Etude de la stabilité de quelques systèmes non-linéaires

A. Lesfari
E. mail : Lesfariahmed@yahoo.fr
http://lesfari.com

On considère le système d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,y), \\ \dot{y}(t) = g(x,y). \end{cases}$$

On suppose que f et g sont des fonctions continûment différentiables. Un point (x_0, y_0) est dit point d'équilibre (ou point stationnaire) du système ci-dessus si et seulement si $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$. Nous allons utiliser la méthode de Laplace pour étudier la stabilité du système ci-dessus et décrire quelques critères nécessaires et suffisants de stabilité. Posons $\Delta x = x - x_0$ et $\Delta y = y - y_0$. D'où

$$\Delta\dot{x}(t) = f(x + \Delta x, y + \Delta y),$$

$$\Delta\dot{y}(t) = g(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1, on obtient

$$\Delta\dot{x}(t) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y,$$

$$\Delta\dot{y}(t) = g(x_0,y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y.$$

Or $f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$, donc le système ci-dessus s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Soient $\Delta X(p) = \mathcal{L}\{\Delta x(t)\}$ et $\Delta Y(p) = \mathcal{L}\{\Delta y(t)\}$ les transformées de Laplace de $\Delta x(t)$ et $\Delta y(t)$ respectivement. En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres des équations ci-dessus, on obtient

$$p\begin{pmatrix} \Delta X(p) \\ \Delta Y(p) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta x(0) \\ \Delta y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} \Delta X(p) \\ \Delta Y(p) \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \Delta X(p) \\ \Delta Y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p - \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p - \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1}_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix}.$$

Si toutes les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} p-\frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p-\frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)},$$

se trouvent dans le demi-plan gauche : Re $p<0$, alors les trajectoires correspondant au système ci-dessus dans le plan des x, y, s'approchent du point d'équilibre (x_0, y_0) lorsque t tend vers l'infini. On dit dans ce cas que le système (ou la solution, ou encore la position d'équilibre (x_0, y_0)) est asymtotiquement stable. Si au moins une valeur propre possède une partie réelle positive, le système en question est instable au point (x_0, y_0). En cas de nullité des parties réelles la stabilité dépend des termes de la série de Taylor de degré supérieur à 1; il n'existe pas dans ce cas de critère exhaustif de stabilité (on parle d'équilibre indifférent).

En général la solution du système non-linéaire ci-dessus ne s'exprime pas à l'aide de fonctions élémentaires. Pour l'étude de la stabilité (asymptotique) de ce système on développe, lorsque ceci est possible, les fonctions f et g en série de Taylor[1] au voisinage du point (x_0, y_0). Comme précédemment, on ne retient que les termes linéaires et l'analyse de la stabilité se réduit à la détermination du signe des parties réelles des valeurs propres, c'est-à-dire des racines du polynôme caratéristique lié au système.

Il est possible de faire cette analyse sans calculer explicitement les racines du polynôme caractéristique considéré. Supposons par exemple que le polynôme caractéristique s'écrit sous la forme

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n, \quad a_0 > 0$$

où les a_i, sont des coefficients réels. Alors une condition nécessaire pour que toutes les parties réelles des racines de l'équation $P(\lambda) = 0$, soient négatives est que tous les $a_i > 0$. Cette condition n'est suffisante que pour $n \leq 2$. Pour obtenir des conditions qui sont à la fois nécessaires et suffisantes, on utilise le critère suivant que l'on appelle critère de Routh ou de Routh-Hurwitz : pour que toutes les racines de l'équation $P(\lambda) = 0$ aient des parties réelles négatives, il faut et il suffit que tous les mineurs principaux de la matrice de Hurwitz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

[1]Rappelons que si F est une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et si F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, alors on a la formule de Taylor d'ordre 2 :

$$F(a+h) = F(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(a)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_ih_j + o(\|h\|^2), \quad a \in \Omega$$

soient strictement positifs. Les mineurs principaux de cette matrice sont

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

La condition nécessaire et suffisante de Routh-Hurwitz signifie que :

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad ... \quad \Delta_n > 0.$$

Or $\Delta_n = \Delta_{n-1}.a_n$, donc on peut remplacer $\Delta_n > 0$ par $a_n > 0$.

