Champ de vecteurs, Flots, Opérateurs différentiels et Variétés difféomorphes aux tores réels

A. Lesfari
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr

Dans ce travail, on commence par quelques définitions et propriétés sur les champs de vecteurs définis sur une variété différentiable. On étudie leurs liaisons avec les groupes à un paramètre de difféomorphismes ou flots ainsi qu'avec les opérateurs différentiels. On montre qu'un champ de vecteurs différentiable et à support compact est générateur d'un unique groupe à un paramètre de difféomorphismes de cette variété ; on construit le flot sur toute la variété. Puis la notion de commutativité des champs de vecteurs est détaillée, avec des calculs explicites concernant une condition nécessaire et suffisante fort utile pour vérifier la commutativité des champs de vecteurs. Ensuite, nous démontrons un résultat important de topologie différentielle : on montre que si la variété différentiable de dimension m est compacte, connexe, munie de m champs de vecteurs différentiables commutant deux à deux et linéairement indépendants en chaque point, alors cette variété est difféomorphe à un tore réel de dimension m. On notera que l'exposé est conçu dans un esprit plus géométrique.

Table des matières

1 Champ de vecteurs, Groupes à un paramètre de difféomorphismes et Opérateurs différentiels

Soit M une variété différentiable de dimension m. Soit TM le fibré tangent à M, i.e., l'union des espaces tangents à M en tous ses points x,

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Ce fibré possède une structure naturelle de variété différentiable de dimension $2m$ et il nous permet de transporter imméditement aus variétés toute la théorie des équations différentielles ordinaires.

Définition 1.1 *Un champ de vecteurs (On dit aussi section du fibré tangent) sur M est une application, notée X, qui à tout point $x \in M$ associe un vecteur tangent $X_x \in T_x M$. Autrement dit, c'est une application*

$$X : M \longrightarrow TM,$$

telle que si

$$\pi : TM \longrightarrow M,$$

est la projection naturelle, on ait

$$\pi \circ X = id_M.$$

Notons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{X} & TM \\ & \searrow id_M & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

est commutatif.
Soit $(x_1, ..., x_m)$ un système de coordonnées locales dans un voisinage $U \subset M$. Dans ce système le champ de vecteurs X s'écrit sous la forme

$$X = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \; x \in U,$$

où les fonctions

$$f_1, \ldots, f_m : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

sont les composantes de X par rapport à $(x_1, ..., x_m)$. Un champ de vecteurs X est différentiable si ses composantes $f_k(x)$ sont des fonctions différentiables.

Cette définition de différentiabilité ne dépend pas évidemment du choix du système de coordonnées locales. En effet, si $(y_1, ..., y_m)$ est un autre système de coordonnées locales dans U, alors

$$X = \sum_{k=1}^{m} h_k(x) \frac{\partial}{\partial y_k}, \ x \in U,$$

où

$$h_1, \ldots, h_m : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

sont les composantes de X par rapport à $(y_1, ..., y_m)$ et le résultat découle du fait que

$$h_k(x) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial y_k}{\partial x_l} f_l(x), \ x \in U.$$

Au champ de vecteurs X correspond un système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, ..., x_m), \\ &\vdots \\ \frac{dx_m}{dt} &= f_m(x_1, ..., x_m). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Définition 1.2 *Un champ de vecteurs différentiable X sur M s'appelle système dynamique.*

Un champ de vecteurs s'écrit localement sous la forme (1.1).

Définition 1.3 *Une courbe intégrale (ou trajectoire) du champ de vecteurs X est une courbe différentiable*

$$\gamma : I \longrightarrow M, \quad t \longmapsto \gamma(t),$$

telle que :

$$\forall t \in I, \ \frac{d\gamma(t)}{dt} = X(\gamma(t)),$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

est l'expression locale de X, alors les courbes intégrales (ou trajectoires) de X sont les solutions $\gamma(t) = \{x_k(t)\}$ de (1.1).

On suppose dans la suite que le champ de vecteurs X est différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) et à support compact (i.e., X est nul en dehors d'un compact de M), ce qui sera en particulier le cas si la variété M est compacte.

Etant donné un point $x \in M$, on note $g_t^X(x)$ (ou tout simplement $g_t(x)$) la position de x après un déplacement d'une durée $t \in \mathbb{R}$. On a ainsi une application

$$g_t^X : M \longrightarrow M, \quad t \in \mathbb{R},$$

qui est un difféomorphisme, en vertu de la théorie des équations différentielles (voir théorème ci-dessous). Plus précisément, au champ de vecteurs X est lié un groupe à un paramètre de difféomorphismes g_t^X sur M c'est-à-dire une application différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) : $M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$, vérifiant une loi de groupe :

i) $\forall t \in \mathbb{R},\ g_t^X : M \longrightarrow M$ est un difféomorphisme de M sur M.

ii) $\forall t, s \in \mathbb{R},\ g_{t+s}^X = g_t^X \circ g_s^X$.

