Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
El Jadida

ANALYSE 3 (SMA3)

Complément de cours : Eléments de topologie (de $\mathbb{R}^n$,...) [1]

On désigne par $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ étant un entier) le produit cartésien

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n-facteurs}$$

Donc $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble de n-uplets ordonnés $(x_1, ..., x_n)$ de nombres réels. En définissant l'addition et la multiplication par un réel,

$$\begin{array}{rl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n & , \quad (x,y) \longmapsto x+y = (x_1+y_1, ..., x_n+y_n), \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n & , \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n), \end{array}$$

on munit $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Cet espace est de dimension n et a pour base canonique les n vecteurs $(1,0,...,0)$, $(0,1,0,...,0)$,...,$(0,...,0,1)$.

Définition 1 *On appelle norme sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une application*

$$|| \bullet || : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto ||x||,$$

vérifiant les conditions suivantes :
(i) $\forall x \in E$, $||x|| \geq 0$ et $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
(ii) $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $||\alpha x|| = |\alpha|.||x||$.
(iii) $\forall x, y \in E$, $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inégalité de Minkowski).
Un espace vectoriel muni d'une norme est dit espace vectoriel normé.

Exemple 1 *Soit $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose*

$$\begin{array}{rcl} ||x||_1 & = & |x_1| + \cdots + |x_n|. \\ ||x||_2 & = & \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}. \\ ||x||_\infty & = & max\ (|x_1|, ..., |x_n|). \end{array}$$

Les applications $||x||_1, ||x||_2, ||x||_\infty : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

[1](Responsable : Prof. Lesfari, lesfariahmed@yahoo.fr, http ://lesfari.com)

Définition 2 *Deux normes* $|| \bullet ||$ *et* $|| \bullet ||'$ *sont dites* *équivalentes* *s'il existe deux nombres réels* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$ *tels que :*

$$\alpha ||x|| \leq ||x||' \leq \beta ||x||, \quad \forall x \in E.$$

Exercice 1 *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty.$$

Les trois normes $|| \bullet ||_1$, $|| \bullet ||_2$ et $|| \bullet ||_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Lorsque le choix de ces normes est arbitraire, on utilise tout simplement la notation $|| \bullet ||$.

Définition 3 *On appelle* *distance* *de deux vecteurs* $x, y \in E$, *le nombre réel*

$$d(x, y) = ||x - y||.$$

Autrement dit, une distance sur E *est une application*

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},$$

satisfaisant aux conditions suivantes :
(i) $\forall x, y \in E$, $d(x, y) \geq 0$ *et* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
(ii) $\forall x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie).*
(iii) $\forall x, y, z \in E$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(inégalité triangulaire).*
Un ensemble muni d'une distance est dit *espace métrique*.

Proposition 1 $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$ *(homogénéité).*

Exemple 2 *Soit* E *un ensemble non vide et soit* $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *définie par*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$$

L'application d *est une distance sur* E *dite* *distance discrète*.

Exemple 3 *Soit* A *un ensemble non vide quelconque et soit* $E = B(A, \mathbb{R})$ *l'ensemble des applications bornées sur* A. *L'application* d *définie par*

$$\forall (f, g) \in E \times E, \quad d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in A\},$$

est une distance sur E. *On l'appelle* *distance de la convergence uniforme* *sur* A.

Exercice 2 *Montrer que les applications suivantes de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *sont bien des distances :* $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall yx = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
(x, y) &\longmapsto d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|. \\
(x, y) &\longmapsto d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}. \\
(x, y) &\longmapsto d_\infty(x, y) = max\, |x_i - y_i|, 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}
$$

Exemple 4 *Soit* $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues sur* $[a, b]$. *L'application* d *définie sur* $E \times E$ *par*

$$\forall (f, g) \in E \times E, \quad d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$

est une distance sur E, *dite* <u>*distance de la convergence en moyenne*</u>.

