi(b,s) &= \gamma_1(b) = \gamma_2(b), \ \forall s \in [0,1].
\end{aligned}$$

L'application φ est dite une homotopie entre γ_1 et γ_2. Si γ_1 et γ_2 sont fermés, alors les deux dernières conditions seront remplacées par celle-ci :

$$\varphi(a,s) = \varphi(b,s), \ \forall s \in [0,1].$$

Intuitivement, γ_1 et γ_2 sont homotopes dans Ω si on peut déformer continûment, tout en restant dans Ω, l'un des chemins en l'autre.

Définition 105 *Un domaine est un ensemble ouvert connexe.*

Définition 106 *On dit qu'un domaine Ω est simplement connexe si tout chemin fermé γ inclus dans Ω est homotope à un point. Autrement dit, si tout chemin fermé γ inclus dans Ω peut être réduit à un point par déformation continue, sans quitter Ω.*

Donc un ouvert Ω est simplement connexe s'il est connexe ainsi que son complémentaire. De façon imagée, un ouvert est simplement connexe s'il est connexe et sans trou.

Exemple 107 *Un disque est simplement connexe. Par contre, le disque privé de son centre n'est pas simplement connexe. Une couronne circulaire n'est pas simplement connexe. Le plan $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ est simplement connexe. Un ouvert étoilé*[1] *est simplement connexe.*

Théorème 108 *(Cauchy). a) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ et soit γ un chemin fermé contenu dans Ω. Alors*

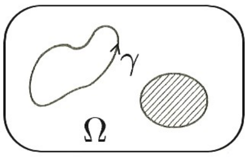
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

b) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, sauf en $z_1, z_2, ..., z_k$ et soit γ un chemin fermé contenu dans Ω entourant tous ces points. Si γ_j $(1 \leq j \leq k)$ est un chemin fermé contenu dans le domaine intérieur à γ entourant z_j et n'entourant pas les autres z_l $(l \neq j)$, alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

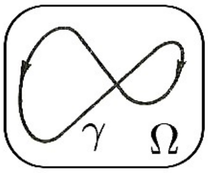
1. Un ouvert Ω est dit étoilé par rapport à un point a si pour tout $x \in \Omega$, le segment $[a,x]$ est inclus dans Ω.

Remarques 109 *a) Si le domaine Ω n'est pas simplement connexe et si γ est homotope à zéro, alors on peut trouver un domaine simplement connexe $\Delta \subset \Omega$ contenant γ et le résultat reste inchangé.*



b) Si γ a des points doubles alors on décompose le chemin γ de telle façon qu'il n'y plus d'ambiguité et dès lors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$



c) Dans le langage des formes différentielles, le théorème de Cauchy s'énonce comme suit : si $f(z)$ est holomorphe dans Ω, alors la forme différentielle $f(z)dz$ est fermée dans Ω.

Nous allons étudier quelques conséquences du théorème précédent.

Propriété 110 *Soit γ un chemin d'extrémités a et b, et contenu dans Ω. Alors, l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend que des extrémités a et b de γ.*

On pose

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z)dz.$$

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans Ω. D'après la propriété précédente, on peut définir dans Ω une fonction uniforme (définie à une constante près, dépendant du choix du point z_0),

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta,\ z_0 \in \Omega.$$

Proposition 111 *$F(z)$ est holomorphe dans Ω et on a $F'(z) = f(z)$, sur Ω.*

Définition 112 *La fonction $F(z)$ est dite primitive de $f(z)$.*

Remarques 113 *a) Dans la proposition précédente, on suppose que f est holomorphe mais dans la démonstration seule la propriété de continuité de f sera utilisée.*

b) On montre de façon similaire que si Ω est un ouvert étoilé par rapport à un de ses points, alors toute fonction holomorphe dans Ω y admet une primitive holomorphe. Ceci correspond au théorème de Poincaré : toute forme différentielle fermée dans un ouvert étoilé y est exacte.

c) Notons que si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$.

d) La formule d'intégration par partie ainsi que celle du changement de variables restent valables.

Théorème 114 *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine Ω. Soit γ un chemin fermé contenu dans Ω et soit Δ le domaine simplement connexe ayant γ pour frontière. Alors*

a) Pour tout $z \in \Delta$, on a la formule intégrale de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

b) La fonction f est indéfiniment dérivable dans Δ et on a, pour tout $z \in \Delta$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta.$$

(γ étant parcouru dans le sens positif, c-à-d., anti-horlogique).

Le théorème suivant n'est rien d'autre que la réciproque du théorème de Cauchy (ou plus précisément une réciproque du théorème de Goursat qui dit que si $f(z)$ est holomorphe dans Ω, alors $f'(z)$ est continue dans Ω).