La condition *ii*) signifie que la correspondance $t \longmapsto g_t^X$, est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe des difféomorphismes de M dans M. Elle implique que

$$g_{-t}^X = \left(g_t^X\right)^{-1},$$

car $g_0^X = id_M$ est la transformation identique qui laisse chaque point invariant.

Définition 1.4 *Le groupe à un paramètre de difféomorphismes g_t^X sur M, que l'on vient de décrire s'appelle flot et il admet le champ de vecteurs X pour champ de vitesses*

$$\frac{d}{dt} g_t^X(x) = X\left(g_t^X(x)\right),$$

avec la condition initiale

$$g_0^X(x) = x.$$

Evidemment

$$\left.\frac{d}{dt} g_t^X(x)\right|_{t=0} = X(x).$$

Donc par ces formules $g_t^X(x)$ est la courbe sur la variété qui passe par x et telle que la tangente en chaque point est le vecteur $X\left(g_t^X(x)\right)$.

Nous allons maintenant voir comment construire le flot g_t^X sur toute la variété M.

Théorème 1.5 *Le champ de vecteurs X est générateur d'un unique groupe à un paramètre de difféomorphismes de M.*

Démonstration : *a*) Construction de g_t^X pour t assez petit. Pour x fixé, l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} g_t^X(x) = X\left(g_t^X\right),$$

fonction de t avec la condition initiale

$$g_0^X(x) = x,$$

admet une solution unique g_t^X définie au voisinage du point x_0 et dépendant de façon $\mathcal{C}^\infty$ de la condition initiale. Donc g_t^X est localement un difféomorphisme. Dès lors pour chaque point $x_0 \in M$, on peut trouver un voisinage $U(x_0) \subset M$, un nombre réel positif $\varepsilon \equiv \varepsilon(x_0)$ tels que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, l'équation différentielle en question avec sa condition initiale admet une solution unique $g_t^X(x)$ différentiable définie dans $U(x_0)$ et vérifiant la relation de groupe

$$g_{t+s}^X(x) = g_t^X \circ g_s^X(x),$$

avec $t, s, t+s \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. En effet, posons

$$x_1 = g_t^X(x), \quad t \text{ fixé},$$

et considérons la solution de l'équation différentielle satisfaisant dans le voisinage du point x_0 à la condition initiale

$$g_{s=0}^X = x_1.$$

Cette solution vérifie la même équation différentielle et coincide en un point

$$g_t^X(x) = x_1,$$

avec la fonction g_{t+s}^X. Donc, par unicité de la solution de l'équation différentielle, les deux fonctions sont localement égales. Par conséquent, l'application g_t^X est localement un difféomorphisme. Rappelons que le champ de vecteurs X est supposé différentiable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) et à support compact K. Du recouvrement de K formé par des ouverts $U(x)$, on peut extraire un sous-recouvrement fini (U_i), puisque K est compact. Désignons par ε_i les nombres ε correspondants aux U_i et posons

$$\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_i), \quad g_t^X(x) = x, \quad x \notin K.$$

Dès lors, l'équation en question admet une solution unique g_t^X sur $M \times]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ vérifiant la relation du groupe

$$g_{t+s}^X = g_t^X \circ g_s^X,$$

l'inverse de g_t^X étant g_{-t}^X et donc g_t^X est un difféomorphisme pour t suffisamment petit.

b) Construction de g_t^X pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'après *a*), il suffit de construire g_t^X pour $t \in]-\infty, -\varepsilon_0[\cup]\varepsilon_0, \infty[$. Nous allons voir que les applications g_t^X

se définissent d'après la loi de multiplication du groupe. Notons que t peut s'écrire sous la forme

$$t = k\frac{\varepsilon_0}{2} + r,$$

avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \left[0, \frac{\varepsilon_0}{2}\right[$. Posons, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_t^X = \underbrace{g_{\frac{\varepsilon_0}{2}}^X \circ \cdots \circ g_{\frac{\varepsilon_0}{2}}^X}_{k-\text{fois}} \circ \; g_r^X,$$

et pour $t \in \mathbb{R}_-^*$,

$$g_t^X = \underbrace{g_{-\frac{\varepsilon_0}{2}}^X \circ \cdots \circ g_{-\frac{\varepsilon_0}{2}}^X}_{k-\text{fois}} \circ \; g_r^X.$$

Les difféomorphismes $g_{\pm\frac{\varepsilon_0}{2}}^X$ et g_r^X ont été définis dans a), et on en déduit que pour tout réel t, g_t^X est un difféomorphisme défini globalement sur M. $\square$

Corollaire 1.6 *Toute solution de l'équation différentielle*

$$\frac{dx\,(t)}{dt} = X\,(x\,(t))\,,\ x \in M,$$

avec la condition initiale x (pour $t = 0$), est indéfiniment prolongeable. La valeur de la solution $g_t^X(x)$ à l'instant t est différentiable par rapport à t et à la condition initiale x.