Exemple 5 *Soient* P *et* Q *deux parties non vides de* E. *On appelle distance de* P *et de* Q, *et on note* $d(P, Q)$ *la borne inférieure des distances des points de* P *et de* Q *:*

$$d(P, Q) = \inf_{x \in P, y \in Q} d(x, y).$$

Lorsque P *est réduit à un élément* x, *la distance de* P *et de* Q *s'appelle distance de* x *à* Q *et se note* $d(x, Q)$. *Mais, l'application*

$$\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad (P, Q) \longmapsto d(P, Q),$$

n'est pas une distance sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ *des parties de* E.

Remarque 1 *Comme pour les normes, on dit que deux distances* d *et* d' *sont équivalentes sur* E, *s'il existe* $\alpha, \beta > 0$ *tels que :*

$$\alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

Exercice 3 *Montrer que les distances* d_1, d_2 *et* d_∞ *sont équivalentes.*

Définition 4 *On appelle* <u>*boule ouverte*</u> *de centre* a *et de rayon* r, *l'ensemble*

$$B(a, r) = \{x \in E : d(x, a) < r\}.$$

Lorsque $d(x, a) \leq r$, *on dira que la* <u>*boule*</u> *est* <u>*fermée*</u> *et on note* $B[a, r]$.

Exemple 6 $S(a, r) = \{x \in E : d(x, a) = r\}$ *est une sphère de centre* a *et de rayon* r.

Exercice 4 *Montrer que si* $a \in \mathbb{R}^n$ *et* $r > 0$, *alors*

$$B_\infty\left[a, \frac{r}{n}\right] \subset B_1[a,r] \subset B_2[a,r] \subset B_\infty[a,r],$$

où $B_j[,]$ *désigne la boule fermée relative à la norme* $|| \bullet ||_j$. *Dans* $\mathbb{R}^2$, *illustrer ce résultat sur une figure.*

Définition 5 *On appelle voisinage d'un point* $a \in E$, *tout ensemble* $\mathcal{V}(a)$ *qui contient une boule ouverte* $B(a,r)$.

Définition 6 *Soit* A *une partie de* E *et soit* $a \in E$. *On dit que* a *est intérieur à* A *si* A *est un voisinage de* a, *c'est -à-dire s'il existe* $r > 0$ *tel que :* $B(a,r) \subset A$. *L'intérieur de* A, *noté int* A *ou* $\overset{\circ}{A}$, *est l'ensemble*

$$\textit{int } A = \{a \in E : a \textit{ est intérieur à } A\} = \{a \in E : A \textit{ est voisinage de } a\}.$$

On évidemment int $A \subset A$ et int $[a,b] =$ int $]a,b[=$ int $]a,b] =$ int $[a,b[=]a,b[$.

Proposition 2 *Soient* A_1 *et* A_2 *deux parties de* E. *Alors*

$$A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow \textit{int } A_1 \subseteq \textit{int } A_2,$$

$$\textit{int } A_1 \cup \textit{int } A_2 \subseteq \textit{int } (A_1 \cup A_2),$$
$$\textit{int } A_1 \cap \textit{int } A_2 = \textit{int } (A_1 \cap A_2).$$

Définition 7 *On dit qu'un point* $a \in E$ *est adhérent à* A *si tout voisinage de* a *coupe* A. *Celà revient à dire*

$$\forall r > 0, \quad B(a,r) \cap A \neq \emptyset.$$

L'adhérence (ou la fermeture) de A, *notée adh* A *ou* $\overline{A}$, *est l'ensemble*

$$\textit{adh } A = \{a \in E : a \textit{ est adhérent à } A\}.$$

On a adh $A \supset A$ et adh $[a,b] =$ adh $]a,b[=$ adh $]a,b] =$ adh $[a,b[= [a,b]$. Lorsque adh $A = E$, on dira que A est dense dans E.

Exercice 5 *Montrer que int* $A = (\textit{adh } A^c)^c$ *et adh* $A = (\textit{int } A^c)^c$.