Théorème 115 *(Moréra). Si $f(z)$ est continue dans un domaine simplement connexe Ω et si*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

pour tout chemin fermé γ de Ω, alors $f(z)$ est holomorphe dans Ω.

Définition 116 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est analytique au point $z_0 \in \Omega$ si elle admet un développement en série entière*[2] *dont le rayon de convergence r n'est pas nul. On dit que f est analytique sur Ω si elle l'est en tout point $z_0 \in \Omega$. On écrit*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \ z \in \Omega,$$

où $|z - z_0| < r$ et (a_k) est une suite de nombres complexes.

2. Pour un rappel sur les propriétés des séries entières, voir appendice 9.1

Théorème 117 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable complexe z. Alors la fonction f est analytique dans Ω si et seulement si elle est holomorphe dans Ω.*

Remarque 118 *La réciproque du théorème précédent est fausse en général pour les fonctions réelles. En effet, une fonction f possédant des dérivées de tout ordre en z_0, n'est pas nécessairement égale à la série entière*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k,$$

correspondante. Il suffit de considérer la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On vérifie aisément qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais qu'elle n'est pas égale à la série entière correspondante.

4.4 Séries de Laurent, points singuliers

Théorème 119 *Soit $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans la couronne ouverte*

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : R_1 <| z - z_0 |< R_2\}.$$

Alors, la fonction f peut être représentée dans Δ de façon unique par une série de la forme

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \tag{4.4.1}$$

avec

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{4.4.2}$$

où γ est un chemin fermé entourant z_0 et contenu dans la couronne. En outre, cette série converge absolument vers f dans Δ et uniformément dans toute couronne fermée contenue dans Δ.

Définition 120 *La série (4.4.1) avec les coefficients donnés par (4.4.2) s'appelle série de Laurent de f autour du point z_0.*

Ecrivons la série (4.4.1) sous la forme

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{(*)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z-z_0)^{-k}}_{(**)}.$$

Définition 121 *La série* $(*)$ *est appelée partie régulière (ou holomorphe) et la série* $(**)$ *est dite partie principale de la série de Laurent (4.4.1).*

Classification des points : Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, sauf peut-être en un certain nombre de points.

a) Un point $z_0 \in \Omega$ est un point régulier pour $f(z)$ si

$$a_{-k} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Dans ce cas, la série de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

est une série de Taylor tout simplement.

b) Tout point qui n'est pas régulier est dit singulier ; on dit que $f(z)$ possède une singularité en tel point. En ce point, la fonction $f(z)$ n'est pas dérivable.

c) Un point singulier est dit isolé s'il existe un voisinage de ce point ne contenant pas d'autres points singuliers. Dans la cas contraire il est dit non-isolé. Ainsi, la fonction $\coth \frac{1}{z}$, qui devient infinie pour $z = \frac{1}{k\pi}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ possède une singularité non isolé en $z = 0$.

d) On distingue deux types de singularités isolées :

- Le point z_0 est un pôle d'ordre $m > 0$, lorsque

$$a_{-m} \neq 0 \text{ et } a_{-(m+l)} = 0, \ \forall l \in \mathbb{N}^* : \ f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Autrement dit, si $f(z)$ s'écrit sous la forme

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

avec $g(z)$ holomorphe au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$. Lorsque z_0 est un pôle de $f(z)$, on montre aisément que $f(z)$ n'est pas bornée au voisinage de z_0, mais $\frac{1}{f(z)}$ est bornée en z_0.

- Le point z_0 est un point singulier essentiel s'il existe une infinité de coefficients a_{-k} non nuls. Autrement dit si les fonctions $f(z)$ et $\frac{1}{f(z)}$ ne seront pas bornées au voisinage de z_0.

Notes pratiques : Nous avons vu précédemment que les coefficients a_k du développement de Laurent, sont donnés par les intégrales

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \ k \in \mathbb{Z},$$

où γ est un chemin entourant z_0 et contenu dans la couronne

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

En pratique, pour développer une fonction en série de Laurent, on évite en général le calcul de ces intégrales. Le recours à des procédés indirects est justifié par l'unicité du développement de f en série de Laurent autour de z_0. L'unicité garantit qu'un développement de f en série de puissances $(z-z_0)^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est forcément le développement de Laurent, quel que soit le procédé utilisé pour l'obtenir.

a) On utilisera au maximum les développements en série entière. On se souviendra des deux propriétés suivantes :
(i) Le produit de deux séries entières A et B, de coefficients a_k et b_k, est une série entière C. Les coefficients c_k de C s'obtiennent par la formule

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

(ii) Si A est une série entière dont le terme indépendant n'est pas nul, $\frac{1}{A}$ est une série entière B. Les coefficients de B s'obtiennent le plus facilement par la méthode des coefficients indéterminés. Considérons par exemple le cas où z_0 est un pôle d'ordre m pour f. Soit g le prolongement holomorphe de $(z-z_0)^m f(z)$ défini sur le cercle de centre z_0 et de rayon r. On a, sur ce même cercle privé de son centre,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}.$$

