ANALYSE COMPLEXE

SMA 6, 2014-2018

A. Lesfari

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences

Université Chouaïb Doukkali

B.P. 20, El Jadida, Maroc.

E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Site Web : http://lesfari.com

Le programme porte sur les notions suivantes : fonctions holomorphes, équation de Cauchy-Riemann, fonctions holomorphes élémentaires, théorème de Cauchy, formule intégrale de Cauchy, équivalence entre holomorphie et analyticité, zéros de fonctions holomorphes, espace des fonctions holomorphes, théorème d'inversion locale, théorème de l'application ouverte, principe du maximum, lemme de Schwarz, automorphismes, séries de Laurent, points singuliers, fonction méromorphes, théorème des résidus et application au calcul intégral, théorème de Rouché, fonctions harmoniques, égalité de la moyenne, noyau de Poisson. Si le temps le permet, d'autres notions complémentaires seront données.

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions holomorphes, fonctions analytiques

1.1 Préliminaires

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ et

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \; z \longmapsto f(z) = w,$$

une fonction complexe d'une variable complexe $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Définition 1 *On dit que la fonction f est uniforme si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de w. Sinon, elle est dite multiforme.*

Exemples de fonctions uniformes :

a) La *fonction linéaire* : $w = az + b$, $(a, b \in \mathbb{C})$.
b) La *fonction exponentielle* : $w = e^z$. Par définition, on a

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

Lorsque z est réel c'est-à-dire $z = x$, nous retrouvons la fonction exponentielle $e^z = e^x$. La fonction e^z est périodique, de période $2\pi i$. En outre, on a

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

En écrivant

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta},$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg z$, on obtient la formule de Moivre

$$z^n = r^n e^{in\theta},$$

et les formules d'Euler

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

c) Les *fonctions circulaires*. Par extension des définitions dans le cas réel, on pose

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

et de là

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Les relations entre les fonctions trigonométriques réelles s'étendent au cas complexe. Les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ sont périodiques, de période 2π. Elles ont les mêmes zéros que les fonctions réelles correspondantes. Signalons que les fonctions $\cos z$ et $\sin z$ ne sont pas bornées.

d) Les *fonctions hyperboliques*. Nous les définirons par extension du cas réel, en posant

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \qquad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2},$$

et de là

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth\ z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Les fonctions $\cosh z$ et $\sinh z$ sont périodiques, de période $2\pi i$ et sont, respectivement, paires et impaires. Les relations entre les fonctions hyperboliques réelles s'étendent au cas complexe.

Remarque 2 *On peut définir les fonctions* $e^z, \cos z, \sin z, \cosh z, \sinh z$, *par leurs développements en série entière qui convergent dans tout le plan complexe :*

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots \\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \\
\cosh z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\
\sinh z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots
\end{aligned}$$

Exemples de "fonctions" multiformes :

a) La *fonction racine carrée* : $w = \sqrt{z}$. Considérons

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \ z \longmapsto w : w^2 = z.$$

Il est clair que f n'est pas une fonction : à chaque valeur de $z \neq 0$, correspond deux valeurs de w. Lorsque l'on tourne autour du point $z = 0$, par exemple le long d'un cercle centré en 0, alors w change de signe. En effet, soit

$$z = re^{i\theta}, \ w = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}},$$

où $r = |z|$ et $\theta = \arg z$. On veut tourner autour de $z = 0$, donc r sera petit et θ variera entre 0 et 2π. Si $\theta = 0$, alors $w = \sqrt{r}e^0 = \sqrt{r}$. Si $\theta = 2\pi$, alors $w = \sqrt{r}e^{\pi i} = -\sqrt{r}$. On peut utiliser le fait que l'argument θ d'un nombre complexe z est défini à $2k\pi$ près. On pose $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ et dès lors la fonction $w = \sqrt{z}$ prend deux valeurs distinctes w_1 et w_2 pour chaque valeur de $z \neq 0$: $w_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta_0}{2}}$, $w_2 = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta_0}{2}+\pi)} = -w_1$. On dit que la fonction $w = \sqrt{z}$ a deux branches ou déterminations. Donc si z décrit un cercle entourant 0, la fonction $\sqrt{z}$ est multiforme et passe de manière continue d'une branche à l'autre ; de $w = \sqrt{r}$ à $w = -\sqrt{r}$. Si on refait de nouveau un tour complet c'est-à-dire de $\theta = 2\pi$ à $\theta = 4\pi$, alors on obtient $\sqrt{r}$ c'est-à-dire la valeur de départ. On dit que le point $z = 0$ est un point de branchement ou de ramification de la fonction $w = \sqrt{z}$. A distance finie, le point $z = 0$ est le seul point de branchement de $\sqrt{z}$, car la considération de tout cercle autour d'un point $z \neq 0$ ne conduit à aucun changement de branches de $\sqrt{z}$. On peut rendre la fonction $\sqrt{z}$ uniforme en faisant une coupure le long de la demi droite issue de $z = 0$.

b) *Logarithme complexe*. Soit $z \in \mathbb{C}$. Sous forme trigonométrique z s'écrit sous la forme

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad r > 0$$

Posons $Z = X + iY$. L'équation $e^Z = z$, s'écrit $e^X e^{iY} = re^{i\theta}$ ou sous la forme

$$e^X(\cos Y + i\sin Y) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

D'où, $e^X = r$ et $Y = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dès lors,

$$Z = \log z = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

La fonction $\log z$ est définie comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle. On montre que la fonction $\log z$ est multiforme, à une infinité de déterminations. La détermination principale de $\log z$ est définie pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ par

$$\log z = \ln r + i\theta, \qquad -\pi \leq \theta < \pi.$$

La détermination principale du logarithme est une bijection de $\mathbb{C}^*$ sur la bande horizontale $\triangle$ du plan complexe, définie par $Z = X + iY \in \triangle \Longleftrightarrow -\pi \leq Y < \pi$. Au lieu de choisir $\theta \in [-\pi, \pi[$, on peut prendre θ dans un intervalle quelconque semi-ouvert à droite ou à gauche et d'amplitude 2π, c-à-d., $[a, a+2\pi[$ ou $]a, a+2\pi]$. Soit $Z = X + iY \in \triangle$. On a $e^Z = e^X(\cos Y + i \sin Y)$, le module de e^Z est donc $r = e^X$ et $\theta = Y$ est l'argument satisfaisant à $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Dès lors,

$$\log e^Z = \ln r + i\theta = \ln e^X + iY = X + iY = Z,$$

où e^X désigne l'exponentielle réelle. Ainsi une détermination quelconque du logarithme, notée $\log_a : \mathbb{C}^* \longrightarrow \{z : \ \text{Im}\, z \in [a, a+2\pi[\}$, est l'inverse de la fonction exponentielle $\exp : \{z : \ \text{Im}\, z \in [a, a+2\pi[\} \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Une telle détermination prolonge la fonction logarithme réelle (définie sur $\mathbb{R}_+^*$) avec la condition $0 \in [a, a+2\pi[$ car si $z \in \mathbb{R}_+^*$, $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$ avec $\theta = 0$ comme seule valeur. Notons que l'expression $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$ ne sera pas toujours vraie si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ est toujours vraie. En fait, on a

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \ (\text{mod } 2\pi i),$$

il suffit d'appliquer la formule : $\log z = \ln r + i\theta$, $-\pi \leq \theta < \pi$ car si on n'a pas $-\pi \leq \theta_1 + \theta_2 < \pi$ la formule en question n'est vraie qu'à $2\pi i$ près. La formule ci-dessus fournit également les logarithmes des nombres strictement négatifs. Soit, par exemple, $z = -e$. On a $r = e$, $\theta = -\pi$ et donc $\ln(-e) = 1 - \pi i$.

c) La *fonction puissance* z^α ($\alpha \in \mathbb{C}$). Elle est définie par

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

La fonction z^α est :
- uniforme si α est entier.
- multiforme, à q déterminations, si $\alpha = \pm\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers positifs premiers entre eux.
- multiforme, à une infinité de déterminations, si $\alpha = a + ib$ (a et b non nuls).

Remarque 3 *Une théorie plus avancée (surfaces de Riemann) permet de décrire de manière rigoureuse le procédé d'uniformisation .*

Soit

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, \ z \longmapsto f(z),$$

une fonction uniforme et $z_0 \in \Omega$.

Définition 4 *On dit que $f(z)$ tend vers une limite l lorsque z tend vers z_0 et on écrit*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l,$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Quand la limite d'une fonction existe, elle est unique. Les propriétés classiques concernant la limite d'une somme, d'un produit ou d'un rapport de deux fonctions, s'étendent du cas réel au cas complexe.

Remarque 5 *La fonction $f(z)$ tend vers sa limite indépendamment de la manière dont le point z tend vers z_0. En d'autres termes, si la limite existe, alors lorsque z tend vers z_0 suivant une loi quelconque (par exemple suivant une courbe), $f(z)$ tend vers cette limite.*

Le point à l'infini ∞ est défini par l'image de l'origine par la transformation $t = \frac{1}{z}$. Par définition :

$$\begin{aligned} \lim_{z \to \infty} f(z) = l \quad & \text{si} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |z| > \delta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon. \\ \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad & \text{si} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta 0 : |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > \varepsilon. \end{aligned}$$

Notons que si $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$, alors $\lim_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \bar{l}$. Il en résulte que

$$\lim_{z \to z_0} Ref\,(z) = Re\,(l)\,, \qquad \lim_{z \to z_0} Imf\,(z) = Im\,(l)\,.$$

La réciproque est également vraie.

Définition 6 *Soit z_0 un point où la fonction f prend la valeur $f(z_0)$. On dit que $f(z)$ est continue en z_0 si et seulement si*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)\,.$$

La fonction $f(z)$ est continue dans Ω si et seulement si elle est continue en tout point de Ω.

Les propriétés classiques concernant la somme, le produit et le rapport de fonctions continues s'étendent du cas réel au cas complexe.

1.2 Fonctions différentiables, fonctions holomorphes, équation de Cauchy-Riemann, intégration des fonctions holomorphes

Définition 7 *On dit que $f(z)$ est dérivable au point $z \in \Omega$ si et seulement si*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)\,,$$

existe, indépendamment de la façon dont h tend vers 0 dans $\mathbb{C}$. Cette limite, notée $f'(z)$, est appelée dérivée de f en z.

Définition 8 *La fonction f est différentiable en z si et seulement si il existe un nombre complexe $f'(z)$ tel que*

$$\forall h \in \mathbb{C}, \quad f(z+h) = f(z) + f'(z) \cdot h + o(|h|).$$

Les règles de dérivation (somme, produit, quotient) sont les mêmes que celles utilisées en analyse réelle.

Proposition 9 *La fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en z si et seulement si elle est différentiable en z et $f'(z)$ a la même signification dans les deux définitions précédentes.*

Définition 10 *La fonction f est dite holomorphe dans Ω si elle est dérivable en tout point de Ω.*

Posons $z = x + iy$, $h = \Delta x + i\Delta y$ et soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, où $u(x,y) = Ref(z)$ et $v(x,y) = Imf(z)$, sont des fonctions réelles de deux variables réelles x et y.

Théorème 11 *La fonction $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe dans Ω si et seulement si u et v sont différentiables dans Ω et satisfont aux conditions (ou équations) de Cauchy-Riemann :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En outre, on a

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Remarque 12 *Si u et v ne sont pas différentiables, alors les conditions de Cauchy-Riemann sont nécessaires mais pas suffisantes.*

Proposition 13 *Considérons les deux opérateurs*

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

En outre, on a

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

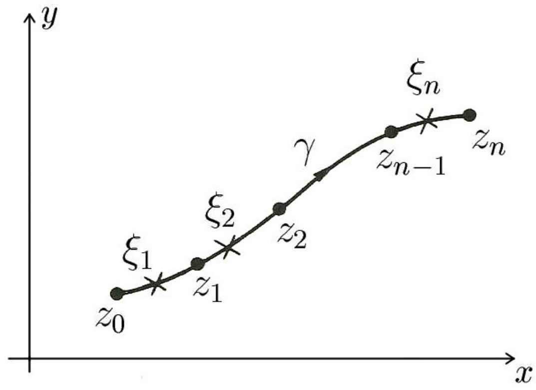
Remarque 14 *On désigne par $\mathcal{H}(\Omega)$ (ou parfois $\mathcal{O}(\Omega)$), l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On montre que : $\mathcal{H}(\Omega)$ est un espace vectoriel, un anneau (car stable pour la somme et le produit), une sous-algèbre de $\mathcal{C}^1(\Omega)$ et un sous-module fermé de $\mathcal{C}^1(\Omega)$. La composée de deux fonctions holomorphes est holomorphe, l'application réciproque d'un difféomorphisme holomorphe est holomorphe et si une fonction holomorphe possède un logarithme alors celui-ci est holomorphe.*

Définition 15 *On appelle chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux une application continue $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, définie sur un intervalle femé $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe une subdivision : $a = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = b$, de $[a,b]$ pour laquelle la restriction de γ à chaque intervalle $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ $(1 \leq k \leq n)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que le chemin γ est fermé (ou un circuit, ou encore un lacet) si $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Définition 16 *Soient $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On appelle intégrale de f le long de γ l'expression*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

Remarque 17 *Une autre façon de définir l'intégrale ci-dessus, est la suivante : partageons γ en n morceaux, au moyen des points $z_0, z_1, ..., z_n$. De plus, choisissons un point ξ_k sur chaque arc joignant z_{k-1} à z_k $(1 \leq k \leq n)$.*



On définit la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

La limite obtenue en faisant croître le nombre n de subdivisions, de façon que $\max_{1 \leq k \leq n} |z_k - z_{k-1}|$ tende vers zéro, est appelée intégrale curviligne de $f(z)$ le long de γ et est notée $\int_\gamma f(z)dz$.

Proposition 18 *Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, alors*

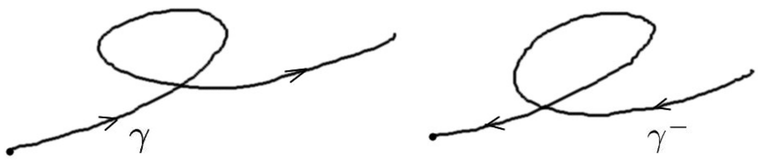
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int_\gamma (u(x,y)dy + v(x,y)dx).$$

La formule ci dessus, est une combinaison linéaire d'intégrales curvilignes réelles. Les propriétés habituelles de ces dernières sont donc conservées.

Si on change le sens du parcours du chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, l'intégrale change de signe

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)dz,$$

où $\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$, $t \in [a,b]$; le chemin γ^- se déduit de γ par un changement d'orientation :



Si le chemin γ admet la représentation paramétrique

$$x = \varphi(t)\,,\ y = \psi(t),$$

avec $a < t < b$, alors on a

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f\left[u\left(\varphi(t), \psi(t)\right) + iv\left(\varphi(t), \psi(t)\right)\right]\left(\varphi'(t) + i\psi'(t)\right)dt.$$

Proposition 19 *Si f est holomorphe, alors*

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

où $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Proposition 20 *(formules de majoration). Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt,$$

et

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq ML,$$

où M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur γ et $L = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ est la longueur du chemin γ.

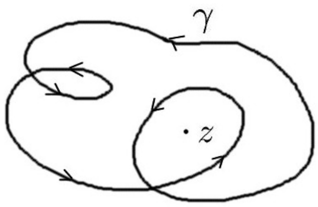
Théorème 21 *Soient $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé et Δ le complémentaire de l'image de γ, c'est-à-dire $\Delta = I^c$ où $I = \{z : \exists t \in [a,b],\ z = \gamma(t)\}$. Pour tout $z \in \Delta$, on a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = ind_\gamma(z),$$

où $ind_\gamma(z)$ est un entier dépendant du point z. Il est égal au nombre de tours que fait γ autour de z. La fonction $z \longmapsto ind_\gamma(z)$ est constante sur toute partie connexe de Δ et s'annule sur l'unique composante connexe non bornée de Δ.

Définition 22 *On dit que $ind_\gamma(z)$ est l'indice de γ par rapport à z.*

Pour γ ci-dessous, on a $ind_\gamma(z) = 2$:



Exemple 23 *Soit γ le cercle (orienté positivement) de centre a et de rayon r, défini par*

$$\gamma(t) = a + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Le complémentaire du cercle $|z-a| = r$ (support de γ) se divise en deux parties : le disque $|z - a < r$ et la couronne $|z-a| > r$. D'après le théorème précédent, l'indice $ind_\gamma(a)$ est constant dans le disque et il suffit de le calculer au point a,

$$ind_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{re^{it}} dt = 1.$$

Par ailleurs, dans la couronne, l'indice est nul. Par conséquent, on a

$$ind_\gamma(a) = \begin{cases} 1 & si\ |z-a| < r \\ 0 & si\ |z-a| > r \end{cases}$$

1.3 Théorème de Cauchy, formule intégrale de Cauchy, théorème de Moréra, équivalence entre holomorphie et analyticité

Définition 24 *Soient*

$$\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto \gamma_1(t), \qquad \gamma_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},\ t \longmapsto \gamma_2(t),$$

deux chemins définis sur le même intervalle $[a, b]$*, ayant mêmes extrémités* $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ *et* $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$*. On dit que* γ_1 *et* γ_2 *sont homotopes dans* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *s'il existe une application continue*

$$\varphi : [a, b] \times [0, 1] \longrightarrow \Omega, \quad (t, s) \longmapsto \varphi(t, s),$$

telle que :

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0) &= \gamma_1(t), \ \forall t \in [a, b], \\ \varphi(t, 1) &= \gamma_2(t), \ \forall t \in [a, b], \\ \varphi(a, s) &= \gamma_1(a) = \gamma_2(a), \ \forall s \in [0, 1], \\ \varphi(b, s) &= \gamma_1(b) = \gamma_2(b), \ \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

L'application φ *est dite une homotopie entre* γ_1 *et* γ_2*. Si* γ_1 *et* γ_2 *sont fermés, alors les deux dernières conditions seront remplacées par celle-ci :*

$$\varphi(a, s) = \varphi(b, s), \ \forall s \in [0, 1].$$

Intuitivement, γ_1 *et* γ_2 *sont homotopes dans* Ω *si on peut déformer continûment, tout en restant dans* Ω*, l'un des chemins en l'autre.*

Définition 25 *Un domaine est un ensemble ouvert connexe.*

Définition 26 *On dit qu'un domaine* Ω *est simplement connexe si tout chemin fermé* γ *inclus dans* Ω *est homotope à un point. Autrement dit, si tout chemin fermé* γ *inclus dans* Ω *peut être réduit à un point par déformation continue, sans quitter* Ω*.*

Donc un ouvert Ω est simplement connexe s'il est connexe ainsi que son complémentaire. De façon imagée, un ouvert est simplement connexe s'il est connexe et sans trou.