Avec un léger abus de notation, on peut écrire l'équation précédente sous la forme du système d'équations différentielles (1.1) avec les conditions initiales $x_1, ..., x_m$ pour $t = 0$.

Au champ de vecteurs X est lié l'opérateur différentiel L_X d'ordre 1. Il s'agit de la différentiation des fonctions suivant la direction du champ de vecteurs X. On a

$$L_X : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)\,,\ F \longmapsto L_X F,$$

où

$$L_X F(x) = \frac{d}{dt} F\left(g_t^X(x)\right)\Big|_{t=0},\ x \in M.$$

Ici $\mathcal{C}^\infty(M)$ désigne l'ensemble des fonctions $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'opérateur L_X est linéaire

$$L_X(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) = \alpha_1 L_X F_1 + \alpha_2 L_X F_2,\ \ (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})\,,$$

et satisfait à la formule de Leibniz

$$L_X(F_1 F_2) = F_1 L_X F_2 + F_2 L_X F_1.$$

Comme $L_X F(x)$ ne dépend que des valeurs de F au voisinage de x, on peut donc appliquer l'opérateur L_X à des fonctions définies seulement au voisinage d'un point, sans avoir besoin de les prolonger à toute la variété M. Soit $(x_1, ..., x_m)$ un système de coordonnées locales sur M. Dans ce système le champ de vecteurs X a pour composantes $f_1, \ldots, f_m$ et le flot g_t^X est défini par le système d'équations différentielles (1.1). Donc la dérivée de $F = F(x_1, ..., x_m)$ suivant la direction de X s'écrit

$$L_X F = f_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + f_m \frac{\partial F}{\partial x_m}.$$

Autrement dit, dans les coordonnées $(x_1, ..., x_m)$ l'opérateur L_X s'écrit

$$L_X = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_m \frac{\partial}{\partial x_m},$$

ceci n'est autre que la forme générale de l'opérateur différentiel linéaire du premier ordre.

2 Commutativité des champ de vecteurs

Définition 2.1 *On dit que deux champs de vecteurs X_1 et X_2 sur une variété M commutent (ou sont commutatifs) si et seulement si les flots correspondants commutent*

$$g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x) = g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x), \ \forall x \in M.$$

Le résultat suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante, fort utile, pour vérifier la commutativité de deux champs de vecteurs.

Théorème 2.2 *Deux champs de vecteurs X_1 et X_2 sur une variété M commutent si et seulement si*

$$[L_{X_1}, L_{X_2}] \equiv L_{X_1} L_{X_2} - L_{X_2} L_{X_1} = 0.$$

Démonstration : *a*) Condition nécessaire. Montrons tout d'abord que : $\forall F \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\forall x \in M$, alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \left(F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) - F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\right)\Big|_{t_2=t_1=0} = \left(L_{X_1} L_{X_2} - L_{X_2} L_{X_1}\right) F(x).$$

En effet, d' après la définition de L_{X_2}, on a

$$\frac{\partial}{\partial t_2} F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\Big|_{t_2=0} = L_{X_2} F\left(g_{t_1}^{X_1}(x)\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\Big|_{t_2=t_1=0} &= \frac{\partial}{\partial t_1} L_{X_2} F\left(g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\Big|_{t_1=0}, \\
&= \frac{\partial}{\partial t_1} G\left(g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\Big|_{t_1=0} \quad \text{où } G \equiv L_{X_2}F, \\
&= L_{X_1}G(x) \text{ par définition de } L_{X_1}, \\
&= L_{X_1}L_{X_2}F(x).
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\Big|_{t_1=0} = L_{X_1} F\left(g_{t_2}^{X_2}(x)\right),$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\Big|_{t_2=t_1=0} = L_{X_2}L_{X_1}F(x).$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\Big|_{t_1=0} &- \frac{\partial^2}{\partial t_2 \partial t_1} F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\Big|_{t_2=t_1=0} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) - F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\right)\Big|_{t_2=t_1=0}, \\
&= L_{X_1}L_{X_2}F(x) - L_{X_2}L_{X_1}F(x).
\end{aligned}$$