Pour obtenir le développement de Laurent de f, il suffira donc de multiplier chaque terme du développement de $g(z)$ par $1/(z-z_0)^m$. Habituellement la fonction holomorphe $g(z)$ se présente sous la forme du quotient de deux fonctions holomorphes P et Q qui ne s'annulent pas au point z_0. Dans ce cas, on calculera d'abord la série de Taylor représentant $1/Q$ (utiliser la propriété (ii)), puis on multipliera la série obtenue par le développement en série de P (utiliser la propriété (i)).

b) Il est souvent utile d'avoir recours à la série géométrique et ses puissances. On se souviendra que

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots, \quad |u| < 1$$

et que les puissances de $1/(1-u)$ peuvent s'obtenir par dérivation :

$$\frac{1}{(1-u)^{k+1}} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-u}\right)^{(k)}.$$

En particulier,

$$\frac{1}{(1-u)^2} = \left(\frac{1}{1-u}\right)' = 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-u)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}\right)'' = 1 + 3u + 6u^2 + 10u^3 + \cdots$$

4.5 Fonctions méromorphes, théorème des résidus

Définition 122 *Une fonction $f(z)$ est dite méromorphe si ses seules singularités sont des pôles.*

On en déduit que sur tout domaine borné, une fonction méromorphe ne peut avoir qu'un nombre fini de pôles. Une fonction rationnelle constitue un cas particulier de fonction méromorphe. Par exemple la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)^2},$$

qui est holomorphe en tout point à distance finie sauf en $z = -1$ (pôle simple) et $z = -2$ (pôle double) est une fonction méromorphe.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, privé du point z_0.

Définition 123 *On appelle résidu de f au point z_0, le nombre*

$$\textit{Rés}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz,$$

c'est-à-dire le coefficient de $1/(z-z_0)$ dans le développement en série de Laurent de f au voisinage de z_0.

Le résidu de $f(z)$ à l'infini est

$$\text{Rés}(f, \infty) = \text{Rés}\left(-\frac{1}{u^2}f\left(\frac{1}{u}\right), 0\right),$$

où $u = 1/z$. En effet, lorsqu'on effectue le changement de variable $z \longmapsto u = 1/z$, le point $z = \infty$ se transforme en $u = 0$, tandis que l'intégrale $\int f(z)dz$ devient $\int -\frac{1}{u^2}f(\frac{1}{u})du$.

Calcul des résidus : a) Lorsque z_0 est un pôle d'ordre m de $f(z)$, alors

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

b) Lorsque z_0 est un pôle simple de la fonction

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

avec $P(z_0) \neq 0$ et $Q(z_0) = 0$, alors

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \text{ si } Q'(z_0) \neq 0.$$

c) Lorsque z_0 est un point singulier essentiel de $f(z)$, le résidu s'obtient en développant $f(z)$ en série de Laurent autour de z_0.

Théorème 124 *(des résidus). Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine, $z_1, z_{2,...}, z_k \in \Omega$ et*

$$f : \Omega \backslash \{z_1, z_{2,...}, z_k\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

une fonction holomorphe. Alors

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Rés(f, z_j),$$

où γ est un chemin fermé contenu dans Ω à l'intérieur duquel sont contenus tous les z_j.

D'autres versions du théorème des résidus existent, notamment celle avec indices :

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{ind}_\gamma(z_k)\text{Rés}(f, z_j),$$

où $\text{ind}_\gamma(z_j)$ est l'indice de γ par rapport à z_j.

4.6 Applications du théorème des résidus au calcul d'intégrales

Le théorème des résidus est particulièrement utile dans le calcul de certaines intégrales réelles définies. Le principe de la méthode est le suivant : soit à calculer l'intégrale réelle

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

On associe à $f(x)$ la fonction $g(z)$ et un chemin fermé γ tels que l'on puisse appliquer le théorème des résidus à l'intégrale de $g(z)$ sur γ et tels que sur une partie $\mathcal{C}$ de γ on ait

$$\int_\mathcal{C} g(z)dz = \int_a^b f(x)dx.$$

Si le calcul de l'intégrale de $g(z)$ sur la partie complémentaire de $\mathcal{C}$ est possible, le calcul de I est ainsi ramené à celui d'une intégrale dans le plan complexe.

Pour le calcul des intégrales réelles, on fait souvent appel aux lemmes de Jordan suivants :

Lemme 125 *Soit f une fonction continue sur le secteur défini par $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi$. Si $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, alors*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0,$$

où γ_r est l'arc de cercle de rayon compris entre les angles θ_1 et θ_2.

