Formule et noyau de Poisson, problème de Dirichlet pour le disque

A. Lesfari
E. mail : lesfariahmed@yahoo.fr
Site web : http://lesfari.com

Théorème 1. *(formule de Poisson). Soit u une fonction harmonique dans le disque ouvert $D(0,R)$, et continue dans le disque fermé $\overline{D}(0,R)$. Alors*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u\left(Re^{i\theta}\right)\frac{R^2-|z|^2}{\left|Re^{i\theta}-z\right|^2}d\theta,\quad \forall z\in D(0,R),$$

ou, ce qui revient au même, en posant $z=\rho e^{i\alpha}$, $\rho<R$,

$$u\left(\rho e^{i\alpha}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u\left(Re^{i\theta}\right)\left(R^2-\rho^2\right)}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\alpha)}d\theta.$$

Démonstration : Comme $D(0,R)$ est simplement connexe et u est une fonction harmonique sur $D(0,R)$, alors il existe une fonction f holomorphe sur $D(0,R)$ telle que : $u=\mathrm{Re}\, f$. Soit C le cercle de centre 0 et de rayon r tel que: $0<r<R$. La formule intégrale de Cauchy, s'écrit

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad |z|<r \tag{1}$$

Soit $z^*=\dfrac{r^2}{\overline{z}}$, le point symétrique de z par rapport au cercle C. Comme z est à l'intérieur du cercle C, alors z^* se trouve à l'extérieur de celui-ci. Ainsi, d'après le théorème de Cauchy,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}d\zeta,\quad |z|<r \tag{2}$$

et on obtient par soustraction (2) de (1), l'expression

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z^*}\right)d\zeta=0.$$

Or

$$z^* = \frac{r^2}{\overline{z}} = \frac{|\zeta|^2}{\overline{z}} = \frac{\zeta\overline{\zeta}}{\overline{z}},$$

et

$$\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} = \frac{1}{\zeta - z} - \frac{\overline{z}}{\zeta(\overline{\zeta} - \overline{z})} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta|\zeta - z|^2},$$

donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{\zeta|\zeta - z|^2}d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}d\theta, \quad |z| < r$$

Dès lors,

$$u(z) = \text{Re } f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}d\theta, \quad |z| < r$$

et en posant $z = \rho e^{i\alpha}$, $\rho < r$, on obtient

$$u(\rho e^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(re^{i\theta})(r^2 - \rho^2)}{|re^{i\theta} - \rho e^{i\alpha}|^2}d\theta, \quad \rho < r$$

Or

$$|re^{i\theta} - \rho e^{i\alpha}|^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha),$$

donc

$$u(\rho e^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(re^{i\theta})(r^2 - \rho^2)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)}d\theta.$$

Fixons ρ et α et remarquons que cette formule est vraie pour tout r vérifiant: $\rho < r < R$. Notons aussi que $r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha) > 0$ pour $r > \rho$. Par hypothèse u est continue dans le disque fermé $\overline{D}(0, R)$ et comme pour $r > \rho$, $r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha) \neq 0$, alors l'expression $\dfrac{u(re^{i\theta})(r^2 - \rho^2)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)}$ en tant que fonction de r et θ est continue et en outre, pour ρ et α fixés, elle est uniformément continue sur le compact : $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{R+\rho}{2} \leq r \leq R$. Par conséquent, lorsque $r \to R$,

$$\frac{u(re^{i\theta})(r^2 - \rho^2)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)} \longrightarrow \frac{u(Re^{i\theta})(R^2 - \rho^2)}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha)},$$

uniformément en θ, ce qui implique que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(re^{i\theta})(r^2 - \rho^2)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)}d\theta \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(Re^{i\theta})(R^2 - \rho^2)}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha)}d\theta.$$

Finalement,

$$u\left(\rho e^{i\alpha}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u\left(Re^{i\theta}\right)\left(R^2 - \rho^2\right)}{R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos(\theta - \alpha)}d\theta.$$

Note : La fonction $\dfrac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\theta}-z|^2}$ ou $\dfrac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\alpha)}$ porte le nom de noyau de Poisson.

Problème de Dirichlet : Il consiste à trouver une fonction harmonique sur un domaine Ω et prenant des valeurs données sur la frontière de Ω.

Théorème 2. *(problème de Dirichlet pour le disque). Soit $D(0,1)$ un disque ouvert de centre 0 et de rayon R et soit $u(\theta)$ une fonction 2π-périodique sur le cercle $C = \partial D(0,R)$. Alors, il existe une fonction $f(z)$ continue sur le disque fermé $\overline{D}(0,R)$, harmonique sur le disque ouvert $D(0,R)$ et satisfaisant à $f\left(Re^{i\theta}\right) = u(\theta)$. Cette fonction est unique et est donnée par*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\frac{R^2-|z|^2}{|R\ e^{i\theta}-z|^2}d\theta,\ \ |z|<R.$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser le théorème précédent.

References

[1] Lesfari, A. : *Variables complexes (Cours et exercices corrigés)*, éditions Ellipses, Paris, 2014.