Exemple 27 *Un disque est simplement connexe. Par contre, le disque privé de son centre n'est pas simplement connexe. Une couronne circulaire n'est pas simplement connexe. Le plan* $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$ *est simplement connexe. Un ouvert étoilé*[1] *est simplement connexe.*

Théorème 28 *(Cauchy). a) Soit* $f(z)$ *une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *et soit* γ *un chemin fermé contenu dans* Ω*. Alors*

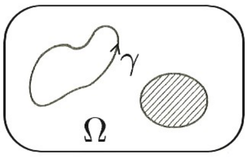
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

[1] Un ouvert Ω est dit étoilé par rapport à un point a si pour tout $x \in \Omega$, le segment $[a, x]$ est inclus dans Ω.

b) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, sauf en $z_1, z_2, ..., z_k$ et soit γ un chemin fermé contenu dans Ω entourant tous ces points. Si γ_j $(1 \leq j \leq k)$ est un chemin fermé contenu dans le domaine intérieur à γ entourant z_j et n'entourant pas les autres z_l $(l \neq j)$, alors

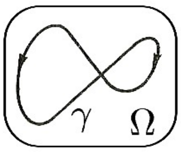
$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Remarques 29 *a) Si le domaine Ω n'est pas simplement connexe et si γ est homotope à zéro, alors on peut trouver un domaine simplement connexe $\Delta \subset \Omega$ contenant γ et le résultat reste inchangé.*



b) Si γ a des points doubles alors on décompose le chemin γ de telle façon qu'il n'y plus d'ambiguité et dès lors

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$



c) Dans le langage des formes différentielles, le théorème de Cauchy s'énonce comme suit : si $f(z)$ est holomorphe dans Ω, alors la forme différentielle $f(z)dz$ est fermée dans Ω.

Nous allons étudier quelques conséquences du théorème précédent.

Propriété 30 *Soit γ un chemin d'extrémités a et b, et contenu dans Ω. Alors, l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend que des extrémités a et b de γ.*

On pose

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(z)dz.$$

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans Ω. D'après la propriété précédente, on peut définir dans Ω une fonction uniforme (définie à une constante près, dépendant du choix du point z_0),

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta,\ z_0 \in \Omega.$$

Proposition 31 *$F(z)$ est holomorphe dans Ω et on a $F'(z) = f(z)$, sur Ω.*

Définition 32 *La fonction $F(z)$ est dite primitive de $f(z)$.*

Remarques 33 *a) Dans la proposition précédente, on suppose que f est holomorphe mais dans la démonstration seule la propriété de continuité de f sera utilisée.*

b) On montre de façon similaire que si Ω est un ouvert étoilé par rapport à un de ses points, alors toute fonction holomorphe dans Ω y admet une primitive holomorphe. Ceci correspond au théorème de Poincaré : toute forme différentielle fermée dans un ouvert étoilé y est exacte.

c) Notons que si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$.

d) La formule d'intégration par partie ainsi que celle du changement de variables restent valables.

Théorème 34 *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine Ω. Soit γ un chemin fermé contenu dans Ω et soit Δ le domaine simplement connexe ayant γ pour frontière. Alors*

a) Pour tout $z \in \Delta$, on a la formule intégrale de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

b) La fonction f est indéfiniment dérivable dans Δ et on a, pour tout $z \in \Delta$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta.$$

(γ étant parcouru dans le sens positif, c-à-d., anti-horlogique).

Une version plus générale de la formule intégrale de Cauchy valable pour toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ est fournie par le théorème suivant :

Théorème 35 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $D \subset \Omega$ un disque fermé et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. Alors, pour tout $z \in intD$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}.$$

Evidemment lorsque f est holomorphe sur Ω, alors $\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}} = 0$ et la formule ci-dessus entraîne la formule précédente. L'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}.\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}$ est une intégrale singulière. Elle est égale à

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varepsilon\leq|\zeta|\leq 1}\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}.\frac{d\zeta \wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z},$$

et cette limite existe car $\zeta \longmapsto \frac{1}{\zeta - z} \in L^1$. Par ailleurs, on montre que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ ayant un support compact sur $\mathbb{C}$, alors il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ telle que : $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f$. La fonction g est unique et est définie à l'addition d'une fonction holomorphe près.

Le théorème suivant n'est rien d'autre que la réciproque du théorème de Cauchy (ou plus précisément une réciproque du théorème de Goursat qui dit que si $f(z)$ est holomorphe dans Ω, alors $f'(z)$ est continue dans Ω).

Théorème 36 *(Moréra). Si $f(z)$ est continue dans un domaine simplement connexe Ω et si*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

pour tout chemin fermé γ de Ω, alors $f(z)$ est holomorphe dans Ω.

Définition 37 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est analytique au point $z_0 \in \Omega$ si elle admet un développement en série entière*[2] *dont le rayon de convergence r n'est pas nul. On dit que f est analytique sur Ω si elle l'est en tout point $z_0 \in \Omega$. On écrit*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(z - z_0\right)^k, \ z \in \Omega,$$

où $|z - z_0| < r$ et (a_k) est une suite de nombres complexes.

Théorème 38 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe d'une variable complexe z. Alors la fonction f est analytique dans Ω si et seulement si elle est holomorphe dans Ω.*

Remarque 39 *La réciproque du théorème précédent est fausse en général pour les fonctions réelles. En effet, une fonction f possédant des dérivées de tout ordre en z_0, n'est pas nécessairement égale à la série entière*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \left(z - z_0\right)^k,$$

correspondante. Il suffit de considérer la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

On vérifie aisément qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais qu'elle n'est pas égale à la série entière correspondante.

[2]Pour un rappel sur les propriétés des séries entières, voir appendice 9.1

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1 *Montrer que la fonction cosinus complexe* $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, *n'est pas bornée.*

Exercice 1.4.2 *a) Montrer que la fonction* $\log z$ *est multiforme, à une infinité de déterminations.*

b) Montrer que la détermination principale du logarithme est une bijection de $\mathbb{C}^*$ *sur la bande horizontale* $\triangle$ *du plan complexe, définie par*

$$Z = X + iY \in \triangle \Longleftrightarrow -\pi \leq Y < \pi.$$

c) Que peut-on dire de la continuité et la dérivabilité de ces déterminations ?

Exercice 1.4.3 *Montrer que la fonction puissance* z^α *est uniforme si* α *est entier, multiforme à* q *déterminations si* $\alpha = \pm\frac{p}{q}$ *où* p *et* q *sont des entiers positifs premiers entre eux et multiforme à une infinité de déterminations si* $\alpha = a + ib$ *(*a *et* b *non nuls).*

Exercice 1.4.4 *Montrer que* $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$ *n'existe pas.*

Exercice 1.4.5 *Montrer que La fonction* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *est holomorphe dans* Ω *si et seulement si* u *et* v *sont différentiables dans* Ω *et satisfont aux équations de Cauchy-Riemann :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En déduire que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Exercice 1.4.6 *Considérons les deux opérateurs*

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Montrer que les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à l'équation $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, *et en déduire que :* $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.

Exercice 1.4.7 *Soit* $f \in \mathcal{C}^1$ *dans* Ω, *à valeurs complexes. Montrer que la fonction* f *est holomorphe si et seulement si la forme différentielle* $\omega = f dz$ *est fermée dans* Ω.

Exercice 1.4.8 *Soit $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, une fonction complexe d'une variable complexe $z = x + iy$.*

a) Montrer que si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine Ω, on peut l'y exprimer au moyen de z seul.

b) Comment trouver formellement l'expression de $u(x, y)+iv(x, y)$ au moyen de z seul ?

c) On suppose que u et v soient différentiables. Montrer que si la fonction $f(z)$ s'exprime au moyen de z seul, alors elle est holomorphe.

d) Supposons que la fonction f soit holomorphe et que $f'(z) \neq 0$. Posons $g(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Montrer que g est holomorphe si et seulement si $df \wedge dg = 0$.

Exercice 1.4.9 *Exprimer la fonction*

$$xy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2),$$

au moyen de z seul.

Exercice 1.4.10 *Montrer que la règle de l'Hospital reste valable dans le cas complexe, à savoir, si $f(z_0) = g(z_0) = 0$ alors :*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)},$$

si $g'(z_0)$ est non nul et si f et g sont dérivables en z_0.

Exercice 1.4.11 *Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction holomorphe, $z = x + iy$ et posons $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. On suppose qu'il existe trois nombres réels a, b, c non tous nuls et tels que : $au + bv = c$. Montrer que f est constante.*

Exercice 1.4.12 *Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas holomorphes.*

a) $f(z) = Re(z)$.

b) $g(z) = \overline{z}$.

Exercice 1.4.13 *Montrer que la fonction $f(z) = i\sqrt{xy}$, $z = x + iy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, satisfait aux équations de Cauchy-Riemann au point $z = 0$ mais n'est pas dérivable en ce point.*

Exercice 1.4.14 *Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega \subset \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire pour que $\overline{f}$ soit aussi holomorphe dans $\Omega \subset \mathbb{C}$.*

Exercice 1.4.15 *Soient $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ et $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Montrer que :*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i \int_\gamma (u(x, y)dy + v(x, y)dx) .$$

Exercice 1.4.16 *Calculer $\int_\gamma z^2 dz$ où γ est le segment de droite reliant le point $z_0 = -i$ au point $z_1 = 2+i$, orienté de z_0 à z_1.*

Exercice 1.4.17 *Montrer que si f est holomorphe, alors*

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

où $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Exercice 1.4.18 *a) Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors*

$$\left|\int_\gamma f(z)\, dz\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\, dt,$$

et

$$\left|\int_\gamma f(z)\, dz\right| \leq ML,$$

où M est une borne supérieure de $|f(z)|$ sur γ et $L = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$ est la longueur du chemin γ.

b) Appliquer la formule de majoration ci dessus au cas de l'intégrale $\int_\gamma \dfrac{dz}{z^2}$ où γ est un arc de cercle de centre 0, de rayon R et d'angle au centre θ.

Exercice 1.4.19 *Soient $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé ($\mathcal{C}^1$ par morceaux) et Δ le complémentaire de l'image de γ, c-à-d., $\Delta = \mathbb{C}\backslash Im\ \gamma$ ou encore $\Delta = I^c$ où $I = \{z : \exists t \in [a,b], z = \gamma(t)\}$. Pour tout $z \in \Delta$, on pose (indice de γ par rapport à z)*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \operatorname{ind}_\gamma(z).$$

a) Montrer que l'intégrale ci-dessus a bien un sens.

b) Montrer que $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ *est un entier dépendant du point z.*

c) Montrer que la fonction $z \longmapsto ind_\gamma(z)$ est constante sur toute partie connexe de Δ et s'annule sur la composante connexe non bornée de Δ.

d) Expliquer le fait que $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ *est égal au nombre de tours que fait γ autour de z.*

Exercice 1.4.20 *a) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$ et soit γ un chemin fermé contenu dans Ω. Montrer que*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

b) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, sauf en $z_1, z_2, ..., z_k$ et soit γ un chemin fermé contenu dans Ω entourant tous ces points. Si γ_j $(1 \leq j \leq k)$ est un chemin fermé contenu dans le domaine intérieur à γ entourant z_j et n'entourant pas les autres z_l $(l \neq j)$, montrer que

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Exercice 1.4.21 *a) Soit γ un chemin d'extrémités a et b, contenu dans Ω. Montrer que l'intégrale $\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend que des extrémités a et b de γ.*

b) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans Ω. D'après a), on peut définir dans Ω une fonction uniforme $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, $z_0 \in \Omega$. Cette fonction $F(z)$ est définie à une constante près, dépendant du choix du point z_0. Montrer que $F(z)$ est holomorphe dans Ω et on a $F'(z) = f(z)$ sur Ω.

Exercice 1.4.22 *Soit $f \in \mathcal{C}^1$ dans Ω, à valeurs complexes. Montrer que la fonction f admet une primitive dans Ω si et seulement si la forme différentielle $\omega = fdz$ est exacte dans Ω.*

Exercice 1.4.23 *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine Ω. Soit γ un chemin fermé contenu dans Ω et soit Δ le domaine simplement connexe ayant γ pour frontière. Montrer que*

a) pour tout $z \in \Delta$, on a la formule intégrale de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

(γ étant parcouru dans le sens positif, càd. anti-horlogique).

b) la fonction f est indéfiniment dérivable dans Δ et on a, pour tout $z \in \Delta$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Exercice 1.4.24 *a) Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{1+z}{z} dz$, lorsque γ est le périmètre du carré de centre 0, dont un sommet est le point $(1, 1)$ du plan complexe.*

b) Même question lorsque γ est la circonférence du plan complexe d'équation : $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

c) Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{\cos 2\pi z}{(z-1)^7} dz$, où γ est le cercle $|z| = 2$.

Exercice 1.4.25 *Calculer l'intégrale*

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{z(z-6)} dz.$$

a) γ *désignant le cercle* $|z-2|=1$.
b) γ *désignant le cercle* $|z-2|=3$.
c) γ *désignant le cercle* $|z-2|=5$.

Exercice 1.4.26 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$, $D \subset \Omega$ *un disque fermé et* f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* Ω. *Montrer que pour tout* $z \in intD$, *on a*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_D\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta-z}.$$

Exercice 1.4.27 *Soit* f *est une fonction de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *ayant un support*[3] *compact sur* $\mathbb{C}$. *Montrer qu'il existe une fonction* g *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{C}$ *telle que :* $\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}=f$.

Exercice 1.4.28 *Montrer que si* $f(z)$ *est continue dans un domaine simplement connexe* Ω *et si* $\int_\gamma f(z)dz=0$, *pour tout chemin fermé* γ *de* Ω, *alors* $f(z)$ *est holomorphe dans* Ω.

Exercice 1.4.29 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}$ *une fonction complexe d'une variable complexe* z. *Alors la fonction* f *est analytique dans* Ω *si et seulement si elle est holomorphe dans* Ω.

---

[3] On rappelle que le support d'une fonction $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), est l'adhérence de l'ensemble des x tels que $f(x)$ est non identiquement nulle.

Chapitre 2

Propriétés des fonctions holomorphes et harmoniques

2.1 Inégalités de Cauchy, théorèmes de Liouville et de d'Alembert

Proposition 40 *(inégalités de Cauchy). Soit f une fonction holomorphe sur le disque fermé $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$, de centre a et de rayon r et soit M la borne supérieure de $|f(z)|$ sur le cercle $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$. Alors*

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!M}{r^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 41 *(Liouville). Si $f(z)$ est une fonction holomorphe et bornée sur tout $\mathbb{C}$, alors $f(z)$ est une constante.*

Une fonction entière est une fonction holomorphe définie sur tout le plan complexe. Le théorème de Liouville signifie que toute fonction entière et bornée est constante.

Le résultat suivant porte parfois le nom du théorème fondamental de l'algèbre.

Corollaire 42 *(d'Alembert). $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Autrement dit, toute équation algébrique*

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0, \qquad a_0 \neq 0,$$

a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

2.2 Principe du prolongement analytique et principe des zéros isolés

Théorème 43 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) $f^{(k)}(z_0) \equiv 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
ii) $f \equiv 0$ *dans un voisinage* $\mathcal{V}(z_0)$ *de* z_0.
iii) $f \equiv 0$ *dans* Ω.

Corollaire 44 *(principe du prolongement analytique). Soient f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supposons que $f = g$ dans un voisinage d'un point de Ω. Alors $f = g$ sur tout Ω.*

Soit une fonction holomorphe $f(z)$ définie dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$ et soit Ω un domaine tel que : $\Omega \supset D$. Le problème du prolongement analytique, consiste à trouver une fonction $g(z)$ définie dans Ω telle que : $f(z) = g(z)$ sur Ω. Si une telle fonction existe, elle est unique en vertu du corollaire précédent. On dira que g prolonge f dans Ω. Dans certains cas il est impossible d'effectuer le prolongement analytique d'une fonction holomorphe hors de son disque de convergence, ce qui constitue une barrière de prolongement analytique.

Définition 45 *On dit qu'un point z_0 est un zéro de la fonction holomorphe $f(z)$ si et seulement si $f(z_0) = 0$. Dans ce cas, le terme a_0 du développement de $f(z)$ au voisinage de z_0,*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

est nul. Lorsque

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0, \quad a_m \neq 0,$$

le point z_0 est dit zéro d'ordre m pour $f(z)$. Dans ces conditions, on a

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

On dira enfin que le point z_0 est un zéro isolé de $f(z)$ si et seulement si il existe $\delta > 0$ tel que le cercle $\mid z - z_0 \mid = \delta$ ne contient pas d'autre zéro autre que z_0. Autrement dit, s'il existe un voisinage de z_0 ne contenant pas de zéro autre que z_0.