Donc si X_1 et X_2 commutent sur la variété M c'est-à-dire si

$$g_{X_1}^{t_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x) = g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x),\ \forall x \in M,$$

alors d'après la formule ci-dessus,

$$\left(L_{X_1}L_{X_2} - L_{X_2}L_{X_1}\right) F(x) = 0,\ \forall F \in \mathcal{C}^\infty(M),\ \forall x \in M,$$

et par conséquent

$$L_{X_1}L_{X_2} = L_{X_2}L_{X_1}.$$

b) Condition suffisante. Montrons que

$$g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x) = g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x), \forall x \in M,$$

ou encore que

$$F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) = F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right),\ \forall F \in \mathcal{C}^\infty(M),\ \forall x \in M.$$

Posons

$$\xi = g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x),\ \ \zeta = g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x),$$

et développons en série de Taylor la fonction $F(\xi) - F(\zeta)$ autour de $t_1 = t_2 = 0$. On a

$$\begin{aligned}
F(\xi) - F(\zeta) = \quad & F(x) - F(x) \\
& + t_1 \left(\frac{\partial}{\partial t_1} (F(\xi) - F(\zeta)) \right)\Big|_{t_1=t_2=0} \\
& + t_2 \left(\frac{\partial}{\partial t_2} (F(\xi) - F(\zeta)) \right)\Big|_{t_1=t_2=0} \\
& + \frac{t_1^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} (F(\xi) - F(\zeta)) \right)\Big|_{t_1=t_2=0} \\
& + \frac{t_2^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} (F(\xi) - F(\zeta)) \right)\Big|_{t_1=t_2=0} \\
& + t_1 t_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} (F(\xi) - F(\zeta)) \right)\Big|_{t_1=t_2=0} \\
& + \circ \left(t_1^3, t_2^3, t_1^2 t_2, t_1 t_2^2 \right).
\end{aligned}$$

Calculons les différents termes. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_1} F(\xi)\Big|_{t_1=t_2=0} &= \frac{\partial}{\partial t_1} F\left(g_{t_1}^{X_1} \circ g_{t_2}^{X_2}(x) \right)\Big|_{t_1=t_2=0}, \\
&= L_{x_1} F\left(g_{t_2}^{X_2}(x) \right)\big|_{t_2=0}, \\
&= L_{x_1} F(x). \\
\frac{\partial}{\partial t_1} F(\zeta)\Big|_{t_1=t_2=0} &= \frac{\partial}{\partial t_1} F\left(g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}(x) \right)\Big|_{t_1=t_2=0}, \\
&= \frac{\partial}{\partial t_1} G\left(g_{t_1}^{X_1}(x) \right)\Big|_{t_1=0} \text{ où } G = F g_{t_2}^{X_2}\big|_{t_2=0}, \\
&= L_{x_1} G(x), \\
&= L_{x_1} F\left(g_{t_2}^{X_2} \right)\big|_{t_2=0}, \\
&= L_{x_1} F(x).
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\frac{\partial}{\partial t_1} (F(\xi) - F(\zeta))\Big|_{t_1=t_2=0} = 0.$$

Par symétrie, on a aussi

$$\frac{\partial}{\partial t_2} (F(\xi) - F(\zeta))\Big|_{t_1=t_2=0} = 0.$$

De même, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left(F\left(\xi\right)-F\left(\zeta\right)\right)\Big|_{t_1=t_2=0}=\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left(F\left(g_{t_1}^{X_1}\circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)-F\left(g_{t_2}^{X_2}\circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\right)\Big|_{t_1=t_2=0}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_1}F\left(g_{t_1}^{X_1}\circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) &= \frac{\partial}{\partial t_1}F\left(g_{t_1}^{X_1}\left(y\right)\right) \text{ où } y=g_{t_2}^{X_2}(x),\\
&= L_{X_1}F\left(g_{t_1}^{X_1}\left(y\right)\right).\\
\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}F\left(g_{t_1}^{X_1}\circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right) &= \frac{\partial}{\partial t_1}L_{X_1}F\left(g_{t_1}^{X_1}\left(y\right)\right),\\
&= L_{X_1}L_{X_1}F\left(g_{t_1}^{X_1}\left(y\right)\right),\\
&= L_{X_1}L_{X_1}F\left(g_{t_1}^{X_1}\circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)\underset{t_1=t_2=0}{\longrightarrow}L_{X_1}L_{X_1}F\left(x\right).\\
\frac{\partial}{\partial t_1}F\left(g_{t_2}^{X_2}\circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) &= \frac{\partial}{\partial t_1}G\left(g_{t_1}^{X_1}\left(x\right)\right) \text{ où } G=Fg_{t_2}^{X_2},\\
&= L_{X_1}G\left(g_{t_1}^{X_1}\left(x\right)\right).\\
\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}F\left(g_{t_2}^{X_2}\circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right) &= \frac{\partial}{\partial t_1}L_{X_1}G\left(g_{t_1}^{X_1}\left(x\right)\right),\\
&= L_{X_1}L_{X_1}G\left(g_{t_1}^{X_1}\left(x\right)\right),\\
&= L_{X_1}L_{X_1}F\left(g_{t_2}^{X_2}\circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\underset{t_1=t_2=0}{\longrightarrow}L_{X_1}L_{X_1}F\left(x\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left(F\left(\xi\right)-F\left(\zeta\right)\right)\Big|_{t_1=t_2=0}=0.$$