Par ailleurs Liénard et Chipart ont formulé d'autres conditions nécessaires et suffisantes de stabilité contenant moins d'inégalités sur les mineurs Δ_i que ci-dessus. Plus précisément, pour que l'équation $P(\lambda) = 0$ ait toutes ses racines à parties réelles négatives, il faut et il suffit que tous les $a_i > 0$ et que

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \Delta_{n-5} > 0, ...$$

où les Δ_i sont les mêmes que ci-dessus.

D'autres conditions nécessaires et suffisantes de stabilité ont été obtenu par Mikhaïlov. Son critère s'énonce comme suit : on pose $\lambda = i\omega$, d'où

$$P(\lambda) = P(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega),$$

où

$$\begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \cdots \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \cdots \end{aligned}$$

Étant donné le paramètre ω, la grandeur $P(i\omega)$ peut être représentée sur le plan uov sous la forme d'un vecteur. Alors pour que le système en question soit stable, il faut et il suffit que : lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, le vecteur $f(i\omega)$ tourne d'un angle $\frac{n\pi}{2}$ dans le sens positif et ne passe pas par l'origine des coordonnées. Une autre façon de formuler le critère de Mikhaïlov est le suivant : le système en question est stable si et seulement si $a_na_{n-1} > 0$ et que les racines des polynômes $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$, soient toutes positives , distinctes et alternantes (c'est-à-dire qu'entre deux racines arbitraires de l'une de ces équations, on trouve une racine de l'autre équation).

Enfin et comme nous l'avons déjà signalé, en cas de nullité des parties réelles c'est-à-dire lorsque les racines de l'équation caractéristique sont situées sur l'axe imaginaire, le problème de la stabilité de la solution du système à étudier se complique alors considérablement.

Exemple 1. *Déterminons les positions d'équilibre du système ci-dessous et étudions sa stabilité :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \ln(y^2 - x), \\ \dot{y}(t) = x - y - 1. \end{cases}$$

Ici, on a $f(x,y) = \ln(y^2 - x)$ *et* $g(x,y) = x - y - 1$. *Les points d'équilibre* (x_0, y_0) *sont déterminés par les équations*

$$\dot{x}(t) = \ln(y^2 - x) = 0, \qquad \dot{y}(t) = x - y - 1 = 0,$$

c'est-à-dire $\ln(x^2 - 3x + 1) = 0$, $y = x - 1$ *d'où* $(x_0, y_0) = (3, 2)$ *et* $(x_0, y_0) = (0, -1)$. *Pour* $(x_0, y_0) = (3, 2)$, *on a*

$$\begin{pmatrix} p - \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p - \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} p + \frac{1}{y^2 - x} & -\frac{2y}{y^2 - x} \\ -1 & p + 1 \end{pmatrix}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} p + 1 & -3 \\ -1 & p + 1 \end{pmatrix}.$$

Les racines de l'équation caractéristique : $p^2 + 2p - 2 = 0$, *sont* $-1 \pm \sqrt{3}$ *et puisque l'une des parties réelles de ces racines est positive, on en déduit que le point d'équilibre* $(3, 2)$ *du système proposé est instable. De même pour* $(x_0, y_0) = (0, -1)$, *on a*

$$\begin{pmatrix} p - \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p - \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(3,2)} = \begin{pmatrix} p + 1 & 2 \\ -1 & p + 1 \end{pmatrix}.$$

Les racines de l'équation caractéristique : $p^2 + 2p + 3 = 0$, *sont* $-1 \pm i\sqrt{2}$ *et puisque les parties réelles de ces racines sont négatives, on en déduit que le point d'équilibre* $(3, 2)$ *du système proposé est asymptotiquement stable.*

Exemple 2. *Le pendule simple est constitué par un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil (ou une tige théoriquement sans masse) astreint à se mouvoir sans frottement sur un cercle vertical. On désigne par* l *la longueur du fil (c'est-à-dire le rayon du cercle),* g *l'accélération de la pesanteur et* x *l'angle instantané du fil avec la verticale. L'équation du mouvement est*

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Appliquons la méthode de Laplace à l'étude du mouvement du pendule simple décrit par l'équation différentielle non-linéaire du seconde ordre ci-dessus. En posant $\omega^2 = \frac{g}{l}$, $x = \varphi(t)$ *et* $y = \dot{\varphi}(t)$, *l'équation différentielle ci-dessus se ramène au système suivant*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{\varphi} = y = f(x,y), \\ \dot{y}(t) &= \ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin x = g(x,y). \end{aligned}$$