Théorème 46 *(principe des zéros isolés). Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Alors les zéros de f sont isolés. Autrement dit, l'ensemble des zéros de f dans Ω est discret.*

Notons aussi le principe des zéros isolés suivant : soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$ et de somme $f(z)$. Si f s'annule une infinité de fois autour de l'origine, alors $f \equiv 0$. On en déduit que si $\sum a_k z^k$ et $\sum b_k z^k$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs r_1 et r_2 avec $0 < r_1 < r_2$ et que si pour tout z tel que $|z| < r_1$,

$$\sum a_k z^k = \sum b_k z^k,$$

alors $a_k = b_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Corollaire 47 *L'anneau des fonctions holomorphes sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est intègre.*

Corollaire 48 *Toute fonction f holomorphe dans un domaine Ω ne peut s'annuler en une suite de points situés dans Ω et possédant un point d'accumulation dans Ω que si elle est identiquement nulle.*

Remarque 49 *Bien que le principe des zéros isolés est un résultat plus fort que celui du principe du prolongement analytique, néamoins ce dernier est très important. Tout d'abord on l'utilise pour prouver le premier et en outre le principe des zéros isolés n'est plus valable dans le cas des fonctions de plusieurs variables alors que celui du prolongement analytique reste vrai.*

2.3 Propriété de la moyenne, principe du maximum, lemme de Schwarz

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

Définition 50 *On dit que f possède dans Ω la propriété de la moyenne si pour tout disque fermé $D = \{z :\mid z - a \mid\leq r\} \subset \Omega$, la valeur de f au point a est égale à la moyenne de f sur le cercle $C = \{z :\mid z - a \mid= r\} \subset \Omega$, c-à-d.,*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta.$$

Théorème 51 *(de la moyenne). Toute fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, possède la propriété de la moyenne.*

Corollaire 52 *Sous les conditions du théorème précédent, on a*

$$\mid f(a) \mid\leq \max_{0\leq\theta\leq 2\pi} \mid f(a + re^{i\theta}) \mid .$$

Théorème 53 *(principe du maximum). Si le module d'une fonction holomorphe sur un domaine* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, atteint son maximum en un point de* Ω *(c-à-d., s'il existe un disque ouvert* $D = \{z : |z - z_0| < R\} \subset \Omega$ *et tel que* $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ *dans ce disque), alors cette fonction est constante.*

Lemme 54 *(lemme de Schwarz). Soit* $f(z)$ *une fonction holomorphe dans le disque ouvert* $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *telle que :*

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in D(0,1).$$

Alors, on a $|f(z)| \leq z, \forall z \in D(0,1)$*. Si en outre, il existe un* $z_0 \neq 0$ *pour lequel* $|f(z_0)| = |z_0|$*, alors on a identiquement* $f(z) = \lambda z$ *où* λ *est une constante de module* 1.

2.4 Fonctions harmoniques, formule et noyau de Poisson, problème de Dirichlet pour le disque

Définition 55 *Soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $(x, y) \longmapsto f(x, y)$*, une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$*. La fonction* f *est dite harmonique dans* Ω *si son Laplacien s'annule :*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

ou ce qui revient au même si

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z} = 0.$$

Remarque 56 *Toute constante, toute forme linéaire est harmonique. L'ensemble des fonctions harmoniques est un espace vectoriel pour le corps* $\mathbb{C}$.

Proposition 57 *Toute fonction holomorphe est harmonique.*

Corollaire 58 *La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques.*

Exemple 59 *La fonction* $\ln |z|$ *est harmonique dans* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *(voir exercice 2.6.13.).*

Proposition 60 *Soit* $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction harmonique dans un ouvert simplement connexe* Ω *de* $\mathbb{C}$*. Alors, il existe une fonction harmonique (dite conjuguée harmonique de* u *sur* Ω*)* $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que :* $u+iv$ *soit holomorphe sur* Ω.

Remarques 61 *a) Dans la proposition précédente, la fonction u admet une infinité de conjugées harmoniques de la forme $v(x,y)+C$ où $v(x,y)$ est l'une d'entre-elles et C une constante.*

b) On montre que les fonctions harmoniques, possèdent plusieurs propriétés similaires à celles des fonctions holomorphes. Par exemple : toute fonction harmonique possède une propriété de la moyenne (la réciproque est vraie), un principe du prolongement analytique, un principe du maximum, une formule analogue à celle de Cauchy.

Théorème 62 *(formule de Poisson). Soit u une fonction harmonique dans le disque ouvert $D(0,R)$, et continue dans le disque fermé $\overline{D}(0,R)$. Alors*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\theta}\right)\frac{R^2-|z|^2}{\left|Re^{i\theta}-z\right|^2}d\theta,\quad \forall z\in D(0,R),$$

ou, ce qui revient au même, en posant $z=\rho e^{i\alpha}$, $\rho<R$,

$$u\left(\rho e^{i\alpha}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\left(Re^{i\theta}\right)\left(R^2-\rho^2\right)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\alpha)}d\theta.$$

La fonction $\dfrac{R^2-|z|^2}{\left|Re^{i\theta}-z\right|^2}$ ou $\dfrac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\alpha)}$ porte le nom de noyau de Poisson.

Problème de Dirichlet : Il consiste à trouver une fonction harmonique sur un domaine Ω et prenant des valeurs données sur la frontière de Ω.

Théorème 63 *(problème de Dirichlet pour le disque). Soit $D(0,1)$ un disque ouvert de centre 0 et de rayon R et soit $u(\theta)$ une fonction 2π-périodique sur le cercle $C=\partial D(0,R)$. Alors, il existe une fonction $f(z)$ continue sur le disque fermé $\overline{D}(0,R)$, harmonique sur le disque ouvert $D(0,R)$ et satisfaisant à $f\left(Re^{i\theta}\right)=u(\theta)$. Cette fonction est unique et est donnée par*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\theta)\frac{R^2-|z|^2}{\left|R\ e^{i\theta}-z\right|^2}d\theta,\ |z|<R.$$

2.5 Théorème d'inversion locale, transformations conformes, applications géométriques, théorème de l'application ouverte, automorphismes $Aut(\mathbb{C})$, $Aut\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right)$, $Aut(D(0,1))$, $Aut(\mathbb{H})$

Théorème 64 *(d'inversion locale). Soit f une fonction holomorphe non constante dans un domaine Ω tel que : $f'(z_0)\neq 0$, $z_0\in\Omega$. Alors, il existe un voisinage*

$\mathcal{U}$ de z_0 et un voisinage $\mathcal{V}$ de $f(z_0)$ tels que la restriction $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ soit bijective et f^{-1} soit holomorphe avec

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' o f^{-1}}.$$

Nous allons étudier les transformations conformes ainsi que quelques applications géométriques. Soit $w = f(z)$ une fonction complexe d'une variable complexe $z = x + iy$. Posons $w = u + iv$. Les équations

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

déterminent une transformation du plan complexe z en le plan complexe w, établissant ainsi une correspondance entre les points (x, y) et (u, v). On parlera parfois d'une transformation biunivoque si à chaque point du plan des uv correspond un point et un seul du plan des xy. La transformation est biunivoque dans les domaines où son jacobien est non nul :

$$J(x, y) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Propriété 65 *Si $f(z)$ est holomorphe, alors le jacobien de cette transformation s'écrit sous la forme*

$$J = |f'(z)|^2.$$

En outre, $f(z)$ est biunivoque dans les domaines où $f'(z) \neq 0$ (les points où $f'(z) = 0$ sont les points critiques de la transformation).

Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine Ω et si $f'(z) \neq 0$ dans Ω, alors la transformation inverse f^{-1} est définie et holomorphe en tout point de $f(\Omega)$ (transformée de Ω par f).

Définition 66 *On appelle transformation conforme une transformation qui conserve les angles en grandeur et en sens.*

Théorème 67 *Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine Ω et si $f'(z) \neq 0$ dans Ω, alors f est conforme dans Ω.*

Le résultat de Riemann suivant concerne le principe de conservation d'un domaine (ouvert connexe) de $\mathbb{C}$. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante. Alors f est une application ouverte, c'est-à-dire qu'elle envoie les sous-ensembles ouverts de Ω vers des ouverts de $\mathbb{C}$. Ce théorème est un exemple des importantes différences entre les applications holomorphes et les fonctions différentiables de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$: la fonction de variable complexe est différentiable de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais n'est clairement pas ouverte. Elle n'est même pas ouverte comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ car son image est l'intervalle fermé $[0, +\infty[$. Plus précisément, on a

Théorème 68 *Soit f une fonction holomorphe non identiquement constante sur un domaine Ω de $\mathbb{C}$. L'image de Ω par f est aussi un domaine. Si en outre f est injective, alors f^{-1} est holomorphe dans $f(\Omega)$ et $f'(z) \neq 0$ dans Ω.*

Corollaire 69 *Si f est une transformation conforme de Ω dans Δ, alors f^{-1} est une transformation conforme de Δ dans Ω.*

Le résultat fondamental suivant est dû à Riemann.

Théorème 70 *L'image d'un ouvert simplement connexe par une transformation conforme est simplement connexe.*

Corollaire 71 *Deux ouverts simplement connexes dont les frontières ont au moins deux points distincts sont isomorphes.*

On désigne par $\overline{\mathbb{C}}$, l'ensemble $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ des complexes $\mathbb{C}$ que l'on complète par le point ∞ (un symbole représentant un élément qui n'est pas dans $\mathbb{C}$). On munit l'espace $\overline{\mathbb{C}}$ d'une topologie en rajoutant aux ouverts de $\mathbb{C}$ les complémentaires des compacts de $\mathbb{C}$. Autremant dit, les ouverts de $\overline{\mathbb{C}}$ sont les ouverts de $\mathbb{C}$ et les ensembles de la forme $U \cup \{\infty\}$ où U est un ouvert de $\mathbb{C}$ dont le complémentaire est un compact de $\mathbb{C}$. La topologie induite par celle de $\overline{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}$ est la topologie usuelle de $\mathbb{C}$. L'ensemble $\overline{\mathbb{C}}$ est un compact ; le compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{C}$. Une suite (z_n) de $\overline{\mathbb{C}}$ tend vers l'infini si $|z_n| \longrightarrow \infty$ et le complémentaire d'un ouvert est compact. On montre que $\overline{\mathbb{C}}$ est un espace topologique homéomorphe à la sphère unité que l'on désigne par S^2. On désigne aussi par $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la droite projective complexe. C'est le quotient $\mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}/\sim$ de $\mathbb{C}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par la relation d'équivalence :

$$z_1 \sim z_2 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*, z_2 = \lambda z_1.$$

On munit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de la topologie quotient. La droite projective complexe $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et la sphère de Riemann S^2 ou $\overline{\mathbb{C}}$ sont isomorphes et on utilisera indifféramment les notations $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ou S^2. Plus précisément et de façon imagée, la droite projective complexe peut être représentée à l'aide de la projection stéréographique.

Proposition 72 *Le disque ouvert $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et le plan complexe $\mathbb{C}$ ne sont pas isomorphes mais sont homéomorphes.*

Soient D un domaine de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et f un automorphisme de D, c'est-à-dire, un isomorphisme de D sur lui-même. On sait dans ce cas que f^{-1} est aussi un automorphisme de D. Si f et g sont deux isomorphismes d'un domaine Δ sur D, alors $gof^{-1} : \Delta \longrightarrow \Delta$ est un automorphisme. Les automorphismes d'un domaine Δ forment un groupe, que l'on note $\mathrm{Aut}(\Delta)$.

Soit E un ensemble. On dit qu'un groupe G d'automorphismes $E \longrightarrow E$ est transitif, si $\forall z_1, z_2 \in E$, $\exists f \in G$ tel que : $z_2 = f(z_1)$. On appelle sous-groupe d'isotropie (ou stabilisateur) d'un élément $z_0 \in E$ dans G, l'ensemble $\{f \in G : f(z_0) = z_0\}$; c'est le sous-groupe de G qui conserve le point z_0.

Proposition 73 *Le groupe des automorphismes de* $\mathbb{C}$ *est*

$$Aut(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b,\ a \neq 0\}.$$

Ce groupe est transitif ; le sous-groupe d'isotropie de 0 *est* $\{z \mapsto az,\ a \neq 0\}$.

Le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$ est le groupe affine Aff($\mathbb{C}$) des transformations affines de $\mathbb{C}$.

Soit Aut($\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Soit

$$z \longmapsto w = \frac{az+b}{cz+d},$$

où $(a, b, c, d \in \mathbb{C})$ et $ad - bc \neq 0$, une transformation homographique ou homographie. Les transformations dites de Möbius sont de cette forme. Cette application est holomorphe sur $\mathbb{C}$ si $c = 0$ et $d \neq 0$ et sur $\mathbb{C}\backslash\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ si $c \neq 0$. Notons que lorsque $ad - bc = 0$, alors

$$w = \frac{a(z+\frac{b}{a})}{c(z+\frac{d}{c})} = \frac{a(z+\frac{b}{a})}{c(z+\frac{b}{a})} = \frac{a}{c} = \text{constante}.$$

Donc la condition $ad - bc \neq 0$ élimine les cas où w pourrait se réduire à une constante. Lorsque $c = 0$, alors $a \neq 0$ et w est non constante. Lorsque $c \neq 0$, on écrit

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz+d)} = \alpha + \frac{\beta}{z+\gamma},$$

où $\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = \frac{bc-ad}{c^2}$, $\gamma = \frac{d}{c}$ et on montre que : $\lambda = z + \gamma$, $\tau = \frac{1}{\lambda}$, $w = \alpha + \beta\tau$. Autrement dit, une transformation homographique peut-être considérée comme le produit de transformations telles que : translation, rotation, homothétie et inversion. L'application $z \longmapsto w = \frac{az+b}{cz+d}$, est une bijection de $\overline{\mathbb{C}}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$; on définit pour $c \neq 0$, $w(-\frac{d}{c}) = \infty$, $w(\infty) = -\frac{d}{c}$ et pour $c = 0$, $w(\infty) = \infty$. La transformation homographique admet pour inverse la transformation $w \longmapsto z = \frac{-dw+b}{cw-a}$, qui est aussi homographique, c'est un isomorphisme analytique de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Ainsi, on montre que :

Proposition 74 *L'ensemble des transformations homographiques forme un groupe* G *d'automorphismes de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ *qui est transitif et on a*

$$Aut\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right) = G = \left\{w(z) = \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc \neq 0\right\}.$$

En associant à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où $\det A \neq 0$, la transformation $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$, on obtient un isomorphisme de groupes :

$$\phi : GL(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\} \longrightarrow Aut\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right).$$

Notons que $\ker\phi = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}^*\} = \mathbb{C}^* I$, et on a ainsi l'isomorphisme

$$Aut\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right) \simeq GL(2,\mathbb{C})/\ker\phi = PGL(2,\mathbb{C}) \text{ (groupe projectif)}$$

En considérant l'application $\det : GL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ayant pour noyau le groupe $SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \det A = 1\}$, on obtient l'isomorphisme $GL(2,\mathbb{C})/SL(2,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$, et on a

$$Aut\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right) \simeq PGL(2,\mathbb{C}) = PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{-I, I\}.$$

On considère maintenant le demi-plan supérieur

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z = y > 0\},$$

et le disque unité $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. L'application

$$\mathbb{H} \longrightarrow D(0,1), \quad z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}, \text{ (transformation de Cayley)}$$

est holomorphe et son inverse est de la forme $i\frac{1+z}{1-z}$. On a donc un biholomorphisme entre $\mathbb{H}$ et $D(0,1)$, et se prolonge en un homéomorphisme des bords : $S^1 \simeq \partial D(0,1) \longrightarrow \partial\mathbb{H} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Proposition 75 *Le groupe $Aut(D(0,1))$ des automorphismes de $D(0,1)$ est*

$$Aut(D(0,1)) = \left\{ w = e^{i\theta}\left(\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right) : \theta \in \mathbb{R}, |z_0| < 1 \right\}.$$

Ce groupe est transitif.

Proposition 76 *Le groupe $Aut(\mathbb{H})$ des automorphismes de $\mathbb{H}$ est*

$$Aut(\mathbb{H}) = \left\{ w = \frac{az+b}{cz+d} : (a,b,c,d \in \mathbb{R}), ad - bc = 1 \right\}.$$

Le théorème de Riemann est un résultat important de la représentation conforme affirmant que tout domaine distinct de $\mathbb{C}$ est conforme au disque unité $D(0,1)$. Une des conséquences de ce résultat est que deux domaines quelconques de $\mathbb{C}$ et distincts de $\mathbb{C}$ sont conformes.

Théorème 77 *(de Riemann). Tout ouvert simplement connexe Ω de $\mathbb{C}$ tel que : $\Omega \neq \mathbb{C}$ est isomorphe au disque ouvert.*

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1 *Soit f une fonction holomorphe sur le disque fermé $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\}$, de centre a et de rayon r et soit M la borne supérieure de $|f(z)|$ sur le cercle $C = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$. Montrer que :*

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!M}{r^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2.6.2 *a) Montrer que si $f(z)$ est une fonction holomorphe et bornée sur tout $\mathbb{C}$, alors $f(z)$ est une constante.*

b) En déduire que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Autrement dit, toute équation algébrique

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0,$$

a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

c) Question supplémentaire : montrer que toute équation algébrique

$$P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0, \quad n \geq 1$$

a exactement n racines.

Exercice 2.6.3 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $f^{(k)}(z_0) \equiv 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

ii) $f \equiv 0$ dans un voisinage $\mathcal{V}(z_0)$ de z_0.

iii) $f \equiv 0$ dans Ω.

Exercice 2.6.4 *a) Soient f et g deux fonctions holomorphes dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supposons que $f = g$ dans un voisinage d'un point de Ω. Montrer que $f = g$ sur tout Ω.*

b) Expliquer la notion de prolongement analytique.

c) (Théorème de Pringsheim). Montrer que si dans la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_kz^k = f(z), \quad |z| < r$$

tous les coefficients a_k sont positifs ou nuls et une infinité d'entre eux sont positifs, alors le point $z = r$ est un point singulier pour $f(z)$. (Un point $z = a$ est un point régulier pour $f(z)$ quand il existe un voisinage de ce point constituant un domaine d'holomorphie pour $f(z)$. Tout point qui n'est pas régulier est dit singulier ; on dit aussi que $f(z)$ possède une singularité en un tel point. Les singularités seront étudiées en détail au chapitre 3).

d) Montrer que dans certains cas il est impossible d'effectuer le prolongement analytique d'une fonction holomorphe hors de son disque de convergence, ce qui constitue une barrière de prolongement analytique.