Lemme 126 *Soit f une fonction continue sur le secteur défini par $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi$. Si $\lim_{|z|\to 0} zf(z) = 0$, alors*

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0,$$

où γ_r est l'arc de cercle de rayon compris entre les angles θ_1 et θ_2.

Lemme 127 *Soit f une fonction continue sur le secteur défini par $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$. Si $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, alors*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)e^{imz}dz = 0, \quad m > 0$$

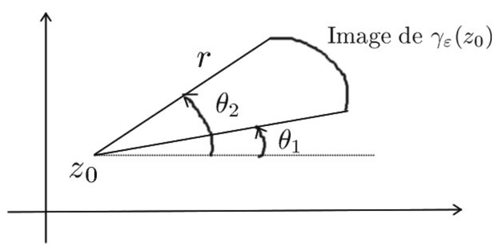
où γ_r est l'arc de cercle de rayon compris entre les angles θ_1 et θ_2.

Le même resultat reste valable pour le cas $m < 0$ à condition de considérer l'arc de cercle dans le demi plan inférieur Im $z < 0$.

Soient $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ et

$$\gamma_\varepsilon : [\theta_1, \theta_2] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \theta \longmapsto z_0 + \varepsilon e^{i\theta},$$

un chemin dont l'image est un arc de cercle.



Lemme 128 *(du petit cercle). Si f est holomorphe sur $\gamma_\varepsilon(z_0)$ pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et possèdant un pôle simple en z_0, alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon(z_0)} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)Rés(f, z_0),$$

où $Rés(f, z_0) = \lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ \theta_1\leq \arg z\leq\theta_2}} (z - z_0)f(z)$ est le résidu de f en z_0.

Lemme 129 *(du grand cercle). Si f est holomorphe sur $\gamma_r(z_0)$ pour r assez grand et possèdant un pôle simple en z_0, alors*

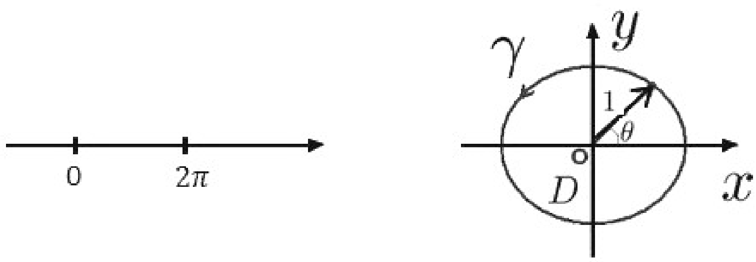
$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r(z_0)} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)Rés(f, z_0),$$

où $Rés(f, z_0) = \lim\limits_{\substack{|z|\to +\infty\\ \theta_1\leq \arg z\leq\theta_2}} (z - z_0)f(z)$.

a) Intégrales ne faisant pas appel à des fonctions multiformes.

$$\boxed{\underline{\textbf{Type 1}} : \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta}$$

où f est une fonction rationnelle en $\cos\theta$ et $\sin\theta$ dont le dénominateur ne s'annule pas dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. On effectue le changement de variable $z = e^{i\theta}$, qui transforme $[0, 2\pi]$ en le bord γ du disque unité du plan complexe.



On utilise les formules

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \end{aligned}$$

et $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, ou plus généralement, les formules

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \\ \sin n\theta &= \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}, \end{aligned}$$

et

$$dz = ine^{in\theta}d\theta = inzd\theta,$$

et l'intégrale en question devient

$$\int_\gamma f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz},$$

γ étant le cercle unité. En appliquant le théorème des résidus, on obtient

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i \sum \text{Rés}\left(f(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i})\frac{1}{iz},\ z_j \in int\ D\right).$$

Comme D est le disque unité, alors $z_j \in int\ D \Leftrightarrow |z_j| < 1$, et

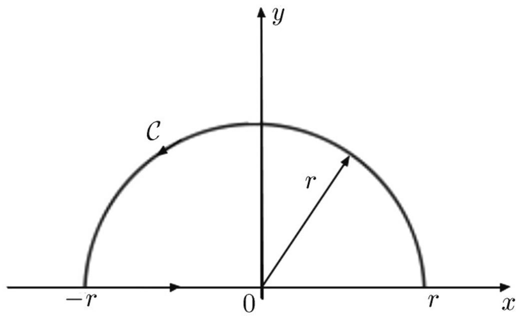
$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i \sum \text{Rés}\left(f(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i})\frac{1}{iz},\ |z_j| < 1\right).$$

$$\boxed{\underline{\textbf{Type 2 :}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx}$$

où

- P et Q sont des polynômes.
- $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\deg Q - \deg P \geq 2$.