Il s'en suit, par symétrie, que

$$\frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\left(F\left(\xi\right)-F\left(\zeta\right)\right)\Big|_{t_1=t_2=0}=0.$$

Par ailleurs, on déduit de la condition nécessaire et du fait que les champs de vecteurs X_1 et X_2 commutent, la relation suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}(F(\xi) &- F(\zeta))|_{t_1=t_2=0}\\
&= \frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left(F\left(g_{t_1}^{X_1}\circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)-F\left(g_{t_2}^{X_2}\circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\right)\Big|_{t_1=t_2=0},\\
&= \frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}\left(L_{X_2}L_{X_1}-L_{X_1}L_{X_2}\right)F\left(x\right),\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$F\left(g_{t_1}^{X_1}\circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)-F\left(g_{t_2}^{X_2}\circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)=\circ\left(t_1^3,t_2^3,t_1^2t_2,t_1t_2^2\right).$$

Considérons tout d'abord des temps t_1 et t_2 de l'ordre de ε. On a un écart entre les deux nouveaux points de la variété, suivant que l'on applique le champ X_1 avant X_2, ou l'inverse, de l'ordre de ε^3,

$$F\left(g_{t_1}^{X_1}\circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)-F\left(g_{t_2}^{X_2}\circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)=o\left(\varepsilon^3\right).$$

Maintenant, si t_1 et t_2 sont des temps fixés quelconques, quadrillons l'espace entre les deux chemins par des carrés de côté ε. Chaque carré représente le petit espace parcouru pendant un petit temps ε, soit suivant le champ X_1, soit suivant le champ X_2. On a trouvé que lorsque l'espace entre deux chemins diffère d'un carré on obtient une différence de ε^3. En modifiant par étapes successives le chemin parcouru d'un carré, on obtient

$$F\left(g_{t_1}^{X_1}\circ g_{t_2}^{X_2}(x)\right)-F\left(g_{t_2}^{X_2}\circ g_{t_1}^{X_1}(x)\right)\leq\frac{t_1t_2}{\varepsilon^2}o\left(\varepsilon^3\right),$$

par le fait qu'on a $\frac{t_1}{\varepsilon}\times\frac{t_2}{\varepsilon}$ étapes intermédiaires. Ceci est valable pour tout ε, il suffit de prendre ε suffisament petit, tendant vers zéro, pour que

$$\frac{t_1t_2}{\varepsilon^2}o\left(\varepsilon^3\right)=t_1t_2o\left(\varepsilon\right)\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}0,$$

ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

3 Variétés difféomorphes aux tores réels

Théorème 3.1 . *On suppose que la variété différentiable M de dimension m est compacte, connexe, muni de m champs de vecteurs différentiables (de classe $\mathcal{C}^\infty$) $X_1,...,X_m$ commutant deux à deux et linéairement indépendants en chaque point de M. Alors, la variété M est difféomorphe à un tore réel de dimension m.*