Exercice 2.6.5 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non identiquement nulle. Montrer que les zéros de f sont isolés. Autrement dit, l'ensemble des zéros de f dans Ω est discret.*

Exercice 2.6.6 *a) Soit $\sum a_k z^k$ une série de rayon de convergence $r > 0$ et de somme $f(z)$. Si f s'annule une infinité de fois autour de l'origine, alors $f \equiv 0$.*

b) En déduire que si $\sum a_k z^k$ et $\sum b_k z^k$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs r_1 et r_2 avec $0 < r_1 < r_2$ et que si pour tout z tel que $|z| < r_1$, $\sum a_k z^k = \sum b_k z^k$, alors $a_k = b_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.6.7 *Montrer que l'anneau des fonctions holomorphes est intègre.*

Exercice 2.6.8 *Montrer que toute fonction f holomorphe dans un domaine Ω ne peut s'annuler en une suite de points situés dans Ω et possèdant un point d'accumulation dans Ω que si elle est identiquement nulle.*

Exercice 2.6.9 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Montrer que toute fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, possède la propriété de la moyenne. En déduire que :*

$$|f(a)| \leq \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \left| f(a + re^{i\theta}) \right|.$$

Exercice 2.6.10 *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine contenant $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. Démontrer la formule de Gutzmer :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|^2 d\theta \leq M_r^2,$$

où les a_k sont les coefficients du développement en série entière de f au voisinage de z_0 et $M_r = \sup\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$.

<u>Notes</u> : a) En tenant compte du fait que $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, la formule de Gutzmer s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \left| f^{(k)}(z_0) \right|^2 \frac{r^{2k}}{(k!)^2}.$$

b) Une autre méthode pour démontrer cette formule consiste à utiliser la théorie des séries de Fourier [25]. La fonction $\theta \longmapsto f(z_0 + re^{i\theta})$, est développable en série de Fourier

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} r^k e^{ik\theta},$$

et la formule en question résulte immédiatement de l'égalité de Parseval.

Exercice 2.6.11 *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction holomorphe sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Supposons que $|f|$ atteigne son maximum en un point $z_0 \in \Omega$, alors f est constante sur Ω.*

Exercice 2.6.12 *(lemme de Schwarz). Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le disque ouvert $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ telle que :*

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in D(0,1).$$

a) Montrer que : $|f(z)| \leq z$, $\forall z \in D(0,1)$.

b) Montrer que si en outre, il existe un $z_0 \neq 0$ pour lequel $|f(z_0)| = |z_0|$, alors on a identiquement $f(z) = \lambda z$ où λ est une constante de module 1. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2.6.13 *a) Montrer que toute fonction holomorphe est harmonique.*

b) En déduire que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques.

c) Montrer que la fonction $\ln|z|$ est harmonique dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Note : Pour a), on peut noter que le laplacien Δ s'écrit sous la forme $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z}$. Pour la question b), on a $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ et on peut calculer directement les laplaciens Δu et Δv, en tenant compte des équations de Cauchy-Riemann et du lemme de Schwarz sur l'interversion des dérivées partielles. En effet, on a

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0.$$

De même, on montre que $\Delta v = 0$.

Exercice 2.6.14 *a) Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique dans un ouvert simplement connexe Ω de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une fonction harmonique $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : $u + iv$ soit holomorphe sur Ω.*

b) En déduire que la fonction u admet une infinité de conjugées harmoniques de la forme $v(x,y) + C$ où $v(x,y)$ est l'une d'entre-elles et C une constante.

Exercice 2.6.15 *Soit u une fonction harmonique dans le disque ouvert $D(0,R)$, et continue dans le disque fermé $\overline{D}(0,R)$. Montrer que*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(Re^{i\theta}\right)\frac{R^2 - |z|^2}{\left|Re^{i\theta} - z\right|^2}d\theta, \quad \forall z \in D(0,R),$$

ou, ce qui revient au même, en posant $z = \rho e^{i\alpha}$, $\rho < R$,

$$u\left(\rho e^{i\alpha}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u\left(Re^{i\theta}\right)\left(R^2 - \rho^2\right)}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha)}d\theta.$$

Exercice 2.6.16 *Soit $D(0,1)$ un disque ouvert de centre 0 et de rayon R et soit $u(\theta)$ une fonction 2π-périodique sur le cercle $C = \partial D(0,R)$. Montrer qu'il existe une fonction $f(z)$ continue sur le disque fermé $\overline{D}(0,R)$, harmonique sur le disque ouvert $D(0,R)$ et satisfaisant à $f\left(Re^{i\theta}\right) = u(\theta)$. Cette fonction est unique et est donnée par*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\frac{R^2 - |z|^2}{|R\ e^{i\theta} - z|^2}d\theta,\ |z| < R.$$

Exercice 2.6.17 *Montrer que si $f(z)$ est holomorphe, alors le jacobien de cette transformation s'écrit sous la forme*

$$J = |f'(z)|^2.$$

et en déduire que la transformation $f(z)$ est biunivoque dans les domaines où $f'(z) \neq 0$

Exercice 2.6.18 *Montrer que si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine Ω et si $f'(z) \neq 0$ dans Ω, alors f est conforme dans Ω.*

Exercice 2.6.19 *a) Montrer que le plan complexe $\mathbb{C}$, la sphère de Riemann S^2 et le disque unité $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ne sont pas isomorphes.*

b) Montrer que $\mathbb{C}$ et $D(0,1)$ sont homéomorphes.

Exercice 2.6.20 *Montrer que le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}$ est*

$$Aut(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b,\ a \neq 0\},$$

qu'il est transitif et que le sous-groupe d'isotropie de 0 est $\{z \mapsto az,\ a \neq 0\}$.

Exercice 2.6.21 *a) Soient Δ un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $Aut(\Delta)$ le groupe des automorphismes de Δ et G un sous-groupe transitif de $Aut(\Delta)$. Montrer que s'il existe $z_0 \in \Delta$ tel que le sous-groupe d'isotropie de z_0 dans $Aut(\Delta)$ soit inclus dans G, alors G=$Aut(\Delta)$.*

b) En déduire que les transformations homographiques forment un groupe G d'automorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui est transitif et qu'en outre

$$Aut\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\right) = G = \left\{w(z) = \frac{az+b}{cz+d} : ad - bc \neq 0\right\}.$$

Exercice 2.6.22 *(Lemme de Schwarz, voir aussi exercice 2.6.12). Soit f une fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ et supposons que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq M$. Montrer que pour tout $z \in D(0,r)$, $|f(z)| \leq \frac{M}{r}|z|$.*

Exercice 2.6.23 *Montrer que les automorphismes f du disque unité $D(0,1)$ tels que : $f(0)=0$, sont de la forme $f : z \longmapsto e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$. Autrement dit, le sous-groupe d'isotropie de 0 dans le groupe $Aut(D(0,1))$ est formé des rotations $z \longmapsto e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$.*

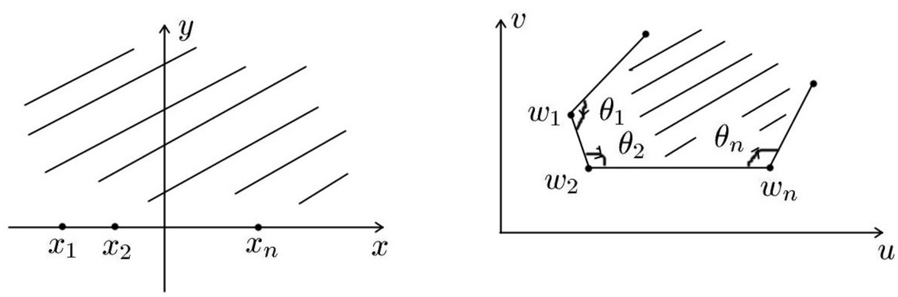
Exercice 2.6.24 *Montrer que le groupe $Aut(D(0,1))$ des automorphismes du disque unité $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ est*

$$Aut(D(0,1)) = \left\{ w = e^{i\theta}\left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right) : \theta\in\mathbb{R}, |z_0|<1 \right\}.$$

Exercice 2.6.25 *Montrer que le groupe $Aut(\mathbb{H})$ des automorphismes du demi-plan supérieur $\mathbb{H}=\{z=x+iy\in\mathbb{C} : Imz = y>0\}$ est*

$$Aut(\mathbb{H}) = \left\{ w = \frac{az+b}{cz+d} : (a,b,c,d\in\mathbb{R}), ad-bc=1 \right\}.$$

Exercice 2.6.26 *(Transformation de Schwarz-Christoffel). Soit $w=f(z)$ une fonction complexe d'une variable complexe $z=x+iy$ et posons $w=u+iv$. Soit un polygone dans le plan des w ayant pour sommets les points $w_1,...,w_n$ et pour angles intérieurs $\theta_1,...,\theta_n$. Soient les points $x_1,...,x_n$ de l'axe réel du plan des z.*



Une transformation qui fait correspondre au plan $y\geq 0$ du plan des z, l'intérieur du polygone du plan des w, les points x_j correspondants aux w_j, est donnée par l'équation :

$$w' = \frac{dw}{dz} = C(z-x_1)^{\frac{\theta_1}{\pi}-1}...(z-x_n)^{\frac{\theta_n}{\pi}-1},$$

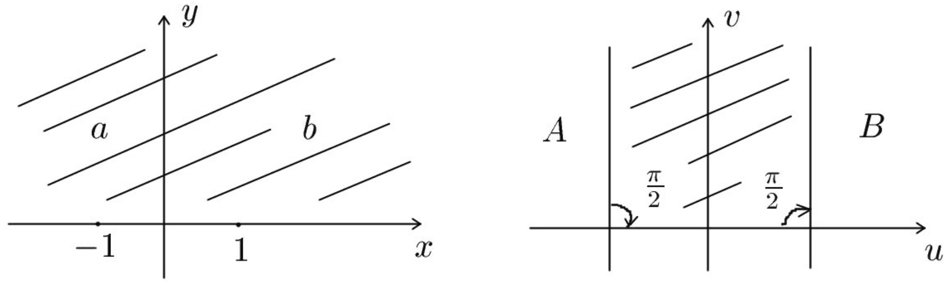
d'où

$$w = C\int (z-x_1)^{\frac{\theta_1}{\pi}-1}...(z-x_n)^{\frac{\theta_n}{\pi}-1}dz + K,$$

où C et K sont des constantes. La frontière du polygone est la transformée de l'axe réel du plan des z. La transformation de Schwarz-Christoffel n'est pas conforme aux points anguleux du polygone.

a) Donner une interprétation géométrique de la transformation ci-dessus.

b) Déterminer une transformation conforme appliquant la moitié supérieure du plan des z sur la région indiquée ci-dessous du plan des w et telle que les images des points a et b soient A et B.



Exercice 2.6.27 *(Transformation de Joukowski). Etudier brièvement la transformation de Joukowski définie par*

$$w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{k^2}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C}^*, k \in \mathbb{R}$$

Chapitre 3

Fonctions méromorphes

3.1 Séries de Laurent, points singuliers, théorème de Casorati-Weierstrass, théorèmes de Picard

Théorème 78 *Soit $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans la couronne ouverte*

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : R_1 <\mid z - z_0 \mid< R_2\}.$$

Alors, la fonction f peut être représentée dans Δ de façon unique par une série de la forme

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{3.1.1}$$

avec

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{3.1.2}$$

où γ est un chemin fermé entourant z_0 et contenu dans la couronne. En outre, cette série converge absolument vers f dans Δ et uniformément dans toute couronne fermée contenue dans Δ.

Définition 79 *La série (3.1.1) avec les coefficients donnés par (3.1.2) s'appelle série de Laurent de f autour du point z_0.*

Ecrivons la série (3.1.1) sous la forme

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}_{(*)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}}_{(**)}.$$

Définition 80 *La série (∗) est appelée partie régulière (ou holomorphe) et la série (∗∗) est dite partie principale de la série de Laurent (3.1.1).*

Classification des points : Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, sauf peut-être en un certain nombre de points.

a) Un point $z_0 \in \Omega$ est un point régulier pour $f(z)$ si $a_{-k} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, la série de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

est une série de Taylor tout simplement.

b) Tout point qui n'est pas régulier est dit singulier ; on dit que $f(z)$ possède une singularité en tel point. En ce point, la fonction $f(z)$ n'est pas dérivable.

c) Un point singulier est dit isolé s'il existe un voisinage de ce point ne contenant pas d'autres points singuliers. Dans la cas contraire il est dit non-isolé. Ainsi, la fonction $\coth \frac{1}{z}$, qui devient infinie pour $z = \frac{1}{k\pi}$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ possède une singularité non isolé en $z = 0$.

d) On distingue deux types de singularités isolées :

- Le point z_0 est un pôle d'ordre $m > 0$, lorsque

$$a_{-m} \neq 0 \text{ et } a_{-(m+l)} = 0,\ \forall l \in \mathbb{N}^* :\ f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Autrement dit, si $f(z)$ s'écrit sous la forme

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

avec $g(z)$ holomorphe au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$. Lorsque z_0 est un pôle de $f(z)$, on montre aisément que $f(z)$ n'est pas bornée au voisinage de z_0, mais $\frac{1}{f(z)}$ est bornée en z_0.

- Le point z_0 est un point singulier essentiel s'il existe une infinité de coefficients a_{-k} non nuls. Autrement dit si les fonctions $f(z)$ et $\frac{1}{f(z)}$ ne seront pas bornées au voisinage de z_0.

Notes pratiques : Nous avons vu précédemment que les coefficients a_k du développement de Laurent, sont donnés par les intégrales

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,\ k \in \mathbb{Z},$$

où γ est un chemin entourant z_0 et contenu dans la couronne

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

En pratique, pour développer une fonction en série de Laurent, on évite en général le calcul de ces intégrales. Le recours à des procédés indirects est justifié par l'unicité du développement de f en série de Laurent autour de z_0. L'unicité garantit qu'un développement de f en série de puissances $(z-z_0)^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est forcément le développement de Laurent, quel que soit le procédé utilisé pour l'obtenir.

a) On utilisera au maximum les développements en série entière. On se souviendra des deux propriétés suivantes :
(i) Le produit de deux séries entières A et B, de coefficients a_k et b_k, est une série entière C. Les coefficients c_k de C s'obtiennent par la formule

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

(ii) Si A est une série entière dont le terme indépendant n'est pas nul, $\frac{1}{A}$ est une série entière B. Les coefficients de B s'obtiennent le plus facilement par la méthode des coefficients indéterminés. Considérons par exemple le cas où z_0 est un pôle d'ordre m pour f. Soit g le prolongement holomorphe de $(z-z_0)^m f(z)$ défini sur le cercle de centre z_0 et de rayon r. On a, sur ce même cercle privé de son centre,

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}.$$

Pour obtenir le développement de Laurent de f, il suffira donc de multiplier chaque terme du développement de $g(z)$ par $1/(z-z_0)^m$. Habituellement la fonction holomorphe $g(z)$ se présente sous la forme du quotient de deux fonctions holomorphes P et Q qui ne s'annulent pas au point z_0. Dans ce cas, on calculera d'abord la série de Taylor représentant $1/Q$ (utiliser la propriété (ii)), puis on multipliera la série obtenue par le développement en série de P (utiliser la propriété (i)).

b) Il est souvent utile d'avoir recours à la série géométrique et ses puissances. On se souviendra que

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots, \quad |u| < 1$$

et que les puissances de $1/(1-u)$ peuvent s'obtenir par dérivation :

$$\frac{1}{(1-u)^{k+1}} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{1-u}\right)^{(k)}.$$

En particulier,

$$\frac{1}{(1-u)^2} = \left(\frac{1}{1-u}\right)' = 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-u)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}\right)'' = 1 + 3u + 6u^2 + 10u^3 + \cdots$$

Le comportement d'une fonction au voisinage d'un de ses pôles est relativement simple, mais il en va tout autrement au voisinage d'une singularité essentielle. Dans tout voisinage d'une singularité essentielle, il existe un point où la valeur correspondante de la fonction diffère arbitrairement peu de tout nombre complexe fixé. Les théorèmes suivants sont intéressants et fournissent des résultats encore plus précis.

Théorème 81 *(Casorati-Weierstrass). Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé $D(a,r)\backslash\{a\}$ avec une singularité essentielle en a. Alors, pour tout $k \in]0,r[$, l'image de $(D(a,k)\backslash\{a\})$ par f est dense dans $\mathbb{C}$.*

Les théorèmes de Picard ci-dessous sont au nombre de deux : le premier est connu sous le nom de petit théorème de Picard et le second sous le nom de grand théorème de Picard.

Théorème 82 *Une fonction entière non constante prend toute valeur complexe, sauf peut-être une.*

Théorème 83 *Une fonction holomorphe ayant une singularité essentielle prend, sur tout voisinage de cette singularité, toute valeur complexe une infinité de fois, sauf peut-être une.*

C'est ainsi par exemple qu'au voisinage de $z = 0$, $\sin \frac{1}{z}$ peut assumer n'importe quelle valeur. Par contre, $e^{\frac{1}{z}}$ peut assumer n'importe quelle valeur, sauf la valeur zéro.

3.2 Fonctions méromorphes, théorème des résidus

Définition 84 *Une fonction $f(z)$ est dite méromorphe si ses seules singularités sont des pôles.*

On en déduit que sur tout domaine borné, une fonction méromorphe ne peut avoir qu'un nombre fini de pôles. Une fonction rationnelle constitue un cas particulier de fonction méromorphe. Par exemple la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)^2},$$

qui est holomorphe en tout point à distance finie sauf en $z = -1$ (pôle simple) et $z = -2$ (pôle double) est une fonction méromorphe.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, privé du point z_0.

Définition 85 *On appelle résidu de f au point z_0, le nombre*

$$Rés(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz,$$

c'est-à-dire le coefficient de $1/(z - z_0)$ dans le développement en série de Laurent de f au voisinage de z_0.

Le résidu de $f(z)$ à l'infini est $\text{Rés}(f, \infty) = \text{Rés}\left(-\frac{1}{u^2} f\left(\frac{1}{u}\right), 0\right)$, où $u = 1/z$. En effet, lorsqu'on effectue le changement de variable $z \longmapsto u = 1/z$, le point $z = \infty$ se transforme en $u = 0$, tandis que l'intégrale $\int f(z)dz$ devient $\int -\frac{1}{u^2} f(\frac{1}{u})du$.