Les conditions imposées sont nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale converge. On considère l'intégrale $\int_\gamma \frac{P(z)}{Q(z)} dz$, où $\gamma = \mathcal{C} \cup [-r, +r]$ est le chemin fermé suivant :



et on fait tendre r vers l'infini. Si $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est paire, on peut utiliser cette méthode pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$. En appliquant le théorème des résidus et le lemme de Jordan, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum \text{Rés} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right),$$

où la somme est étendue aux pôles z_j de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ situés dans le demi-plan supérieur du plan complexe.

Il faut bien noter que $\lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, peut exister (valeur principale de Cauchy) sans que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ converge comme le montre l'exemple suivant : $\lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \sin x dx = 0$, mais l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ diverge. Dès lors pour que l'on puisse avoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

il faut que l'intégrale en question converge.

$$\boxed{\underline{\textbf{Type 3 :}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{imx} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos mx dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin mx dx}$$

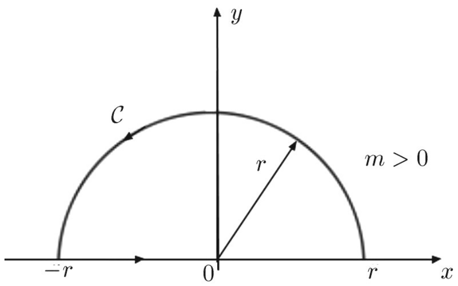
où

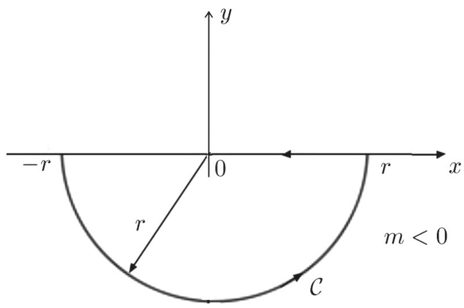
- ces intégrales convergent.
- $m > 0$ (resp. $m < 0$).
- f holmorphe dans le demi-plan fermé supérieur (resp. inférieur) sauf en un nombre fini de pôles, les pôles réels étant simples.

• $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, Im $z > 0$ (resp. Im $z < 0$).
Nous allons distinguer deux cas :
1^{er} cas : Les points singuliers de f ne sont pas sur l'axe réel. Notons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx.$$

Le calcul de la première intégrale donne donc les deux autres (puisque celles-ci sont des nombres réels). On calcule $\int_\gamma f(z)e^{imz}dz$, où $\gamma = \mathcal{C}\cup[-r,r]$:





et on fait tendre r vers l'infini. En appliquant le théorème des résidus et le lemme de Jordan, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx = \begin{cases} 2\pi i\sum \text{résidus dans le demi-plan supérieur de } f(z)e^{imz} \text{ si } m>0 \\ -2\pi i\sum \text{résidus dans le demi-plan inférieur de } f(z)e^{imz} \text{ si } m<0 \end{cases}$$

D'où,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx = \text{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx = \text{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx.$$

$2^{\text{ème}}$ cas : La fonction $f(z)$ peut posséder des points singuliers (pôles simples) sur l'axe réel. Dans ce cas, on raisonne de manière analogue au cas précédent en intégrant la fonction $f(z)e^{imz}$ sur des chemins fermés modifiés de façon à ne pas contenir ces singularités.

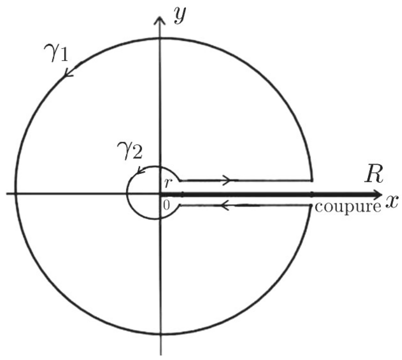
b) Intégrales faisant appel à des fonctions multiformes.

Le principe de la méthode est identique à celui du paragraphe a), à ceci près que les intégrants multiformes doivent être uniformisés au moyen d'une coupure adéquate. Les contours d'intégration ne pouvant pas traverser ces coupures, l'intégrant sera déterminé univoquement par une de ses déterminations le long de ces contours.

$$\boxed{\textbf{Type I :} \int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx, \quad 0<\alpha<1}$$

où f est holomorphe sauf en un nombre fini de points qui ne sont pas sur le demi-axe réel $x > 0$. Supposons que f décroît plus vite à l'infini que $\frac{1}{x^2}$, ce qui assure la convergence de l'intégrale en question. On calcule $\int_\gamma z^\alpha f(z)dz$, où

$$\gamma = \gamma_1 \cup [R, r] \cup \gamma_2 \cup [r, R],$$



Le point $z = 0$ est un point de branchement de l'intégrant. La coupure rend celui-ci uniforme sur γ. On choisira la détermination de l'intégrant telle que :

$$z^\alpha = \begin{cases} x^\alpha \text{ sur le bord supérieur de la coupure} \\ x^\alpha e^{2\pi i\alpha} \text{ sur le bord inférieur de la coupure} \end{cases}$$