Proposition 3 *Soient* A_1 *et* A_2 *deux parties de* E. *Alors*

$$A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow \textit{adh } A_1 \subseteq \textit{adh } A_2,$$

$$\textit{adh } A_1 \cup \textit{adh } A_2 = \textit{adh } (A_1 \cup A_2),$$
$$\textit{adh } A_1 \cap \textit{adh } A_2 \supseteq \textit{adh } (A_1 \cap A_2).$$

Exemple 7 *adh* $\mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$.

Définition 8 *La frontière de A est l'ensemble fr $A =$ adh $A \setminus$ int A.*

Notons que fr A est un fermé.

Définition 9 *Soit $A \subset E$. On dit qu'un point $a \in E$ est un point d'accumulation de A si tout voisinage de a contient un point de A autre que a (c'est-à-dire si $a \in$ adh $(A \backslash \{a\})$). Le point a est dit isolé s'il existe un voisinage de a ne contenant aucun point de A autre que a.*

Remarque 2 *Un point isolé de A est un point de A qui n'est pas un point d'accumulation de A. Si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points d'accumulation de A et $\mathcal{I}$ celui des points isolés de A, alors $\mathcal{I} \subset A \subset$ adh A, $\mathcal{I} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ et $\mathcal{I} \cup \mathcal{C} =$ adh A.*

Définition 10 *Soit $A \subset E$. On dit que A est ouvert si $A = \emptyset$ ou*

$$\forall a \in A, \exists r > 0 : B(a, r) \subset A.$$

Autrement dit, A est ouvert si int $A = A$.

Exemple 8 $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ *sont des ouverts.*

Proposition 4 *Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert et une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Exercice 6 *Montrer que toute boule sans bord est un ouvert. En déduire que l'intersection d'une famille infinie d'ouverts n'est pas en général un ouvert.*

Proposition 5 *L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A.*

Remarque 3 *L'intérieur de A est la réunion de tous les ouverts contenus dans A.*

Définition 11 *On dit que A est fermé si adh $A = A$. Autrement dit, A est fermé si son complémentaire est un ouvert.*

Exemple 9 $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$ *sont des fermés.*

Proposition 6 *Une réunion finie de fermés est un fermé et une intersection quelconque de fermés est un fermé.*

Exercice 7 *Montrer que la réunion infinie de fermés n'est pas en général un fermé.*

Proposition 7 *L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.*

Remarque 4 *L'intérieur de A est l'intersection de tous les fermés contenant A.*

Définition 12 *Un espace métrique E est dit connexe s'il satisfait à l'une des conditions équivalentes suivantes :*
(i) E et $\emptyset$ sont les seules parties ouvertes et fermés.
(ii) Il n'existe pas deux ouverts A_1 et A_2 tels que : $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cup A_2 = E$.
(iii) E n'est pas égal à la réunion de deux fermés disjoints.

Définition 13 *Soit $A \subset E$ et I un ensemble (d'indices) quelconque. Une famille $(A_k)_{k \in I}$ de parties de E constitue un recouvrement de A lorsque la réunion $\bigcup_{k \in I} A_k$ contient A. Un recouvrement est dit ouvert si $\forall k \in I$, A_k est un ouvert de E et il est dit fini si I est un ensemble fini.*

Définition 14 *On dit que $A \subset E$ est borné s'il existe $a \in E$ et $r > 0$ tel que : $A \subset B[a, r]$.*

Définition 15 *On dit que $A \subset E$ est compact si de tout recouvrement ouvert, on peut en extraire un recouvrement fini.*

Exemple 10 *$\mathbb{R}$ n'est pas compact, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ est compact, Les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont compacts.*

Théorème 1 *Soit $A \subset E$. Alors A est compact si et seulemnet si de toute suite d'éléments de A, on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un élément de A.*

Rappelons qu'une suite (f_k) est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : k > l \geq N \Longrightarrow d(f_k, f_l) \leq \varepsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Définition 16 *Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy converge vers un élément de cet espace. Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Exemple 11 *$(\mathbb{R}^n, ||\bullet||_i)$, $i = 1, 2, \infty$, sont des espaces de Banach.*

****