Calcul des résidus : a) Lorsque z_0 est un pôle d'ordre m de $f(z)$, alors

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z)\right].$$

b) Lorsque z_0 est un pôle simple de la fonction $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, avec $P(z_0) \neq 0$ et $Q(z_0) = 0$, alors

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \text{ si } Q'(z_0) \neq 0.$$

c) Lorsque z_0 est un point singulier essentiel de $f(z)$, le résidu s'obtient en développant $f(z)$ en série de Laurent autour de z_0.

Théorème 86 *(des résidus). Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine, $z_1, z_{2,\ldots}, z_k \in \Omega$ et $f : \Omega \backslash \{z_1, z_{2,\ldots}, z_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$, une fonction holomorphe. Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Rés(f, z_j),$$

où γ est un chemin fermé contenu dans Ω à l'intérieur duquel sont contenus tous les z_j.

Plusieurs versions du théorème des résidus existent, notamment celle avec indices :

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \text{ind}_\gamma(z_j)\text{Rés}(f, z_j),$$

où $\text{ind}_\gamma(z_j)$ est l'indice de γ par rapport à z_j.

3.3 Nombre de pôles et zéros d'une fonction méromorphe, principe de l'argument, théorème de Rouché

Théorème 87 *(principe de l'argument). Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans un domaine simplement connexe Ω. Soit γ un chemin fermé contenu dans Ω entourant tous les pôles et zéros de $f(z)$ dans Ω. Alors*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = ind_{fo\gamma}(0),$$

Théorème 88 *(Rouché). Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomorphes dans un domaine simplement connexe Ω et sur sa frontière γ. Supposons qu'en tout point de γ, on ait $|f(z)| > |g(z)|$. Alors $f(z)$ et $f(z)+g(z)$ ont le même nombre de zéros dans Ω.*

3.4 Applications du théorème des résidus au calcul d'intégrales et la somme de certaines séries

Le théorème des résidus est particulièrement utile dans le calcul de certaines intégrales réelles définies. Le principe de la méthode est le suivant : soit à calculer l'intégrale réelle

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

On associe à $f(x)$ la fonction $g(z)$ et un chemin fermé γ tels que l'on puisse appliquer le théorème des résidus à l'intégrale de $g(z)$ sur γ et tels que sur une partie $\mathcal{C}$ de γ on ait

$$\int_{\mathcal{C}} g(z)dz = \int_a^b f(x)dx.$$

Si le calcul de l'intégrale de $g(z)$ sur la partie complémentaire de $\mathcal{C}$ est possible, le calcul de I est ainsi ramené à celui d'une intégrale dans le plan complexe.

Pour le calcul des intégrales réelles, on fait souvent appel aux lemmes de Jordan suivants :

Lemme 89 *Soit f une fonction continue sur le secteur défini par $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \le \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \le 2\pi$. Si $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, alors*

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0,$$

où γ_r est l'arc de cercle de rayon compris entre les angles θ_1 et θ_2.

Lemme 90 *Soit f une fonction continue sur le secteur défini par $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi$. Si $\lim_{|z|\to 0} zf(z) = 0$, alors*

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0,$$

où γ_r est l'arc de cercle de rayon compris entre les angles θ_1 et θ_2.

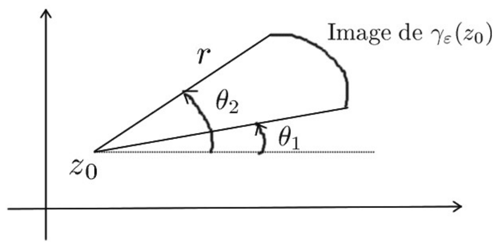
Lemme 91 *Soit f une fonction continue sur le secteur défini par $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$. Si $\lim_{|z|\to \infty} f(z) = 0$, alors*

$$\lim_{r\to \infty}\int_{\gamma_r} f(z)e^{imz}dz = 0, \quad m > 0$$

où γ_r est l'arc de cercle de rayon compris entre les angles θ_1 et θ_2.

Le même resultat reste valable pour le cas $m < 0$ à condition de considérer l'arc de cercle dans le demi plan inférieur Im $z < 0$.

Soient $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ et $\gamma_\varepsilon : [\theta_1, \theta_2] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\theta \longmapsto z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$, un chemin dont l'image est un arc de cercle.



Lemme 92 *(du petit cercle). Si f est holomorphe sur $\gamma_\varepsilon(z_0)$ pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et possèdant un pôle simple en z_0, alors*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon(z_0)} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)Rés(f, z_0),$$

où $Rés(f, z_0) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2}} (z - z_0)f(z)$ est le résidu de f en z_0.

Lemme 93 *(du grand cercle). Si f est holomorphe sur $\gamma_r(z_0)$ pour r assez grand et possèdant un pôle simple en z_0, alors*

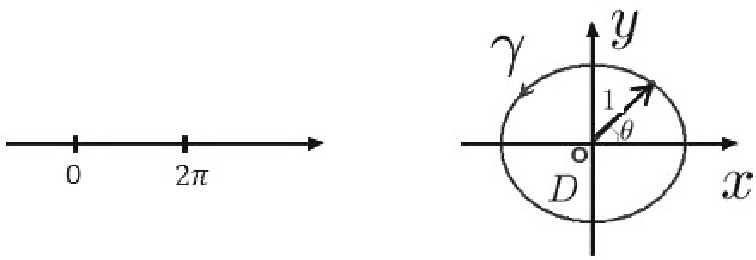
$$\lim_{r\to \infty}\int_{\gamma_r(z_0)} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)Rés(f, z_0),$$

où $Rés(f, z_0) = \lim_{\substack{|z|\to +\infty\\ \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2}} (z - z_0)f(z)$.

a) Intégrales ne faisant pas appel à des fonctions multiformes.

$$\underline{\text{Type 1}} : \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta,$$

où f est une fonction rationnelle en $\cos\theta$ et $\sin\theta$ dont le dénominateur ne s'annule pas dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. On effectue le changement de variable $z = e^{i\theta}$, qui transforme $[0, 2\pi]$ en le bord γ du disque unité du plan complexe.



On utilise les formules

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i},$$

et $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, ou plus généralement, les formules

$$\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \qquad \sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i},$$

et $dz = ine^{in\theta}d\theta = inzd\theta$, et l'intégrale en question devient

$$\int_\gamma f\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz},$$

γ étant le cercle unité. En appliquant le théorème des résidus, on obtient

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i \sum \text{Rés}\left(f(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i})\frac{1}{iz},\ z_j \in int\ D\right).$$

Comme D est le disque unité, alors $z_j \in int\ D \Leftrightarrow |z_j| < 1$, et

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i \sum \text{Rés}\left(f(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i})\frac{1}{iz},\ |z_j| < 1\right).$$

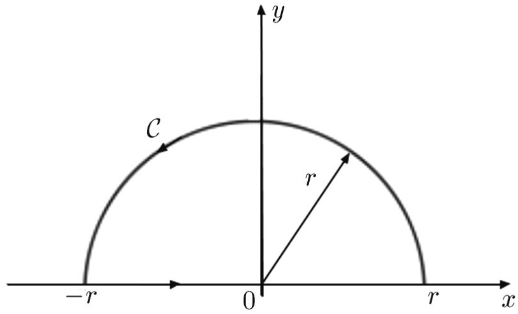
$$\underline{\text{Type 2}} : \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

où

• P et Q sont des polynômes.

• $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\deg Q - \deg P \geq 2$.

Les conditions imposées sont nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale converge. On considère l'intégrale $\int_\gamma \frac{P(z)}{Q(z)}dz$, où $\gamma = \mathcal{C} \cup [-r, +r]$ est le chemin fermé suivant :



et on fait tendre r vers l'infini. Si $\frac{P(x)}{Q(x)}$ est paire, on peut utiliser cette méthode pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$. En appliquant le théorème des résidus et le lemme de Jordan, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum \text{Rés}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right),$$

où la somme est étendue aux pôles z_j de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ situés dans le demi-plan supérieur du plan complexe.

Il faut bien noter que $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, peut exister (valeur principale de Cauchy) sans que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ converge comme le montre l'exemple suivant : $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \sin x dx = 0$, mais l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ diverge. Dès lors pour que l'on puisse avoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$$

il faut que l'intégrale en question converge.

<u>Type 3</u> : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx,$

où

• ces intégrales convergent.

• $m > 0$ (resp. $m < 0$).

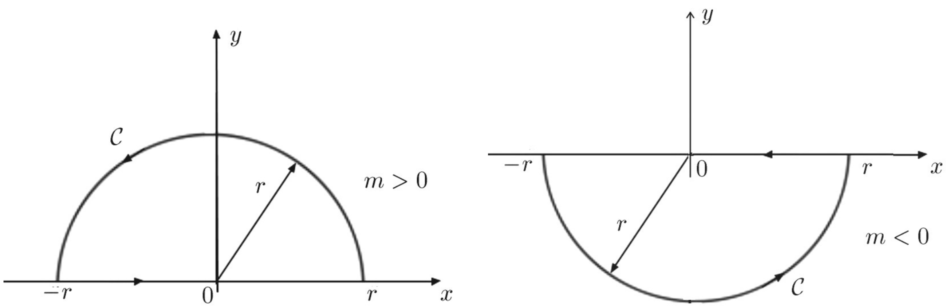
• f holmorphe dans le demi-plan fermé supérieur (resp. inférieur) sauf en un nombre fini de pôles, les pôles réels étant simples.

• $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, $\text{Im } z > 0$ (resp. $\text{Im } z < 0$).

Nous allons distinguer deux cas :
<u>1^{er} cas</u> : Les points singuliers de f ne sont pas sur l'axe réel. Notons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx.$$

Le calcul de la première intégrale donne donc les deux autres (puisque celles-ci sont des nombres réels). On calcule $\int_\gamma f(z)e^{imz}dz$, où $\gamma = \mathcal{C}\cup[-r,r]$:



et on fait tendre r vers l'infini. En appliquant le théorème des résidus et le lemme de Jordan, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx = \begin{cases} 2\pi i\sum \text{résidus dans le demi-plan supérieur de } f(z)e^{imz} \text{ si } m>0 \\ -2\pi i\sum \text{résidus dans le demi-plan inférieur de } f(z)e^{imz} \text{ si } m<0 \end{cases}$$

D'où,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos mx dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx,$$

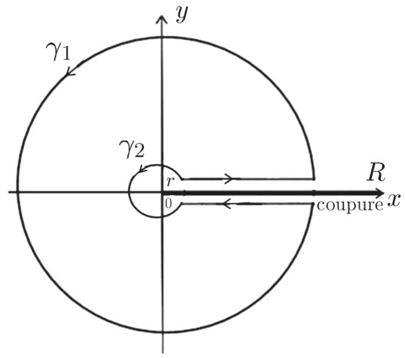
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin mx dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{imx}dx.$$

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : La fonction $f(z)$ peut posséder des points singuliers (pôles simples) sur l'axe réel. Dans ce cas, on raisonne de manière analogue au cas précédent en intégrant la fonction $f(z)e^{imz}$ sur des chemins fermés modifiés de façon à ne pas contenir ces singularités.

b) Intégrales faisant appel à des fonctions multiformes.
Le principe de la méthode est identique à celui du paragraphe a), à ceci près que les intégrants multiformes doivent être uniformisés au moyen d'une coupure adéquate. Les contours d'intégration ne pouvant pas traverser ces coupures, l'intégrant sera déterminé univoquement par une de ses déterminations le long de ces contours.

$$\underline{\text{Type I}} : \int_0^{+\infty} x^\alpha f(x)dx, \quad 0 < \alpha < 1$$

où f est holomorphe sauf en un nombre fini de points qui ne sont pas sur le demi-axe réel $x > 0$. Supposons que f décroît plus vite à l'infini que $\frac{1}{x^2}$, ce qui assure la convergence de l'intégrale en question. On calcule $\int_\gamma z^\alpha f(z)dz$, où $\gamma = \gamma_1 \cup [R, r] \cup \gamma_2 \cup [r, R]$,



Le point $z = 0$ est un point de branchement de l'intégrant. La coupure rend celui-ci uniforme sur γ. On choisira la détermination de l'intégrant telle que :

$$z^\alpha = \begin{cases} x^\alpha \text{ sur le bord supérieur de la coupure} \\ x^\alpha e^{2\pi i\alpha} \text{ sur le bord inférieur de la coupure} \end{cases}$$

On applique le théorème des résidus :

$$\begin{aligned} \int_\gamma z^\alpha f(z)dz &= \int_{\gamma_1} z^\alpha f(z)dz + \int_R^r e^{2\pi i\alpha} x^\alpha f(x)dx \\ &\quad + \int_{\gamma_2^-} z^\alpha f(z)dz + \int_r^R x^\alpha f(x)dx, \\ &= 2\pi i \sum \text{Résidus aux points singuliers de la détermination} \\ &\qquad \text{choisie pour } z^\alpha f(z). \end{aligned}$$

Le reste consiste à calculer les limites des intégrales sur γ_1 et γ_2 quand $R \to \infty$ et $r \to 0$.

$$\underline{\text{Type II}} : \int_0^{+\infty} f(x) \log x dx,$$

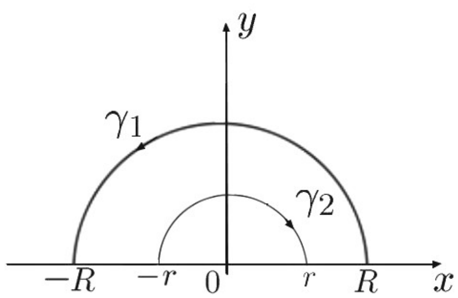
où f est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôles sur le demi-axe $x \geq 0$. On suppose que f décroît plus vite à l'infini que $\frac{1}{x}$; c-à-d., $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$. On a déjà vu que $\log z$ est multiforme à une infinité de déterminations et que $z = 0$ en est un point de ramification. On utilise le même contour que dans le cas précédent et on applique le théorème des résidus tout en tenant compte du fait que l'argument de z vaut 0 sur le bord supérieur de la coupure et 2π sur le bord inférieur de celle-ci. On a

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)(\log z)^2 dz &= \int_{\gamma_1} f(z)(\log z)^2 dz + \int_R^r f(x)(\log x + 2\pi i)^2 dx \\ &\quad + \int_{\gamma_2^-} f(z)(\log z)^2 dz + \int_r^R f(x)(\log x)^2 dx, \\ &= 2\pi i \sum \text{Résidus de la détermination choisie} \\ &\qquad \text{de } f(z)(\log z)^2 \text{aux pôles de } f(z).\end{aligned}$$

Le reste consiste à calculer les limites des intégrales sur γ_1 et γ_2 quand $R \to \infty$ et $r \to 0$. On montre que ces intégrales tendent vers 0 en vertu du lemme de Jordan. D'où

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty f(x) \log x dx + \pi i \int_0^\infty f(x) dx \\ &\quad = -\frac{1}{2} \sum \text{Résidus de la détermination choisie de} \\ &\qquad f(z)(\log z)^2 \text{aux pôles de } f(z)\end{aligned}$$

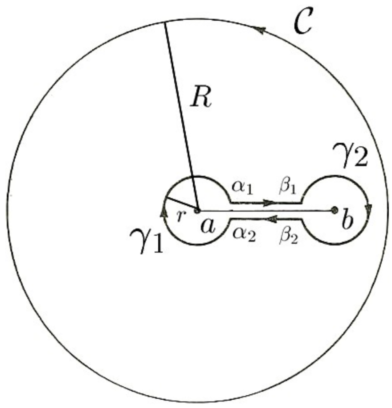
et il suffit de comparer partie réelle et partie imaginaire pour obtenir les intégrales en question. Notons que dans le cas particulier où $f(x)$ est paire, on peut obtenir le même résultat en considérant le circuit suivant :



avec $\gamma = \gamma_1 \cup [-R, -r] \cup \gamma_2 \cup [r, R]$.

$$\underline{\text{Type III}} : \int_a^b f(x) \sqrt[n]{(x-a)^k (b-x)^{n-k}} dx,$$

où f est une fraction rationnelle n'ayant pas de pôles sur l'intervalle $[a, b]$ et n, k sont de entiers avec $0 < k < n$. Notons que $f(z) \sqrt[n]{(z-a)^k (b-z)^{n-k}}$ est multiforme à n déterminations.



On calcule l'intégrale

$$\int_\gamma f(z)\sqrt[n]{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}dz,$$

où $\gamma=\gamma_1\cup[\alpha_1,\beta_1]\cup\gamma_2\cup[\beta_2,\alpha_2]$, $\gamma_1=\{z:|z-a|=r\}$, $\gamma_2=\{z:|z-b|=r\}$. La coupure rend l'intégrant uniforme sur γ. Posons

$$\varphi(z)=f(z)\sqrt[n]{(z-a)^k(b-z)^{n-k}}.$$

On choisira la détermination de l'intégrant telle que : $\varphi(z)$ sera égal à $\varphi(x)$ sur le bord supérieur de la coupure. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre a (arbitraire) et de rayon R (voir figure ci-dessus). On obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{C}}\varphi(z)dz+\int_{\gamma^-}\varphi(z)dz\\&=2\pi i\sum\text{Résidus de la détermination choisie de }\varphi(z)\text{ aux pôles de }f(z).\end{aligned}$$

Le reste consiste à calculer les limites de ces intégrales quand $R\to\infty$ et $r\to 0$. Les intégrales sur γ_1 et γ_2 tendent vers 0 en vertu du lemme de Jordan. L'intégrale sur $[\alpha_1,\beta_1]$ tend vers l'intégrale que l'on cherche à calculer et que l'on note I. Pour passer de $[\alpha_1,\beta_1]$ à $[\beta_2,\alpha_2]$, z décrit le cercle γ_2 de centre b dans le sens négatif. Dans ce cas, l'argument de $b-z$ augmente de -2π tandis que $z-a$ reste inchangé. Dès lors, $\varphi(z)$ augmente de $-\frac{2\pi(n-k)}{n}$ car $(b-z)^{n-k}$ augmente de $-2\pi(n-k)$. Donc l'intégrale sur $[\beta_2,\alpha_2]$ tend vers $-e^{-\frac{2\pi i(n-k)}{n}}I$. Par conséquent,

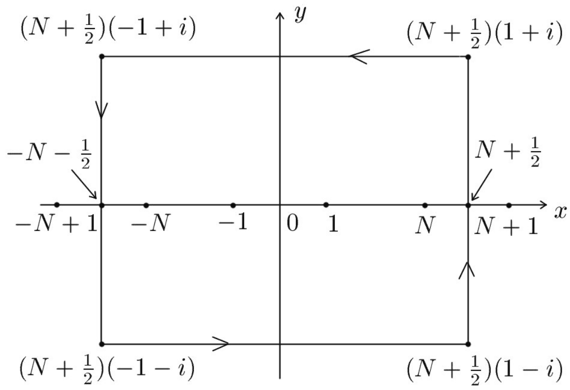
$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}}\varphi(z)dz+\left(1-e^{-\frac{2\pi i(n-k)}{n}}\right)I\\&=2\pi i\sum\text{Résidus de la détermination choisie de }\varphi(z)\text{ aux pôles de }f(z),\end{aligned}$$

et le calcul de I s'en déduit aisément. Signalons que souvent le calcul de la limite ci-dessus lorsqu'elle n'est pas nulle se fait en développant l'intégrant en série de Laurent.