Démonstration : Définissons l'application

$$g:\mathbb{R}^m\longrightarrow M,\ \ (t_1,...,t_m)\ \longmapsto g\left(t_1,...,t_m\right),$$

où

$$g\left(t_1,...,t_m\right)=g_{t_1}^{X_1}\circ\cdots\circ g_{t_m}^{X_m}\left(x\right)=g_{t_m}^{X_m}\circ\cdots\circ g_{t_1}^{X_1}\left(x\right),\ x\in M.$$

a) L'application g est un difféomorphisme local. En effet, soit

$$g_r\equiv g\mid_U: U\longrightarrow M,\ \ (t_1,...,t_m)\longmapsto g_r\left(t_1,...,t_m\right)=g_{t_m}^{X_m}\circ\cdots\circ g_{X_1}^{t_1}\left(x\right),$$

la restriction de g sur un voisinage U de $(0,...,0)$ dans $\mathbb{R}^m$ avec

$$x = g_r(0,...,0).$$

Montrons que l'application g_r est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a

$$\frac{\partial}{\partial t_1} g_{t_1}^{X_1} = X_1(x) = \left(\frac{dx_1}{dt},...,\frac{dx_m}{dt}\right),$$

avec

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1,...,x_m), \\ &\vdots \\ \frac{dx_m}{dt} &= f_m(x_1,...,x_m), \end{cases}$$

où $f_1,...,f_m$ sont des fonctions de la variété M dans $\mathbb{R}$. De même, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} g_{t_1}^{X_1} &= (\frac{d^2x_1}{dt^2},...,\frac{d^2x_m}{dt^2}), \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \frac{\partial f_1}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt},...,\sum_{k=1}^m \frac{\partial f_m}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}\right), \\ \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} g_{t_1}^{X_1} &= (\frac{d^3x_1}{dt^3},...,\frac{d^3x_m}{dt^3}), \\ &= \left(\sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_k \partial x_l}\frac{dx_k}{dt}\frac{dx_l}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x_k}\frac{d^2x_k}{dt^2},...,\sum_{k=1}^m\sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_k \partial x_l}\frac{dx_k}{dt}\frac{dx_l}{dt} + \frac{\partial f_m}{\partial x_k}\frac{d^2x_k}{dt^2}\right), \end{aligned}$$

etc...Toutes ces expressions ont un sens car par hypothèse toutes les fonctions $f_1,...,f_m$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Un raisonnement similaire, montre que $g_{t_2}^{X_2},...,g_{t_m}^{X_m}$ sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. Comme la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit que $g_r(t_1,...,t_m)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrons maintenant que la matrice jacobienne de g_r en $(0,\ldots,0)$ est inversible. Pour celà, posons

$$g_r(t_1,...,t_m) \equiv (G_1(t_1,...,t_m),...,G_m(t_1,...,t_m)).$$

On a

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_1}{\partial t_m} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial t_m} \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial g_r}{\partial t_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial t_m} \end{pmatrix}, \\ &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t_m} g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) \end{pmatrix}, \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

car les champs de vecteurs $X_1, ..., X_m$ sont linéairement indépendants en chaque point de M. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage suffisamment petit $V \subset U$ de $(0, \ldots, 0)$ et un voisinage W de x tels que g_r induise une bijection de V sur W dont la réciproque

$$g_r^{-1} : W \longrightarrow V,$$

soit de classe $\mathcal{C}^\infty$. Autrement dit, g_r est un difféomorphisme de V sur $g_r(V)$. Notons que ce résultat est local car même si la matrice jacobienne ci-dessus est inversible pout tout $(t_1, ..., t_m)$, alors l'inverse "globale" de g_r n'existe pas nécessairement.

b) L'application g est surjective. En effet, soit $y \in M$ et déterminons $(t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$g(t_1, ..., t_m) = g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) = y.$$

Nous avons montré dans la partie a) que g est un difféomorphisme local. Donc pour tout point x_1 contenu dans un voisinage de x, il existe $(t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) = x_1.$$

Comme la variété M est connexe, on peut relier le point x au point y par une courbe $\mathcal{C}$. Soit B_1 une boule ouverte dans M contenant le point x_1. Cette boule existe puisque M est compacte. Soit $x_2 \in \mathcal{C}$ tel que x_2 soit contenu dans la boule B_1. On raisonne comme précédemment, l'application g étant un difféomorphisme local, alors il existe $(t_1', ..., t_m') \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$g'_{t_m X_m} \circ \cdots \circ g'_{t_1 X_1}(x_1) = x_2.$$

Donc

$$x_2 = g'_{t_m X_m} + t_m \circ \cdots \circ g'_{t_1 X_1} + t_1(x).$$

De même, soit B_2 une boule ouverte dans M contenant le point x_2. Soit $x_3 \in \mathcal{C}$ tel que x_3 soit contenu dans la boule B_2. Comme l'application g est un difféomorphisme local, alors il existe $(t_1'', ..., t_m'') \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$g''_{t_m X_m} \circ \cdots \circ g''_{t_1 X_1}(x_2) = x_3.$$

Donc

$$x_3 = g''_{t_m X_m} + t_m' + t_m \circ \cdots \circ g''_{t_1 X_1} + t_1' + t_1(x).$$