On applique le théorème des résidus :

$$\begin{aligned} \int_\gamma z^\alpha f(z)dz &= \int_{\gamma_1} z^\alpha f(z)dz + \int_R^r e^{2\pi i\alpha} x^\alpha f(x)dx \\ &\quad + \int_{\gamma_2^-} z^\alpha f(z)dz + \int_r^R x^\alpha f(x)dx, \\ &= 2\pi i \sum \text{Résidus aux points singuliers de la détermination} \\ &\qquad \text{choisie pour } z^\alpha f(z). \end{aligned}$$

Le reste consiste à calculer les limites des intégrales sur γ_1 et γ_2 quand $R \to \infty$ et $r \to 0$.

$$\boxed{\underline{\textbf{Type II}} \textbf{ :} \int_0^{+\infty} f(x) \log x dx}$$

où f est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôles sur le demi-axe $x \geq 0$. On suppose que f décroît plus vite à l'infini que $\frac{1}{x}$; c-à-d., $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$. On a déjà vu que $\log z$ est multiforme à une infinité de déterminations et que $z = 0$ en est un point de ramification. On utilise le même contour que dans le cas précédent et on applique le théorème des résidus tout en tenant compte du fait que l'argument de z

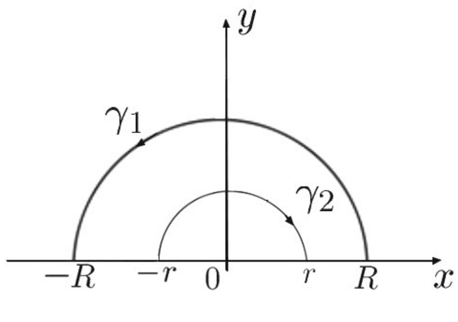
vaut 0 sur le bord supérieur de la coupure et 2π sur le bord inférieur de celle-ci. On a

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)(\log z)^2 dz &= \int_{\gamma_1} f(z)(\log z)^2 dz + \int_R^r f(x)(\log x + 2\pi i)^2 dx \\ &\quad + \int_{\gamma_2^-} f(z)(\log z)^2 dz + \int_r^R f(x)(\log x)^2 dx, \\ &= 2\pi i \sum \text{Résidus de la détermination choisie} \\ &\qquad\qquad \text{de } f(z)(\log z)^2 \text{aux pôles de } f(z).\end{aligned}$$

Le reste consiste à calculer les limites des intégrales sur γ_1 et γ_2 quand $R \to \infty$ et $r \to 0$. On montre que ces intégrales tendent vers 0 en vertu du lemme de Jordan. D'où

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty f(x)\log x dx + \pi i \int_0^\infty f(x) dx \\ &\qquad = -\frac{1}{2}\sum \text{Résidus de la détermination choisie de} \\ &\qquad\qquad f(z)(\log z)^2 \text{aux pôles de } f(z)\end{aligned}$$

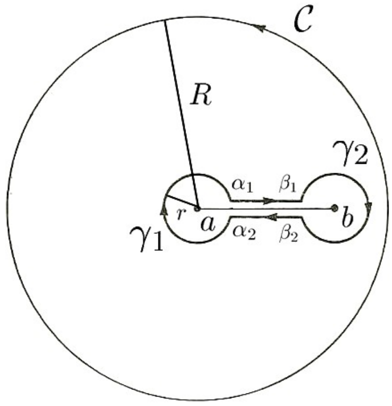
et il suffit de comparer partie réelle et partie imaginaire pour obtenir les intégrales en question. Notons que dans le cas particulier où $f(x)$ est paire, on peut obtenir le même résultat en considérant le circuit suivant :



avec $\gamma = \gamma_1 \cup [-R, -r] \cup \gamma_2 \cup [r, R]$.

Type III : $\displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt[n]{(x-a)^k(b-x)^{n-k}}dx$

où f est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôles sur l'intervalle $[a, b]$ et n, k sont de entiers avec $0 < k < n$. Notons que $f(z)\sqrt[n]{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}$ est multiforme à n déterminations.