Remarque 94 *D'autres types d'intégrales que ceux présentés ici peuvent être traités par la méthode des résidus (voir les exercices proposés à la fin de ce chapitre).*

c) Calcul de la somme de certaines séries.

Le théorème des résidus peut-être utilisé pour calculer la somme de certaines séries. Soit C_N le carré de sommets $\left(N+\frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)$, $N = 1, 2, 3, ...$



Proposition 95 *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre de pôles $z_1, ..., z_p \notin \mathbb{Z}$. On choisit N suffisamment grand pour que C_N contienne tous les pôles de f et on suppose que sur C_N, $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^n}$, $n > 1$ où M est une constante indépendante de n (on pourra remplacer cette condition par celle-ci : $\lim_{|z|\to\infty} |zf(z)| = 0$). Alors,*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = -\pi \sum_{j=1}^{p} Rés(f(z)\cot \pi z, z_j),$$

et

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f(k) = -\pi \sum_{j=1}^{p} Rés\left(\frac{f(z)}{\sin \pi z}, z_j\right).$$

3.5 Exercices

Exercice 3.5.1 *Soit $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans la couronne ouverte $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$. Montrer que f peut être représentée dans Δ de façon unique par une série de la forme*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

avec

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta, \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

où γ est un chemin fermé entourant z_0 et contenu dans la couronne. Montrer que cette série converge absolument vers f dans Δ et converge uniformément dans toute couronne fermée contenue dans Δ.

Exercice 3.5.2 *Montrer que si z_0 est un pôle d'ordre m de la fonction f(z), alors celle-ci s'écrit sous la forme $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, avec g(z) holomorphe au voisinage de z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$.*

Exercice 3.5.3 *Déterminons les premiers termes du développement de Laurent de $\dfrac{1}{\sin z}$, au voisinage de $z = 0$ dans le disque D^* de centre 0, privé de son centre, et de rayon π.*

Exercice 3.5.4 *Même question pour $\dfrac{1}{(z-1)^2(z-4)^3}$, au voisinage de $z = 1$, dans le disque ouvert D^* de centre 1, privé de son centre, et de rayon 3.*

Exercice 3.5.5 *Trouver et qualifier les points singuliers de la fonction définie par $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z+i)}$.*

Exercice 3.5.6 *Montrer que $z = 0$ est un point singulier essentiel de la fonction $e^{\frac{1}{z}}$.*

Exercice 3.5.7 *Développer en série de Laurent la fonction $e^z + e^{\frac{1}{z}}$, autour de l'origine du plan complexe.*

Exercice 3.5.8 *Développer en série de Laurent la fonction $f(z) = -\frac{2}{(z-1)(z+1)}$, autour de $z = 1$, dans les couronnes : $0 < |z-1| < 2$ et $2 < |z-1|$.*

Exercice 3.5.9 *a) Montrer que lorsque z_0 est un pôle d'ordre m de $f(z)$, alors*

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_0)^m f(z)\right).$$

b) Montrer que lorsque z_0 est un pôle simple de la fonction $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, avec $P(z_0) \neq 0$ et $Q(z_0) = 0$, alors

$$\text{Rés}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \text{ si } Q'(z_0) \neq 0.$$

Exercice 3.5.10 *Calculer les résidus de la fonction*

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2},$$

en tous les pôles à distance finie.

Exercice 3.5.11 *Calculer le résidu de la fonction*

$$f(z) = \frac{\cos z.\ chz}{z^3 \sin z.\ shz},$$

au point $z = 0$.

Exercice 3.5.12 *Calculer le résidu de la fonction $e^{\frac{1}{z}}$ au point $z = 0$.*

Exercice 3.5.13 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : \Omega \backslash \{z_1, z_{2,\dots}, z_k\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j),$$

où γ est un chemin fermé contenu dans Ω à l'intérieur duquel sont contenus tous les z_j.

Exercice 3.5.14 *Calculer l'intégrale*

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} dz,$$

où γ est le cercle de centre 0 et de rayon respectivement : $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ et 3.

Exercice 3.5.15 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans un domaine simplement connexe Ω. Soit γ un chemin fermé contenu dans Ω entourant tous les pôles et zéros de $f(z)$ dans Ω. Montrer que*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{f'(z)} dz = ind_{fo\gamma}(0),$$

où N est le nombre de zéros et P le nombre de pôles dans Ω. (Tous ces points sont comptés avec leur ordre de multiplicité).

Exercice 3.5.16 *a) Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions méromorphes dans un domaine simplement connexe Ω et sur sa frontière γ. Supposons qu'en tout point de γ, on ait $|f(z)| > |g(z)|$. Montrer que $f(z)$ et $f(z)+g(z)$ ont le même nombre de zéros dans Ω.*

b) En déduire que tout polynôme de degré n possède n zéros.

c) Déterminer le nombre de zéros de la fonction $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$ dans le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Exercice 3.5.17 *Soit f une fonction continue sur le secteur : $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq 2\pi$.*

a) Montrer que si $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, alors

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0,$$

où γ_r est l'arc de cercle de rayon compris entre les angles θ_1 et θ_2.

b) Montrer que si $\lim_{|z|\to 0} zf(z) = 0$, alors

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = 0,$$

où γ_r est l'arc de cercle de rayon compris entre les angles θ_1 et θ_2.

Exercice 3.5.18 *Soit f une fonction continue sur le secteur : $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$. Montrer que si $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$, alors*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} f(z)e^{imz}dz = 0, \quad m > 0$$

où γ_r est l'arc de cercle de rayon compris entre les angles θ_1 et θ_2.

Exercice 3.5.19 *Soient $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ et*

$$\gamma_\varepsilon : [\theta_1, \theta_2] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \theta \longmapsto z_0 + \varepsilon e^{i\theta},$$

un chemin dont l'image est un arc de cercle (voir figure p.91).

a) Montrer que si f est holomorphe sur $\gamma_\varepsilon(z_0)$ pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et possèdant un pôle simple en z_0, alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon(z_0)} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)Rés(f, z_0),$$

où $Rés(f, z_0) = \lim\limits_{\substack{z\to z_0 \\ \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2}} (z - z_0)f(z)$ est le résidu de f en z_0.

b) Montrer que si f est holomorphe sur $\gamma_r(z_0)$ pour r assez grand et possèdant un pôle simple en z_0, alors

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r(z_0)} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)Rés(f, z_0),$$

où $Rés(f, z_0) = \lim\limits_{\substack{|z|\to+\infty \\ \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2}} (z - z_0)f(z)$.

Exercice 3.5.20 *Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :*

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta}$,

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sin\theta}$, $a > 1$.

Exercice 3.5.21 *Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :*

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}$, $a > b > 0$.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos^2\theta)^2}$, $a > 0,\ b > 0$.

Exercice 3.5.22 *Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta.$$

Exercice 3.5.23 *Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :*

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.

Exercice 3.5.24 *Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :*

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}dx$.

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+1}dx$.

Exercice 3.5.25 *Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx.$$

Exercice 3.5.26 *Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Exercice 3.5.27 *Calculer l'intégrale suivante par la méthode des résidus :*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 kx}{x^2}dx, \quad k > 0.$$

Exercice 3.5.28 *Calculer les intégrales de Fresnel :*

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx, \qquad \int_0^\infty \sin x^2 dx.$$

Exercice 3.5.29 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx, \quad 0 < a < 1$$

Exercice 3.5.30 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}-e^{bx}}{1+e^x} dx, \quad 0 < a, b < 1$$

Exercice 3.5.31 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx dx, \quad a > 0, b > 0$$

Exercice 3.5.32 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x)x} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Exercice 3.5.33 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx.$$

Exercice 3.5.34 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^1 \sqrt[4]{x^3(1-x)} dx,$$

en utilisant

a) un calcul direct.

b) la méthode des résidus.

Exercice 3.5.35 *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre de pôles $z_1, ..., z_p \notin \mathbb{Z}$ et soit C_N le carré de sommets $\left(N+\frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)$, $N = 1, 2, 3, ...$ On choisit N suffisamment grand pour que C_N contienne tous les pôles de f et on suppose que sur C_N,*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^n}, \quad n > 1$$

où M est une constante indépendante de n (on pourra remplacer cette condition par celle-ci : $\lim_{|z|\to\infty}|zf(z)| = 0$).

a) Montrer que la fonction $\cot \pi z$ est bornée sur C_N.

b) Montrer que :

$$\lim_{N\to\infty}\int_{C_N}\pi f(z)\cot \pi z dz = 0.$$

c) En déduire que :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = -\pi\sum_{j=1}^{p} Rés\left(f(z)\cot \pi z, z_j\right).$$

d) Montrer que :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k f(k) = -\pi\sum_{j=1}^{p} Rés\left(\frac{f(z)}{\sin \pi z}, z_j\right).$$

Exercice 3.5.36 *En utilisant la méthode des résidus, déterminer la somme des séries suivantes :*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+a^2}, \quad a \neq 0.$

b) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+a)^2}, \quad a \neq \mathbb{Z}.$

Exercice 3.5.37 *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf en un nombre fini de points $a_1, a_2, ..., a_n$. Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} Rés(f, a_k) + Rés(f, \infty) = 0.$$

Exercice 3.5.38 *Calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx, \quad a > 0, b > 0$$

Exercice 3.5.39 *a) On considère une fonction f définie et bornée en module pour $0 < |z| \leq r_0$. Soit a un point singulier isolé de f. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe en a.*

b) En déduire le théorème de Casorati-Weierstrass : si f est une fonction holomorphe sur un disque épointé $D(a,r)\backslash\{a\}$ avec une singularité essentielle en a, alors pour tout $k \in]0, r[$, l'image de $(D(a,r)\backslash\{a\})$ par f est dense dans $\mathbb{C}$.

Chapitre 4

Suites et produits infinis(*compléments*)

Ce chapitre est un complément de cours (donc pas au programme des évaluations).

4.1 Suites de fonctions holomorphes, séries de fonctions holomorphes, théorème de Weierstrass

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 96 *On dit qu'une suite de fonctions (f_n) définies sur Ω converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ si, quel que soit le compact $K \subset \Omega$, la suite des restrictions $f_n|_K$ converge uniformément vers $f|_K$. Autrement dit, si*

$$\forall K \subset \Omega, \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n(z) - f(z)\|_K = 0,$$

où $\|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)|$ est la norme de la convergence uniforme sur K. De même, on dira que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact si et seulement si pour tout compact $K \subset \Omega$, la série des restrictions $\sum f_n|_K$ converge uniformément, c-à-d., la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} f_k|_K)$ converge uniformément (resp. s'il existe une suite (a_n) de réels positifs, telle que : $|f_n(z)| \leq a_n$, $\forall z \in K$ et $\sum a_n$ converge).

Théorème 97 *(Weierstrass). 1) Si (f_n) est une suite de fonctions holomorphes sur Ω qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f, alors* *a) f est holomorphe dans Ω.*

b) la suite des dérivées $\left(f_n^{(k)}\right)$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$.

2) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que cette série converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω. Alors

a) la somme de cette série est holomorphe sur Ω.

b) la série est dérivable terme à terme sur Ω. En outre, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω.

Exemple 98 *Toute série entière converge uniformément sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence.*

Remarques 99 *a) La conclusion du théorème ci-dessus n'est pas vraie en général dans le cas des fonctions de variable réelle : le fait que la convergence uniforme sur tout compact entraîne le même type de convergence pour les suites (séries) des dérivées est faux dans le domaine réel.*

b) En pratique, on peut utiliser le fait qu'une suite de fonctions (f_n) définies sur Ω converge uniformément sur tout compact de Ω si et seulement si elle converge uniformément sur tout disque compact de Ω. En effet, tout compact peut être recouvert par un nombre fini de disques compacts.

c) Rappelons que la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues est une fonction continue.

4.2 Espace des fonctions holomorphes, théorème de Montel et ses conséquences

Soit $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Comme une fonction holomorphe n'est pas toujours bornée, on ne peut considérer sur $\mathcal{H}(\Omega)$ la norme de la borne supérieure. Par contre, on peut considérer un compact quelconque K de Ω et poser $\|f\|_K = \sup_{z\in K}|f(z)|$, qui est toujours une quantité finie. L'application $P_K : f \longmapsto \|f\|_K$, est une semi-norme sur $\mathcal{H}(\Omega)$ (en fait, cette application vérifie tous les axiomes d'une norme sauf l'implication $\|f\|_K = 0 \Longrightarrow f = 0$). On cherche une quantité qui tient compte de tous les compacts à la fois. Pour cela, on choisit une suite exhaustive de compacts dont la définition est la suivante :

Définition 100 *On dit qu'une suite de compacts (K_n) de Ω est exhaustive si $K_n \subset K_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et si tout compact de Ω est contenu dans l'un des K_n.*

On peut choisir les compacts K_n tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$, c-à-d., une suite strictement exhaustive. En outre, on a $\bigcup_n K_n = \Omega$.

Tout compact K de Ω est strictement intérieur à un compact K_n de la suite considérée (toute sous-suite infinie de K_n est encore exhaustive).

Exemple 101 *Tout ouvert de $\mathbb{C}$ possèede au moins une suite exhaustive de compacts comme celle donnée par*

$$K_n = \overline{D}(0,n) \cap \left\{ z \in \mathbb{C} : d(z, \mathbb{C} \backslash U) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Exemple 102 *Pour le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, il suffit de prendre pour K_n le disque fermé $\left\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r - \frac{1}{n}\right\}$.*

Exemple 103 *Pour $\Omega = \mathbb{C}$, on pourra prendre pour K_n le disque fermé $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\}$.*

On note $P_n(f) = ||f||_{K_n}$.

Proposition 104 *Soient f_n et f des fonctions holomorphes sur Ω. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de Ω.
ii) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n \to \infty} P_m(f_n - f) = 0$.

L'espace des fonctions holomorphes $\mathcal{H}(\Omega)$, n'est pas un espace vectoriel normé. La distance de deux éléments de $\mathcal{H}(\Omega)$, que nous définirons, ne parviendra pas d'une norme. Elle est définie par

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{P_n(f-g)}{1 + P_n(f-g)}.$$

Cette série converge car son $n^{\text{ième}}$ terme est majoré par $\frac{1}{2^n}$ et on vérifie aisément que d est bien une distance sur $\mathcal{H}(\Omega)$.

Proposition 105 *Soient f_n et f des fonctions holomorphes sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de Ω.
ii) $\lim\limits_{n \to \infty} d(f_n, f) = 0$.

Remarque 106 *La distance qui a été définie sur $\mathcal{H}(\Omega)$ peut très bien se définir sur l'espace $\mathcal{C}(\Omega)$ des fonctions continues à valeurs complexes sur Ω. Alors, $\mathcal{C}(\Omega)$ est complet pour cette distance, $\mathcal{H}(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}(\Omega)$, $\mathcal{H}(\Omega)$ est complet, l'application linéaire*

$$\mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega), \quad f \longmapsto f',$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Proposition 107 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant vers f sur tout compact de Ω.*

a) Si les fonctions f_n sont sans zéros dans Ω, alors ou bien f est identiquement nulle, ou bien sans zéros.

b) Si les fonctions f_n sont injectives sur Ω, alors f est soit injective, soit constante.

Définition 108 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une partie A de $\mathcal{H}(\Omega)$ est dite bornée si, pour tout compact K inclus dans Ω, il existe une constante M_K telle que :*

$$\forall f \in A, \quad \|f(z)\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)| \leq M_K.$$

Autrement dit, les éléments de A sont uniformément bornée sur tout compact de Ω.

Remarque 109 *L'adjectif borné dans la définition ci-dessus n'est pas celui des espaces métriques puisque $\mathcal{H}(\Omega)$ tout entier coincide avec sa boule unité pour la métrique de la convergence uniforme sur tout compact, donc non borné au sens évoqué ci-dessus. Le sens de borné ci-dessus trouve sa justification dans la propriété suivante : une partie A d'un espace vectoriel normé est bornée (au sens métrique) si et seulement si pour tout voisinage V de 0, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda V$, autrement dit si A est absorbé par tout voisinage de 0. Dans le cas d'un espace vectoriel topologique non normé, on conserve la même définition. Ainsi, le sens du mot borné utilisé ici est celui qui correspond à la structure d'espace vectoriel topologique de $\mathcal{H}(\Omega)$ et non à celle de l'espace métrique.*

Proposition 110 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et A une partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega)$. Alors l'adhérence $\overline{A}$ est également bornée dans $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Proposition 111 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors l'application $f \longmapsto f'$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ dans lui même, transforme toute partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega)$ en une partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Le résultat de Montel suivant se démontre à l'aide du théorème d'Ascoli bien connu en topologie.