Pour déterminer les points d'équilibre (x_0, y_0) *du système, il suffit de résoudre les équations* $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$. *Les points d'équilibre sont donc donnés par* $(x_0, y_0) = (k\pi, 0)$ *où* $k \in \mathbb{Z}$. *La fonction* $\sin x$ *étant périodique, il suffit d'examiner la nature des points* $(0, 0)$ *et* $(\pi, 0)$. *Pour* $(x_0, y_0) = (0, 0)$, *on a*

$$\begin{pmatrix} p - \frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p - \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ \omega^2 \cos x & p \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ \omega^2 & p \end{pmatrix}.$$

Les racines de l'équation caractéristique : $p^2+\omega^2=0$*, sont* $p=\pm i\omega$*. Comme ces racines se trouvent sur l'axe imaginaire* $Re\, p=0$*, on en déduit que l'équilibre est indifférent. Explicitement, on a*

$$\begin{pmatrix} \Delta X(p) \\ \Delta Y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ \omega^2 & p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2+\omega^2} \begin{pmatrix} p & 1 \\ -\omega^2 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \Delta X(p) &= \frac{p}{p^2+\omega^2}\Delta x_0 + \frac{1}{p^2+\omega^2}\Delta y_0, \\ \Delta Y(p) &= -\frac{\omega^2}{p^2+\omega^2}\Delta x_0 + \frac{p}{p^2+\omega^2}\Delta y_0, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \Delta x_0 \cos\omega t + \Delta y_0 \frac{\sin\omega t}{\omega}, \\ \Delta y(t) &= -\Delta x_0 \omega \sin\omega t + \Delta y_0 \cos\omega t. \end{aligned}$$

On montre aisément que la trajectoire du système en question dans le plan (x,y) *est une ellipse centrée à l'origine. Cette trajectoire ne s'approche ni ne s'éloigne de l'origine lorsque* $t \longrightarrow 0$*. L'origine est un point d'équilibre ni stable ni instable; on dit qu'il est un centre. Pour* $(x_0,y_0)=(\pi,0)$*, on a*

$$\begin{pmatrix} p-\frac{\partial f}{\partial x} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & p-\frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ \omega^2\cos x & p \end{pmatrix}_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ -\omega^2 & p \end{pmatrix}.$$

Les racines de l'équation caractéristique : $p^2-\omega^2=0$*, sont* $p=\pm\omega$*. Une de ces racines se trouve dans le demi-plan droite* $Re\, p>0$*, donc le système en question est instable au point* $(\pi,0)$*. Explicitement, on a*

$$\begin{pmatrix} \Delta X(p) \\ \Delta Y(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -1 \\ -\omega^2 & p \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2-\omega^2} \begin{pmatrix} p & 1 \\ \omega^2 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \Delta X(p) &= \frac{p}{p^2-\omega^2}\Delta x_0 + \frac{1}{p^2-\omega^2}\Delta y_0, \\ \Delta Y(p) &= \frac{\omega^2}{p^2-\omega^2}\Delta x_0 + \frac{p}{p^2-\omega^2}\Delta y_0, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \Delta x_0 \cosh\omega t + \Delta y_0 \frac{\sinh\omega t}{\omega}, \\ \Delta y(t) &= \Delta x_0 \omega \sinh\omega t + \Delta y_0 \cosh\omega t. \end{aligned}$$

On montre que la trajectoire du système en question dans le plan (x,y) *est une Hyperbole. Ce qui explique que le point d'équilibre* $(\pi,0)$ *est instable car la trajectoire s'éloigne de ce point lorsque* $t \longrightarrow 0$*. Dans ce problème, on peut distinguer trois types de trajectoires : celles qui correspondent aux petites oscillations, celles (les séparatrices) qui joignent deux cols et enfin celles qui correspondent à une rotation complète autour du point de suspension du pendule.*

References

[1] Lesfari, A. : Distributions, Analyse de Fourier et Transformation de Laplace (Cours et exercices), 380 pages, ISBN : 978-2-7298-7629-6 , éditions Ellipses, Paris, Octobre 2012.