On calcule l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)\sqrt[n]{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}dz,$$

où $\gamma = \gamma_1 \cup [\alpha_1, \beta_1] \cup \gamma_2 \cup [\beta_2, \alpha_2]$, $\gamma_1 = \{z : |z-a| = r\}$, $\gamma_2 = \{z : |z-b| = r\}$. La coupure rend l'intégrant uniforme sur γ. Posons

$$\varphi(z) = f(z)\sqrt[n]{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}.$$

On choisira la détermination de l'intégrant telle que : $\varphi(z)$ sera égal à $\varphi(x)$ sur le bord supérieur de la coupure. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre a (arbitraire) et de rayon R (voir figure ci-dessus). On obtient

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(z)dz + \int_{\gamma^-} \varphi(z)dz$$
$$= 2\pi i \sum \text{Résidus de la détermination choisie de } \varphi(z) \text{ aux pôles de } f(z).$$

Le reste consiste à calculer les limites de ces intégrales quand $R \to \infty$ et $r \to 0$. Les intégrales sur γ_1 et γ_2 tendent vers 0 en vertu du lemme de Jordan. L'intégrale sur $[\alpha_1, \beta_1]$ tend vers l'intégrale que l'on cherche à calculer et que l'on note I. Pour passer de $[\alpha_1, \beta_1]$ à $[\beta_2, \alpha_2]$, z décrit le cercle γ_2 de centre b dans le sens négatif. Dans ce cas, l'argument de $b-z$ augmente de -2π tandis que $z-a$ reste inchangé. Dès lors, $\varphi(z)$ augmente de $-\frac{2\pi(n-k)}{n}$ car $(b-z)^{n-k}$ augmente de $-2\pi(n-k)$. Donc l'intégrale sur $[\beta_2, \alpha_2]$ tend vers $-e^{-\frac{2\pi i(n-k)}{n}} I$. Par conséquent,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathcal{C}} \varphi(z)dz + \left(1 - e^{-\frac{2\pi i(n-k)}{n}}\right) I$$
$$= 2\pi i \sum \text{Résidus de la détermination choisie de } \varphi(z) \text{ aux pôles de } f(z),$$

et le calcul de I s'en déduit aisément. Signalons que souvent le calcul de la limite ci-dessus lorsqu'elle n'est pas nulle se fait en développant l'intégrant en série de Laurent.

4.7 Exercices

Exercice 4.7.1 *Montrer que la fonction cosinus complexe* $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, *n'est pas bornée.*

Exercice 4.7.2 *Montrer que* $\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ *n'existe pas.*

Exercice 4.7.3 *Soit* $f \in \mathcal{C}^1$ *dans* Ω, *à valeurs complexes. Montrer que la fonction* f *est holomorphe si et seulement si la forme différentielle* $\omega = fdz$ *est fermée dans* Ω.

Exercice 4.7.4 *Soit* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, *une fonction complexe d'une variable complexe* $z = x + iy$.

a) Montrer que si $f(z)$ *est holomorphe dans un domaine* Ω, *on peut l'y exprimer au moyen de* z *seul.*

b) Comment trouver formellement l'expression de $u(x,y) + iv(x,y)$ *au moyen de* z *seul ?*

c) On suppose que u *et* v *soient différentiables. Montrer que si la fonction* $f(z)$ *s'exprime au moyen de* z *seul, alors elle est holomorphe.*

d) Supposons que la fonction f *soit holomorphe et que* $f'(z) \neq 0$. *Posons* $g(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$. *Montrer que* g *est holomorphe si et seulement si* $df \wedge dg = 0$.

Exercice 4.7.5 *Exprimer la fonction*

$$xy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2),$$

au moyen de z *seul.*

Exercice 4.7.6 *Montrer que la règle de l'Hospital reste valable dans le cas complexe, à savoir, si* $f(z_0) = g(z_0) = 0$ *alors :*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

si $g'(z_0)$ *est non nul et si* f *et* g *sont dérivables en* z_0.

Exercice 4.7.7 *Soit* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, *une fonction holomorphe,* $z = x + iy$ *et posons* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. *On suppose qu'il existe trois nombres réels* a, b, c *non tous nuls et tels que :* $au + bv = c$. *Montrer que* f *est constante.*

Exercice 4.7.8 *Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas holomorphes.*

a) $f(z) = Re(z)$.

b) $g(z) = \overline{z}$.

Exercice 4.7.9 *Montrer que la fonction* $f(z) = i\sqrt{xy}$, $z = x + iy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, *satisfait aux équations de Cauchy-Riemann au point* $z = 0$ *mais n'est pas dérivable en ce point.*

Exercice 4.7.10 *Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega \subset \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire pour que $\overline{f}$ soit aussi holomorphe dans $\Omega \subset \mathbb{C}$.*

Exercice 4.7.11 *Calculer $\int_\gamma z^2 dz$ où γ est le segment de droite reliant le point $z_0 = -i$ au point $z_1 = 2+i$, orienté de z_0 à z_1.*

Exercice 4.7.12 *Appliquer la formule de majoration ci dessus au cas de l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$ où γ est un arc de cercle de centre 0, de rayon R et d'angle au centre θ.*

Exercice 4.7.13 *Soit $f \in \mathcal{C}^1$ dans Ω, à valeurs complexes. Montrer que la fonction f admet une primitive dans Ω si et seulement si la forme différentielle $\omega = fdz$ est exacte dans Ω.*

Exercice 4.7.14 *a) Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{1+z}{z} dz$, lorsque γ est le périmètre du carré de centre* 0*, dont un sommet est le point* $(1,1)$ *du plan complexe.*

b) Même question lorsque γ est la circonférence du plan complexe d'équation : $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

c) Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{\cos 2\pi z}{(z-1)^7} dz$, où γ est le cercle $|z| = 2$.