Théorème 112 *(Montel). Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Si cette suite est uniformément bornée sur tout compact de Ω, alors elle admet une suite extraite (f_{n_k}) qui converge uniformément sur tout compact de Ω vers une limite f qui est holomorphe dans Ω.*

Conséquences du théorème de Montel : Dans $\mathcal{H}(\Omega)$, tout fermé borné est compact. Il n'existe aucune norme dont la topologie est celle de $\mathcal{H}(\Omega)$.

4.3 Séries de fonctions méromorphes, théorème de Mittag-Leffler

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, A une partie de Ω et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur Ω.

Définition 113 *On dit que la série $\sum f_n$ converge (resp. converge uniformément, resp.converge normalement) sur A si*

i) il existe un entier N tel que : pour $n > N$, f_n n'ait pas de pôles sur A.

ii) la série $\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n$ converge (resp. converge uniformément, resp. converge normalement) sur A.

La somme de la série est définie dans A par :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} f_n(z) + \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z), \quad z \in A$$

Remarque 114 *La définition précédente est évidemment la même pour une série $\sum f_n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. On remplacera $n > N$ par $|n| > N$.*

Théorème 115 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que cette série converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω. Alors,*

1) la somme f de cette série est méromorphe sur Ω.

2) la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω et sa somme est $f^{(k)}$.

Exemple 116 *La série*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Soit f une fonction méromorphe de pôles : a_1, a_2, a_3, ... et soit

$$g_n(z) = \frac{a_{-1}^{(n)}}{z-a_n} + \frac{a_{-2}^{(n)}}{(z-a_n)^2} + \cdots + \frac{a_{-p_n}^{(n)}}{(z-a_n)^{p_n}},$$

la partie principale du développement en série de Laurent de f au voisinage de a_n.

Théorème 117 *(Mittag-Leffler). Pour toute suite de points $a_n \in \mathbb{C}$ sans valeur d'adhérence et toute suite de fonctions g_n de la forme ci-dessus, il existe une fonction méromorphe f ayant pour seuls pôles les points a_n et pour tout n, la partie principale g_n.*

Corollaire 118 *Toute fonction méromorphe f admet un développement en une série de la forme*

$$f = h + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - P_n),$$

où h est une fonction entière, g_n les parties principales de f et P_n des polynômes. En outre, cette série converge uniformément sur tout compact.

Remarque 119 *Soit*

$$C_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_n\},\ r_1 < r_2 < \ldots,\ \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

une famille de cercles et soit f une fonction méromorphe. On suppose que sur C_n, la fonction f croît moins vite que z^n (c-à-d. il existe une constante A telle que : $\forall z \in C_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $|f(z)| \leq A|z|^m$). On montre qu'on peut prendre dans le développement obtenu dans le théorème précédent, P_n et h des polynômes de degré $\leq m$.

4.4 Produits infinis de fonctions holomorphes

Pour un rappel des propriétés de base concernant les produits infinis, voir appendice 2.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans Ω. Rappelons que le produit infini $\prod_{n\geq 1} f_n(z)$ converge dans Ω si la suite (P_n) (où $P_n = \prod_{k=1}^{n} f_k$) de fonctions holomorphes converge uniformément sur tout compact de Ω. Dans ce cas, la fonction $f(z) = \lim_{n\to\infty} P_n(z)$ est holomorphe dans Ω, en vertu du théorème de Weierstrass. Nous avons considéré le produit infini indexé par les entiers strictement positifs mais il est évident qu'on peut envisager des produits infinis dont les facteurs sont indexés à partir de 0 au lieu de 1 ou même considérer une partie infinie I de $\mathbb{N}$ comme ensemble d'indices, par exemple le cas où I est la suite des nombres premiers.

Définition 120 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans Ω et A une partie de Ω. On dit que le produit infini $\prod f_n(z)$, converge normalement sur A si :*

i) $f_n(z)$ tend uniformément vers 1, sur A, c-à-d.,

$$\exists n_0 \in N : \ n \geq n_0,\ z \in A \Rightarrow |f_n - 1| < 1.$$

ii) La série $\sum_{n\geq n_0} \log f_n(z)$, converge normalement sur A.

D'après l'hypothèse i), la suite (f_n) converge uniformément vers 1 sur A, donc la suite $(\log f_n)$ est bien définie à partir d'un certain rang sur A, ce qui entraîne que la détermination principale $\log f_n(z)$ est définie sur A. Comme log est la détermination principale du logarithme complexe (sa partie imaginaire est dans $]-\pi,\pi[$), $\log f_n(z)$ est défini et l'on a

$$\log P_n(z) = \log \prod_{k=k_0}^{n} f_k = \sum_{k=k_0}^{n} \log f_k(z).$$

Par ailleurs, sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_x^-$, on sait que log est continue, donc si la série $\sum_{k=k_0}^{\infty} \log f_k$ converge uniformément sur un compact de $\mathbb{C}$, alors

$$\log \lim_{n\to\infty} P_n(z) = \lim_{n\to\infty} \log P_n(z) = \sum_{k=k_0}^{n} \log f_k(z) = g(z),$$

et g est une fonction continue. Dès lors,

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} f_k(z) = \lim_{n\to\infty} P_n(z) = e^{g(z)}.$$

Proposition 121 *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit A une partie de Ω et posons $f_n = 1 + u_n$. Alors le produit infini $\prod f_n(z)$ converge normalement sur A si et seulement si la série $\sum u_n$ converge normalement sur A.*

Définition 122 *On dit que le produit infini $\prod f_n$ converge normalement sur tout compact de Ω si, pour tout compact $K \subset \Omega$, $\prod f_n$ converge normalement sur K.*

Théorème 123 *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que le produit infini $\prod f_n$ converge normalement sur tout compact de Ω. Alors,*

a) $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ est holomorphe sur Ω.

b) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f = f_1 f_2 ... f_p \prod_{n=p+1}^{\infty} f_n$.

c) $Z(f) = \bigcup_n Z(f_n)$, $m_Z(f) = \sum_n m_Z(f_n)$, où $Z(f)$ (resp. $Z(f_n)$) désigne l'ensemble des zéros de f (resp. f_n) et $m_Z(f)$ (resp.$m_Z(f_n)$) est l'ordre de multiplicité du zéro de f (resp. f_n).

Théorème 124 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans Ω telle que le produit infini $\prod f_n$ converge normalement sur tout compact de Ω. Soit $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$. Alors la série de fonctions méromorphes $\sum \frac{f_n'}{f_n}$, converge normalement sur tout compact de Ω et sa somme est la dérivée logarithmique,*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}.$$

4.5 Fonctions définies par une intégrale, fonctions gamma et bêta d'Euler, transformée de Laplace

Proposition 125 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z,t) \longmapsto f(z,t)$, une fonction. Si f est continue sur $\Omega \times [a,b]$, holomorphe en z (t étant fixé) et si $(z,t) \longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z,t)$ est continue, alors la fonction F définie par l'intégrale $F(z) = \int_a^b f(z,t)dt$ est holomorphe dans Ω et sa dérivé est*

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Proposition 126 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant un chemin $\mathcal{C}^1$ (c-à-d., une application $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$, de classe $\mathcal{C}^1$, $a < b$) orienté. Supposons que pour ξ fixé, la fonction*

$$f : \Omega \times \gamma \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (z,\xi) \longmapsto f(z,\xi),$$

est holomorphe dans Ω et continue sur $\Omega \times \gamma$ ainsi que sa dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z,\xi)$. Alors la fonction F définie par $F(z) = \int_\gamma f(z,\xi)dt$ est holomorphe dans Ω et sa dérivée est

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,\xi)d\xi.$$

Théorème 127 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $]a,b[$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ où a et b peuvent être finis ou infinis. On considère l'intégrale suivante : $F(z) = \int_a^b f(z,t)dt$, dépendant d'un paramètre complexe z. On suppose que pour tout $t \in]a,b[$ la fonction $z \longmapsto f(z,t)$ est holomorphe dans Ω et qu'il existe une fonction positive $\varphi :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) $\forall t \in]a,b[$, $\forall z \in \Omega$, $|f(z,t)| \leq \varphi(t)$.

(ii) l'intégrale $\int_a^b \varphi(t)dt$ est convergente.

Alors, la fonction F est holomorphe dans Ω et sa dérivée est

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Remarque 128 *Le théorème précédent, lorsqu'il est applicable, est souvent utilisé en pratique. En fait, sous ces conditions, on a*

$$F^{(n)}(z) = \int_a^b \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,t)dt.$$

Le théorème est évidemment valable pour $\Omega = \bigcup_k \Omega_k$, réunion infinie de parties Ω_k de Ω où sur chacune on a une majorante φ_k avec $\sup_k \varphi_k = \infty$. On montre que la fonction F est holomorphe sur chaque Ω_k et dès lors sur Ω.

Fonctions gamma et bêta d'Euler :

La fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$, se définit par l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad \text{Re } z > 0$$

où $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$, $t \in]0, +\infty[$. Il existe plusieurs manières d'introduire la fonction Γ d'Euler et celle-ci possède de nombreuses propriétés remarquables.

Proposition 129 *La fonction $\Gamma(z)$ est holomorphe pour Re $z > 0$. En outre, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ où Re $z > 0$, l'expression*

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)^n t^{z-1}dt.$$

Proposition 130 *La fonction $\Gamma(z)$ vérifie la relation fonctionnelle suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \ \textit{Re } z > 0,$$

ce qui implique la relation de récurrence :

$$\Gamma(n+1) = n!, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 131 *On peut prolonger la fonction $\Gamma(z)$ au moyen de la formule $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, Re $z > 0$, en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$.*

Proposition 132 *Pour Re $z > 0$, on a*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt.$$

Proposition 133 *On a*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^z.n!}{n(z+1)...(z+n)}, \quad \textit{Re } z > 0$$

Proposition 134 *On a pour Re $z > 0$, la formule de Weierstrass :*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}, \quad \textit{Re } z > 0$$

où $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n\right) = 0,57721...$, est la constante d'Euler.

Proposition 135 *Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, on a la formule des compléments :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}.$$

On définit la fonction bêta d'Euler par

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt,\quad \mathrm{Re}\ p>0, \mathrm{Re}\ q>0.$$

Proposition 136 *La fonction $p\longmapsto B(p,q)$ est holomorphe pour Re $p>0$, $q\in\mathbb{C}$ fixé, Re $q>0$. De même, la fonction $q\longmapsto B(p,q)$ est holomorphe pour Re $q>0$, $p\in\mathbb{C}$ fixé, Re $p>0$.*

Proposition 137 *On a*

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad Re\ p>0, Re\ q>0$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler définie précédemment.

Transformée de Laplace :

Rappelons (voir appendice 3) qu'une fonction f n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuité est sommable si et seulement si $|f|$ est intégrable au sens de Riemann. Lorsque l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, il ne s'agit pas d'intégrales généralisée car il y a convergence absolue. Dans la pratique, pour prouver qu'une fonction est sommable, il suffit de montrer qu'elle est majorée en module par une fonction positive dont l'intégrale est convergente. (Le lecteur peut s'il le désire mettre dans tout ce qui va suivre à la place de sommable absolument intégrable).

Définition 138 *Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), une fonction localement sommable. On appelle transformée de Laplace de $f(x)$ la fonction notée $\mathcal{L}\{f(x)\}$ ou $F(p)$ de la variable complexe $p=\sigma+i\omega$ définie par*

$$\mathcal{L}\{f(x)\}=F(p)=\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx.$$

La fonction f est appelée original de F et F l'image de f.

Proposition 139 *Si l'intégrale ci-dessus converge pour Re $p=\sigma_0$, alors il en est de même pour tout p tel que : Re $p\geq\sigma_0$.*

Définition 140 *Soit $f\in\mathcal{L}_{loc}([0,+\infty[)$. Le nombre*

$$\sigma_0=\inf\{\sigma\in\mathbb{R}: f(x)e^{\sigma x}\in\mathcal{L}_{loc}([0,+\infty[)\},$$

s'appelle abscisse de sommabilité ou abscisse de convergence absolue de la fonction f. Le demi-plan de convergence $\{p=\sigma+i\omega : Re\ p=\sigma>\sigma_0\}$ est le domaine de sommabilité sur lequel $F(p)$ est défini.

Exemple 141 *La transformée de Laplace de la fonction d'Heaviside $H(x)$ égale à 1 si $x \geq 0$, 0 si $x \leq 0$, est*

$$\mathcal{L}\{H(x)\} = \int_0^\infty e^{-px}dx = \lim_{u\to\infty} \frac{1-e^{pu}}{p} = \frac{1}{p},$$

pourvu que $Re\ p > 0$, c'est-à-dire l'abscisse de sommabilité est $\sigma_0 = 0$.

Proposition 142 *a) (Linéarité). La transformée de Laplace est une application linéaire. Plus précisément, pour toutes fonctions f, g, d'abscisses de sommabilité respectives σ_0, ς_0, alors, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(x)\} + \beta\mathcal{L}\{g(x)\}, \quad Re\ p > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}.$$

b) (Translation). Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{f(x-c)\} = e^{-cp}F(p), \quad Re\ p > \sigma_0.$$

c) Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{f(x)e^{-\alpha x}\} = F(p+\alpha), \quad Re(p+\alpha) > \sigma_0.$$

d) (Changement d'échelle). Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{f(cx)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{p}{c}\right), \quad c > 0.$$

e) (Conjugaison complexe). Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors

$$\mathcal{L}\{\overline{f}(x)\} = \overline{F}(\overline{p}).$$

Exemple 143 *Les transformées de Laplace des fonctions exponentielle et trigonométriques sont*

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha x}\} = \int_0^\infty e^{-(\alpha+p)x}dx = \frac{1}{\alpha+p}, \quad Re\ p > -Re\ \alpha$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos\omega x\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}\right\},\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{i\omega x}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-i\omega x}\},\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-i\omega+p}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i\omega+p}\right),\\
&= \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad Re\ p > 0
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}\{\sin\omega x\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right\} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad Re\ p > 0.$$

Proposition 144 *La transformée de Laplace d'une fonction localement sommable f, est une fonction holomorphe dans le domaine $\{p \in \mathbb{C} : Re\ p > \sigma_0\}$ et on a la formule*

$$F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-x)^n f(x) e^{-px} dx = (-1)^n \mathcal{L}\{x^n f(x)\}.$$

Exemple 145 *Déterminons la transformée de Laplace de x^n. D'après la proposition précédente, on a $\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(p)$. Ici $f(x) = 1$ et $F(p) = \frac{1}{p}$, d'où*

$$\mathcal{L}\{x^n\} = (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)}.$$

Explicitement, on a

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{p^2}, \quad \mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2}{p^3}, \quad \ldots \quad , \mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

On peut écrire $\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$ où Γ est la fonction gamma d'Euler.

Proposition 146 *Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$ et $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(p)$, alors*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\} = F(p)G(p), \quad Re\ p > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}$$

où

$$f * g)(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt,$$

est le produit de convolution de f et g, σ_0 et ς_0 sont les indices de sommabilité de f et g respectivement

Proposition 147 *Soit f une fonction localement sommable. On suppose que pour tout $x > 0$, f est continue, sa dérivée $f'(x)$ existe et est continue par morceaux. S'il existe des constantes $M > 0$ et σ_0 telles que : $|f(x)| \leq Me^{\sigma_0 x}$, pour tout $x \geq x_0$, alors*

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = p\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+) = pF(p) - f(0^+), \quad Re\ p > \sigma_0$$

Proposition 148 *Si $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$, alors*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) dt\right\} = \frac{F(p)}{p}, \quad Re\ p > \max(0, \sigma_0).$$

Proposition 149 *(comportement à l'infini). Si f est une fonction ayant un abscisse de sommabilité σ_0, alors pour $Re\ p > \sigma_0$, on a*

$$\lim_{p \to \infty} F(p) = 0.$$

Proposition 150 *(théorème de la valeur initiale). Soit f une fonction ayant une transformée de Laplace et telle que $f(0^+)$ existe. Alors,*

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0^+).$$

Proposition 151 *(théorème de la valeur finale). Soit f une fonction ayant une transformée de Laplace et telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ existe et est finie. Alors,*

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(+\infty).$$

Considérons l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda} F(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\lambda}^{\sigma+i\lambda}\left(\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx\right)e^{pt}dp,$$

où $F(p)$ est la transformée de Laplace de f. En posant $p=\sigma+i\omega$, $dp=id\omega$, l'intégrale ci-dessus s'écrit

$$\frac{1}{2\pi}e^{\sigma t}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(\int_0^\infty (e^{-\sigma x}f(x))e^{-i\omega x}dx\right)e^{i\omega t}d\omega.$$

Proposition 152 *Soit $F(p) = F(\sigma+i\omega)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{p\in\mathbb{C} : Re\ p > \sigma_0\}$. On suppose que $\lim_{|p|\to+\infty}|F(p| = 0$ pour $Re\ p > \sigma_0$ et pour tout $\sigma > \sigma_0$, la fonction $\omega\in\mathbb{R}\longmapsto F(\sigma+i\omega)$, est sommable sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire F est une fonction sommable en ω, pour tout $\sigma>\sigma_0$). Alors l'original f de F est donné par la formule de Bromwich-Wagner suivante :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{px}dp, \quad \sigma > \sigma_0$$

Dans l'intégrale de Bromwich-Wagner, l'intégration de la fonction d'une variable complexe se fait le long d'une droite parallèle à l'axe imaginaire d'abscisse $\sigma > \sigma_0$, située dans le domaine de convergence et parcourue de bas en haut. Toutes les singularités de $F(p)$ sont à gauche de cette droite, puisque celle-ci est située à droite de l'abscisse de sommabilité σ_0. Dans certains cas, il est nécessaire de calculer cette intégrale, en utilisant les techniques d'intégration d'une fonction d'une variable complexe, notamment la méthode habituelle des résidus.