En continuant ainsi, on montre (après un nombre k fini d'étapes) l'existence d'un point $\left(t_1^{(k-1)}, ..., t_m^{(k-1)}\right) \in \mathbb{R}^m$, tel que :

$$g^{(k-1)}_{t_m X_m} \circ \cdots \circ g^{(k-1)}_{t_1 X_1}(x_{k-1}) = x_k,$$

où $x_k \in \mathcal{C}$, x_k contenu dans une boule ouverte B_{k-1} de M, avec $B_{k-1} \ni x_{k-1}$. Donc

$$x_k = g^{(k-1)}_{t_m X_m} + t^{(k-2)}_m + \cdots + t'_m + t_m \circ \cdots \circ g^{(k-1)}_{t_1 X_1} + t^{(k-2)}_1 + \cdots + t'_1 + t_1 (x), \ k \text{ fini.}$$

Cette construction montre qu'on peut, en un nombre k fini d'étapes, recouvrir la courbe $\mathcal{C}$ reliant le point x au point y par des voisinages de x; le point y jouant le rôle de x_k. Notons que l'application g ne peut être injective. En effet, si g est injective, on aurait d'après la partie a) une bijection entre un compact M et un non compact $\mathbb{R}^m$, ce qui est absurde.
c) Le groupe stationnaire

$$\Lambda = \left\{ (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m : g(t_1, ..., t_m) = g^{X_m}_{t_m} \circ \cdots \circ g^{X_1}_{t_1}(x) = x \right\},$$

est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^m$ indépendant du point $x \in M$. En effet, notons tout d'abord que $\Lambda \neq \emptyset$ car $(0, ..., 0) \in \Lambda$. Soit $(t_1, ..., t_m) \in \Lambda$, $(t'_1, ..., t'_m) \in \Lambda$. On a

$$g(t_1, ..., t_m) = g(t'_1, ..., t'_m) = x.$$

Puisque les champs de vecteurs $X_1, ..., X_m$ sont commutatifs, alors

$$\begin{aligned}
g(t_1 + t'_1, ..., t_m + t'_m) &= g^{X_m}_{t_m + t'_m} \circ \cdots \circ g^{X_1}_{t_1 + t'_1}(x), \\
&= g^{X_m}_{t'_m} \circ \cdots \circ g^{X_1}_{t'_1} \circ g^{X_m}_{t_m} \circ \cdots \circ g^{X_1}_{t_1}(x), \\
&= g^{X_m}_{t'_m} \circ \cdots \circ g^{X_1}_{t'_1}(x), \\
&= x, \\
g(-t_1, ..., -t_m) &= g^{X_m}_{-t_m} \circ \cdots \circ g^{X_1}_{-t_1}(x), \\
&= g^{X_m}_{-t_m} \circ \cdots \circ g^{X_1}_{-t_1} \circ g^{X_m}_{t_m} \circ \cdots \circ g^{X_1}_{t_1}(x), \\
&= g^{X_m}_{-t_m} \circ \cdots \circ g^{X_1}_{-t_1} \circ g^{X_1}_{t_1} \circ \cdots \circ g^{X_m}_{t_m}(x), \\
&= g^{X_m}_{-t_m} \circ \cdots \circ g^{X_2}_{-t_2} \circ g^{X_2}_{t_2} \circ \cdots \circ g^{X_m}_{t_m}(x), \\
&\ \vdots \\
&= g^{X_m}_{-t_m} \circ g^{X_m}_{t_m}(x), \\
&= x.
\end{aligned}$$

D'où $(t_1 + t'_1, ..., t_m + t'_m) \in \Lambda$ et $(-t_1, ..., -t_m) \in \Lambda$. Donc Λ est stable pour l'addition, l'inverse de $(t_1, ..., t_m)$ est $(-t_1, ..., -t_m)$ et par conséquent Λ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^m$. Montrons que Λ est indépendant de x. Soit

$$\Lambda' = \left\{ (t'_1, ..., t'_m) \in \mathbb{R}^m : g(t'_1, ..., t'_m) = g^{X_m}_{t'_m} \circ \cdots \circ g^{X_1}_{t'_1}(y) = y \right\}.$$

Par la surjectivité, on peut trouver $(s_1, ..., s_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$g^{X_m}_{s_m} \circ \cdots \circ g^{X_1}_{s_1}(x) = y,$$