Exercice 4.7.15 *Calculer l'intégrale*

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z(z-6)} dz.$$

a) γ désignant le cercle $|z-2| = 1$.
b) γ désignant le cercle $|z-2| = 3$.
c) γ désignant le cercle $|z-2| = 5$.

Exercice 4.7.16 *Déterminer les premiers termes du développement de Laurent de*

$$f(z) = \frac{1}{\sin z},$$

au voisinage de $z = 0$ dans le disque D^* de centre 0*, privé de son centre, et de rayon π.*

Exercice 4.7.17 *Même question pour*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2 (z-4)^3},$$

au voisinage de $z = 1$, dans le disque ouvert D^* de centre 1*, privé de son centre et de rayon* 3*.*

Exercice 4.7.18 *Trouver et qualifier les points singuliers de la fonction définie par*

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+i)}.$$

Exercice 4.7.19 *Montrer que* $z = 0$ *est un point singulier essentiel de la fonction*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Exercice 4.7.20 *Développer en série de Laurent la fonction*

$$f(z) = e^{z} + e^{\frac{1}{z}},$$

autour de l'origine du plan complexe.

Exercice 4.7.21 *Développer en série de Laurent la fonction*

$$f(z) = -\frac{2}{(z-1)(z+1)},$$

autour de $z = 1$, *dans les couronnes :* $0 < |z-1| < 2$ *et* $2 < |z-1|$.

Exercice 4.7.22 *Calculer les résidus de la fonction*

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2},$$

en tous les pôles à distance finie.

Exercice 4.7.23 *Calculer le résidu de la fonction*

$$f(z) = \frac{\cos z.\ chz}{z^3 \sin z.\ shz},$$

au point $z = 0$.

Exercice 4.7.24 *Calculer le résidu de la fonction*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}},$$

au point $z = 0$.

Exercice 4.7.25 *Calculer l'intégrale*

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz,$$

où γ *est le cercle de centre 0 et de rayon respectivement :* $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ *et* 3.

Exercice 4.7.26 *Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :*

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$,

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sin\theta}$, $a > 1$.

Exercice 4.7.27 *Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :*

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2},\ a>b>0.$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos^2\theta)^2},\ a>0,\ b>0.$

Exercice 4.7.28 *Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta.$$

Exercice 4.7.29 *Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :*

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$

Exercice 4.7.30 *Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :*

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx.$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+1}dx.$

Exercice 4.7.31 *Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx.$$

Exercice 4.7.32 *Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Exercice 4.7.33 *Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 kx}{x^2}dx, \quad k>0.$$

Exercice 4.7.34 *Calculer les intégrales de Fresnel :*

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx, \qquad \int_0^{\infty} \sin x^2 dx.$$

Exercice 4.7.35 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx, \quad 0<a<1$$

Exercice 4.7.36 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 + e^x} dx, \quad 0 < a, b < 1$$

Exercice 4.7.37 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx, \quad a > 0, b > 0$$

Exercice 4.7.38 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x)x} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Exercice 4.7.39 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1 + x^2} dx.$$

Exercice 4.7.40 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^1 \sqrt[4]{x^3(1-x)} dx,$$

en utilisant
a) un calcul direct.
b) la méthode des résidus.

Exercice 4.7.41 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx, \quad a > 0, b > 0$$

Bibliographie

[1] Genet, J. et Pupion, G : Analyse moderne, tome 2, Vuibert, 1974.

[2] Lesfari, A. : *Notions fondamentales d'analyse mathématique (Résumés de cours, exercices et problèmes corrigés).* Ellipses, Paris, 25 février 2014.

[3] Lesfari, A. : *Variables complexes (Cours et exercices corrigés)*, éditions Ellipses, Paris, 9 septembre 2014.

[4] Lesfari, A. : *Formes différentielles et analyse vectorielle (Cours et exercices résolus)*, éditions Ellipses, Paris, 16 mai 2017.

[5] Lesfari, A. : *Fonctions spéciales de la physique mathématique (Cours et exercices résolus)*, éditions Ellipses, Paris, 28 novembre 2017.

[6] Lesfari, A. : *Problèmes résolus de mathématiques supérieures*, éditions Ellipses, Paris, 4 juin 2019.