4.6 Exercices

Exercice 4.6.1 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que cette série converge uniformément sur tout compact de Ω. Montrer que* *a) la somme de cette série est holomorphe sur Ω.*

b) la série est dérivable terme à terme sur Ω. En outre, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout compact de Ω.

Exercice 4.6.2 *Soient f_n et f des fonctions holomorphes sur Ω. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de Ω si et seulement si, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_m(f_n - f) = 0$ où $P_n(f) = ||f||_{K_n}$ ((K_n) étant une suite exhaustive de compacts de Ω).*

Exercice 4.6.3 *Soient f_n et f des fonctions holomorphes sur $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact de Ω si et seulement si, on a $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$ où*

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{P_n(f-g)}{1+P_n(f-g)},$$

avec $P_n(f) = \|f\|_{K_n}$, (K_n) étant une suite exhaustive de compacts de Ω.

Exercice 4.6.4 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant vers f sur tout compact de Ω. Montrer que si les fonctions f_n sont sans zéros dans Ω, alors ou bien f est identiquement nulle, ou bien sans zéros.*

Exercice 4.6.5 *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$. Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant vers f sur tout compact de Ω. Montrer que si les fonctions f_n sont injectives sur Ω, alors f est soit injective, soit constante.*

Exercice 4.6.6 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et A une partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega)$. Montrer que l'adhérence $\overline{A}$ est également bornée dans $\mathcal{H}(\Omega)$.*

Exercice 4.6.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que l'application*

$$\mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega), \quad f \longmapsto f',$$

transforme toute partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega)$ en une partie bornée de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Exercice 4.6.8 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On suppose que cette série converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω. Montrer que la somme f de cette série est méromorphe sur Ω et qu'en outre, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω et sa somme est $f^{(k)}$.*

Exercice 4.6.9 *On considère la série*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}.$$

1) *Montrer que cette série converge normalement sur tout compact de* $\mathbb{C}$.

2) *On pose*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}.$$

a) Montrer que $f(z)$ *est périodique de période* 1.

b) Montrer que les pôles de $f(z)$ *sont les entiers* $n\in\mathbb{Z}$, *sont doubles et de résidu nul.*

c) Soit $z=x+iy$. *Montrer que*

$$\lim_{|y|\to+\infty}f(z)=0,$$

uniformément par rapport à x.

3) *Démontrer la formule d'Euler :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}=\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2,\quad z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$$

Exercice 4.6.10 *Démontrer la formule de la cotangente :*

$$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}=\pi\ \cot g\ \pi z.$$

Exercice 4.6.11 *a) Soit* f *une fonction méromorphe de pôles :* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *et soit*

$$g_n(z)=\frac{a_{-1}^{(n)}}{z-a_n}+\frac{a_{-2}^{(n)}}{(z-a_n)^2}+\cdots+\frac{a_{-p_n}^{(n)}}{(z-a_n)^{p_n}},$$

la partie principale du développement en série de Laurent de f *au voisinage de* a_n. *Montrer que pour toute suite de points* $a_n\in\mathbb{C}$ *sans valeur d'adhérence et toute suite de fonctions* g_n *de la forme ci-dessus, il existe une fonction méromorphe* f *ayant pour seuls pôles les points* a_n *et pour tout* n, *la partie principale* g_n.

b) En déduire que toute fonction méromorphe f *admet un développement en une série de la forme*

$$f=h+\sum_{n=1}^{\infty}(g_n-P_n),$$

où h *est une fonction entière,* g_n *sont les parties principales de* f *et* P_n *sont des polynômes. Montrer qu'en outre, cette série converge uniformément sur tout compact.*

Exercice 4.6.12 *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Soit A une partie de Ω et posons $f_n = 1 + u_n$. Montrer que le produit infini $\prod f_n$ converge normalement sur A si et seulement si la série $\sum u_n$ converge normalement sur A.*

Exercice 4.6.13 *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et posons $f_n = 1+u_n$. On suppose que le produit infini $\prod f_n$ converge normalement sur tout compact de Ω. Montrer que la suite $(\prod_{n\leq p} f_n)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f continue sur Ω.*

Exercice 4.6.14 *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que le produit infini $\prod_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur tout compact de Ω.*

a) Montrer que $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$ est holomorphe sur Ω.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, $f = f_1 ... f_p \prod_{n=p+1}^{\infty} f_n$, et

$$Z(f) = \bigcup_n Z(f_n), \qquad m_Z(f) = \sum_n m_Z(f_n),$$

où $Z(f)$ (resp. $Z(f_n)$) désigne l'ensemble des zéros de f (resp. f_n) et $m_Z(f)$ (resp.$m_Z(f_n)$) est l'ordre de multiplicité du zéro de f (resp. f_n).

Exercice 4.6.15 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions holomorphes dans Ω telle que le produit infini $\prod f_n$ converge normalement sur tout compact de Ω. Soit $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$. Montrer que la série de fonctions méromorphes $\sum \frac{f_n'}{f_n}$, converge normalement sur tout compact de Ω et sa somme est la dérivée logarithmique,*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}.$$

Exercice 4.6.16 *Démontrer la formule :*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

Exercice 4.6.17 *Soit la série de fonctions :*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2^n}}{z^{2^{n+1}} - 1}, \ z \in \mathbb{C}$$

a) Montrer que cette série converge absolument pour $|z| < 1$ *et pour* $|z| > 1$.

b) Montrer que pour tout nombre réel $r > 1$*, cette série converge uniformément pour* $|z| \geq r$ *et pour* $|z| \leq \frac{1}{r}$.

c) En déduire que :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2^n}}{z^{2^{n+1}} - 1} = \begin{cases} \frac{z}{z-1} & si\ |z| < 1 \\ \frac{1}{z-1} & si\ |z| > 1 \end{cases}$$

Exercice 4.6.18 *Montrer que le produit infini* $\prod(1 + z^{2^n})$ *converge normalement sur tout compact du disque unité* $D(0,1)$ *et que pour tout* $z \in D(0,1)$,

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}.$$

Exercice 4.6.19 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$, $[a,b]$ *un intervalle compact de* $\mathbb{R}$ *et* $f : \Omega \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z,t) \longmapsto f(z,t)$*, une fonction. Montrer que si* f *est continue sur* $\Omega \times [a,b]$*, holomorphe en* z *(*t *étant fixé) et si* $(z,t) \longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z,t)$ *est continue, alors la fonction* F *définie par* $F(z) = \int_a^b f(z,t)dt$ *est holomorphe dans* Ω *et sa dérivée est*

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Exercice 4.6.20 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *contenant un chemin* $\mathcal{C}^1$ *(c-à-d., une application* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$*, de classe* $\mathcal{C}^1$, $a < b$*) orienté.*

a) Supposons que pour ξ *fixé, la fonction*

$$f : \Omega \times \gamma \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (z,\xi) \longmapsto f(z,\xi),$$

est holomorphe dans Ω *et continue sur* $\Omega \times \gamma$ *ainsi que sa dérivée* $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z,\xi)$. *Alors la fonction* F *définie par* $F(z) = \int_\gamma f(z,\xi)dt$ *est holomorphe dans* Ω *et sa dérivée est*

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,\xi)d\xi.$$

b) Montrer que si φ *est une fonction continue sur* γ*, alors la fonction* F *définie pour* $z \in \Omega\backslash\gamma$ *par* $F(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}d\xi$ *est holomorphe dans* $\Omega\backslash\gamma$ *et sa dérivée d'ordre* n *est*

$$F^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi.$$

c) En déduire que si en outre γ *est le bord orienté* ∂D *d'un domaine compact régulier* $\overline{D}$*, alors*

$$F^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi,$$

où $f(z) = \frac{F(z)}{2\pi i}$. *Interpréter ce résultat.*

Exercice 4.6.21 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $]a,b[$ un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ où a et b peuvent être finis ou infinis. On considère l'intégrale suivante : $F(z) = \int_a^b f(z,t)dt$, dépendant d'un paramètre complexe z. On suppose que pour tout $t \in]a,b[$ la fonction $z \longmapsto f(z,t)$ est holomorphe dans Ω et qu'il existe une fonction positive $\varphi :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) $\forall t \in]a,b[\ \forall z \in \Omega,\ |f(z,t)| \leq \varphi(t)$.

(ii) l'intégrale $\int_a^b \varphi(t)dt$ est convergente.

Montrer que la fonction F est holomorphe dans Ω et sa dérivée est

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)dt.$$

Exercice 4.6.22 *La fonction gamma d'Euler $\Gamma(z)$, se définit par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad Re\ z > 0$$

où $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$, $t \in]0,+\infty[$.

a) Montrer que la fonction $\Gamma(z)$ est holomorphe pour $Re\ z > 0$ et que de plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$ où $Re\ z > 0$, l'expression

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)^n t^{z-1}dt.$$

b) Montrer que la fonction $\Gamma(z)$ vérifie la relation fonctionnelle suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ Re\ z > 0,$$

ce qui implique la relation de récurrence :

$$\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Montrer qu'on peut prolonger la fonction $\Gamma(z)$ au moyen de la formule $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $Re\ z > 0$, en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$.

Exercice 4.6.23 *a) Montrer que*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt, \quad Re\ z > 0$$

où Γ est la fonction gamma étudiée dans l'exercice précédent.

b) Montrer que

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z.n!}{n(z+1)...(z+n)}, \quad Re\ z > 0$$

c) Démontrer la formule de Weierstrass :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}, \quad Re\ z > 0$$

où $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0,57721...$, *est la constante d'Euler.*

d) En déduire que : $\gamma = -\Gamma'(1)$.

Exercice 4.6.24 *Montrer que, pour tout* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, *on a la formule des compléments :*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Exercice 4.6.25 *On se propose dans cet exercice de considérer la fonction* $\Gamma(z)$ *dans le champ réel (c-à-d., pour* $z = x \in \mathbb{R}$*), de prouver quelques propriétés et esquisser une représentation graphique de cette fonction.*

a) Montrer que Γ *est convexe.*

b) Montrer que Γ' *s'annule une et une seule fois en un point* $\alpha \in]1,2[$.

c) Montrer que :

$$\lim_{x\to 0^+} x\Gamma(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+}\Gamma(x) = \lim_{x\to+\infty}\Gamma(x) = +\infty.$$

d) Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x)}{x}$ *et interpréter le résultat obtenu.*

e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}.$$

f) Esquisser une représentation graphique de la fonction $\Gamma(x)$.

Exercice 4.6.26 *On définit la fonction bêta d'Euler par*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \quad Re\ p > 0, Re\ q > 0.$$

a) Montrer que la fonction $p \longmapsto B(p,q)$ *est holomorphe pour* $Re\ p > 0$, $q \in \mathbb{C}$ *fixé,* $Re\ q > 0$. *De même, montrer que la fonction* $q \longmapsto B(p,q)$ *est holomorphe pour* $Re\ q > 0$, $p \in \mathbb{C}$ *fixé,* $Re\ p > 0$.

b) Etablir la formule suivante : $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ *où* Γ *est la fonction gamma d'Euler définie précédemment.*

c) En déduire la formule :

$$B(p,1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0 < Re\ p < 1$$

Exercice 4.6.27 *Exprimer à l'aide des fonctions gamma et bêta d'Euler, les intégrales elliptiques* $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$ *et* $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ *ainsi que l'intégrale trigonométrique* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t \cos^n t dt$, $m > -1$, $n > -1$.

Exercice 4.6.28 *Soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *et telle que :*
(i) $f(x) = 0$, $\forall x < 0$.
(ii) f *est continue par morceaux sur* $[0, +\infty[$.
(iii) il existe des constantes $M > 0$ *et* σ_0 *telles que :*

$$\forall x \geq x_0, \quad |f(x)| \leq Me^{\sigma_0 x}.$$

Montrer que la transformée de Laplace existe pour tout $\sigma > \sigma_0$.

Exercice 4.6.29 *Déterminer les transformées de Laplace des fonctions :*

a) $x \longmapsto \sin \sqrt{x}$, *b)* $x \longmapsto \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

Exercice 4.6.30 *Soit* f, *une fonction localement sommable. Montrer que la transformée de Laplace de* f *est une fonction holomorphe dans le domaine de sommabilité* $\{p \in \mathbb{C} : Re\ p > \sigma_0\}$ *et on a la formule*

$$F^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-x)^n f(x) e^{-px} dx = (-1)^n \mathcal{L}\{x^n f(x)\}.$$

Exercice 4.6.31 *Soit* f *une fonction périodique de période* $T > 0$ *et posons* $F(p) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ *sa transformée de Laplace. Montrer que*

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{Tp}} \int_0^T f(x) e^{-px} dx.$$

Exercice 4.6.32 *Soit* $f * g(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt$ *le produit de convolution de* f *et* g. *Montrer que si* $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$ *et* $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(p)$, *alors*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(x)\} = F(p)G(p), \quad Re\ p > \max\{\sigma_0, \varsigma_0\}$$

où σ_0 *et* ς_0 *sont les indices de sommabilité de* f *et* g *respectivement.*

Exercice 4.6.33 *Montrer que si* $F(p)$ *est la transformée de Laplace d'une fonction* f, *alors* $|F(p)|$ *est borné sur un demi-plan* $\{p \in \mathbb{C} : Re\ p > \sigma_0\}$.

Exercice 4.6.34 *Soit* f *une fonction localement sommable. On suppose que pour tout* $x > 0$, f *est continue, sa dérivée* $f'(x)$ *existe et est continue par morceaux. Montrer que s'il existe des constantes* $M > 0$ *et* σ_0 *telles que :* $|f(x)| \leq Me^{\sigma_0 x}$, *pour tout* $x \geq x_0$, *alors*

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = p\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0^+) = pF(p) - f(0^+), \quad Re\ p > \sigma_0$$

Exercice 4.6.35 *Montrer que si* $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p)$*, alors*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\} = \frac{F(p)}{p}, \quad Re\ p > \max(0, \sigma_0).$$

Exercice 4.6.36 *Montrer que si* f *est une fonction ayant un abscisse de sommabilité* σ_0*, alors pour* $Re\ p > \sigma_0$*, on a* $\lim_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Exercice 4.6.37 *Soit* f *une fonction ayant une transformée de Laplace et telle que* $f(0^+)$ *existe. Montrer que :*

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0^+).$$

Exercice 4.6.38 *Soit* f *une fonction ayant une transformée de Laplace et telle que* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ *existe et est finie. Montrer que :*

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(+\infty).$$

Exercice 4.6.39 *Soit* $F(p) = F(\sigma + i\omega)$ *une fonction holomorphe dans le demi-plan* $\{p \in \mathbb{C} : Re\ p > \sigma_0\}$*. On suppose que* $\lim_{|p|\to+\infty} |F(p| = 0$ *pour* $Re\ p > \sigma_0$ *et pour tout* $\sigma > \sigma_0$*, la fonction* $\omega \in \mathbb{R} \longmapsto F(\sigma + i\omega)$*, est sommable sur* $\mathbb{R}$ *(c'est-à-dire* F *est une fonction sommable en* ω*, pour tout* $\sigma > \sigma_0$*). Alors l'original* f *de* F *est donné par la formule de Bromwich-Wagner suivante :*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{px}dp, \quad \sigma > \sigma_0$$

Exercice 4.6.40 *Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction*

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2},$$

en utilisant la formule de Bromwich-Wagner.

Exercice 4.6.41 *Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction*

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p-2)^2},$$

en utilisant la formule de Bromwich-Wagner.

Exercice 4.6.42 *Une fonction* f *est dite causale si* $f(x) = 0$*,* $x < 0$*. Déterminer la fonction réelle causale* $f(x)$ *dont la transformée de Laplace est*

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad Re\ p > 0$$

Exercice 4.6.43 *Déterminer la solution $u(x,t)$ de l'équation aux dérivées partielles :*

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

satisfaisant aux conditions :

$$u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0, \quad u(0,t) = 1, \quad x, t > 0.$$

On suppose que : $|(u(x,t)| \leq M$ où $M > 0$ est une constante.

Bibliographie

[1] Genet, J. et Pupion, G : Analyse moderne, tome 2, Vuibert, 1974.

[2] Ahlfors, L. V. : *Complex analysis*. McGraw-Hill, 1966, 1979.

[3] Cartan, H. : *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Collection Enseignement des Sciences, Hermann, Paris, 1961, 1997.

[4] Chabat, B. : *Introduction à l'analyse complexe, fonctions d'une variable*. Tome 1, Editions Mir Moscou, 1990.

[5] Dieudonné, J. : *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, 1968, 1980.

[6] Dolbeault, P. : *Analyse complexe*. Masson, 1990, Dunod, 1997.

[7] Lang, S. : *Complex analysis*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 103, Fourth edition, Springer-Verlag, 1999.

[8] Lavrentiev, M., Chabat, B. : *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*. Editions Mir, Moscou, 1972.

[9] Lesfari, A. : *Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace (Cours et exercices)*. Ellipses, Paris, 2012.

[10] Lesfari, A. : *Notions fondamentales d'analyse mathématique (Résumés de cours, exercices et problèmes corrigés)*. Ellipses, Paris, 2014.

[11] Lesfari, A. : *Variables complexes (Cours et exercices corrigés)*, éditions Ellipses, Paris, 2014.

[12] Lesfari, A. : *Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles (Cours et exercices corrigés)*, éditions Ellipses, Paris, 2015.

[13] Lesfari, A. : *Introduction à la géométrie algébrique complexe*, éditions Hermann, Paris, 2015.

[14] Lesfari, A. : *Formes différentielles et analyse vectorielle (Cours et exercices résolus)*, éditions Ellipses, Paris, 2017.

[15] Lesfari, A. : *Fonctions spéciales de la physique mathématique (Cours et exercices résolus)*, éditions Ellipses, Paris, 2018.

[16] Lesfari, A. : *Éléments de Géométrie différentielle (Cours et exercices résolus)*, éditions Ellipses, Paris, 2018.

[17] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 1998, 2009.

[18] Silverman, R. : *Introductory complex analysis*. Dover Books on Mathematics, 1972, 1984.

[19] Spiegel, M. : *Variables complexes*. Série Schaum, McGraw-Hill, 1987.

[20] Tauvel, P. : *Analyse complexe*. Dunod, 2006.