Soit $(t'_1, ..., t'_m) \in \Lambda'$. On a

$$\begin{aligned}
g_{t'_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t'_1}^{X_1}(y) &= y, \\
g_{t'_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t'_1}^{X_1} \circ g_{s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{s_1}^{X_1}(x) &= g_{s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{s_1}^{X_1}(x), \\
g_{-s_m+t'_m+s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{-s_1+t'_1+s_1}^{X_1}(x) &= x, \\
g_{t'_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t'_1}^{X_1}(x) &= x.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $(t'_1, ..., t'_m) \in \Lambda$ et donc Λ ne dépend pas de x. Pour montrer que Λ est discret, on considère un voisinage V suffisamment petit du point $(0, ..., 0)$ et un voisinage W du point x. D'après a), l'application g est un difféomorphisme local, donc

$$g : V \longrightarrow W,$$

est bijective et par conséquent aucun point de $W \backslash \{(0, ..., 0)\}$ n'est envoyé sur x ; les points du sous-groupe Λ n'ont aucun point d'accumulation dans $\mathbb{R}^m$..
d) La variété M est difféomorphe à un tore réel de dimension m. En effet, puisque Λ est le noyau de g, il existe une surjection canonique

$$\widetilde{g} : \mathbb{R}^m/\Lambda \to M, \ \ [(t_1, ..., t_m)] \mapsto \widetilde{g}\,[(t_1, ..., t_m)] = g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x).$$

En effet, soient $(t_1, ..., t_m)$ et $(s_1, ..., s_m)$ tels que :

$$\widetilde{g}\,[(t_1, ..., t_m)] = \widetilde{g}\,[(s_1, ..., s_m)].$$

On a

$$g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) = g_{s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{s_1}^{X_1}(x),$$

d'où

$$\begin{aligned}
g_{-s_1}^{X_1} \circ \cdots \circ g_{-s_m}^{X_m} \circ g_{t_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1}^{X_1}(x) &= g_{-s_1}^{X_1} \circ \cdots \circ g_{-s_m}^{X_m} \circ g_{s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{s_1}^{X_1}(x), \\
&= g_{-s_1}^{X_1} \circ \cdots \circ g_{-s_{m-1}}^{X_{m-1}} \circ g_{s_{m-1}}^{X_{m-1}} \circ \cdots \circ g_{s_1}^{X_1}(x), \\
&\ \vdots \\
&= g_{-s_1}^{X_1} \circ g_{s_1}^{X_1}(x), \\
&= x.
\end{aligned}$$

Comme $X_1, ..., X_m$ sont commutatifs, alors

$$g_{t_m-s_m}^{X_m} \circ \cdots \circ g_{t_1-s_1}^{X_1}(x) = x,$$

et d'après ce qui précéde, on a

$$\begin{aligned}
[(t_1 - s_1, ..., t_m - s_m)] &= 0, \\
[(t_1, ..., t_m) - (s_1, ..., s_m)] &= 0, \\
[(t_1, ..., t_m)] &= [(s_1, ..., s_m)].
\end{aligned}$$

Par conséquent $\widetilde{g}$ est un difféomorphime. $\square$

Remarque 3.1 *En général , pour tout sous-groupe discret de $\mathbb{R}^m$, il existe k vecteurs linéairement indépendants tels que ce groupe soit l'ensemble de toutes leurs combinaisons linéaires entières. Par conséquent, le groupe stationnaire Λ (voir point c) dans la preuve du théorème) peut s'écrire sous la forme*

$$\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_k, \ 1 \leq k \leq m,$$

où $e_1, ..., e_m$ sont des vecteurs linéairement indépendants. En effet, pour fixer les idées, prenons $m = 2$ c'est-à-dire

$$\Lambda = \left\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : g\,(t_1, t_2) = g_{t_2}^{X_2} \circ g_{t_1}^{X_1}\,(x) = x\right\}.$$

Ici, trois cas sont possibles :
i) $\Lambda = \{0\}$,
ii) $\Lambda = \mathbb{Z}e_1$,
iii) $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$.
Le cas i) est à rejeter car nous avons un difféomorphisme entre $\mathbb{Z}^2/\ \{0\}$ (non compact) et M un compact, ce qui est impossible. Le second cas $\mathbb{Z}^2/\ \mathbb{Z}e_1$ (un cylindre) est aussi à rejeter pour les mêmes raisons que dans le premier cas. Il reste le dernier cas , qui est valable, car $\mathbb{Z}^2/\ \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ est un tore de dimension 2.

Références

[1] Arnold, V.I. : Ordinary differential equations. 3Ed., Springer-Textbook, 1992.

[2] Arnold, V.I., : Mathematical methods in classical mechanics. 2Ed., Springer-Verlag, 1989.

[3] Lesfari, A. : Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences, *Elemente der Mathematik*, Birkhäuser, Vol. 58, No 1, pp. 6-20 (2003).