QUELQUES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES EN GEOMÉTRIE COMPLEXE

A. Lesfari

Abstract. This paper gives sufficient conditions, which guarantee that a complex n-dimensional manifold is analytically isomorphic to a n-dimensional complex torus and a Kähler manifold. We discuss the relation with Hodge theory and an immediate consequence is that a complex manifold will complete to abelian variety by adjoining some divisors.
Keywords. Complex manifolds, Abelian varieties, Kähler manifolds.
2000 Mathematics subject classifications. 32Q55, 51N15, 14K12, 32Q15, 58A14.

1 INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'objet de ce travail est l'étude de quelques propriétés fondamentales des variétés difféomorphes aux tores complexes, aux variétés kählériennes, aux variétés de Hodge et en particulier aux variétés abéliennes. Soit $\mathcal{D} \subset M$ un diviseur sur une variété complexe M. Autrement dit, un élément de la forme $\mathcal{D} = \sum n_i \mathcal{D}_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, où les $\mathcal{D}_i$ sont des sous-variétés irréductibles sur M. En particulier un diviseur sur une courbe est une somme finie formelle du type $\sum n_i P_i$ où les P_i sont des points de la courbe et n_i des entiers. Par exemple, on peut associer un diviseur à une fonction méromorphe f en prenant pour P_i les zéros et les pôles de f et pour n_i l'ordre de P_i avec un signe négatif pour les pôles. On note en général ce diviseur (f) et on a

$$(f) = (\text{diviseur des zéros de} f) - (\text{diviseur des pôles de} f).$$

On dit qu'un diviseur $\mathcal{D}$ est positif et on note $\mathcal{D} \geq 0$, si les entiers n_i qui interviennent dans la somme sont positifs. Soit

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \{f \text{méromorphe sur } M : (f) + \mathcal{D} \geq 0\},$$

l'espace vectoriel des fonctions f méromorphes telles que : $(f)+\mathcal{D} \geq 0$. Par exemple, si le diviseur $\mathcal{D}$ est positif alors $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ est l'ensemble des fonctions holomorphes en dehors de $\mathcal{D}$ et ayant au plus des pôles le long de $\mathcal{D}$.

Examinons les différents plongements de M dans un espace projectif $\mathbb{CP}^N$. Soit $(1, f_1, ..., f_N)$ une base de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ et définissons une application F holomorphe de M dans $\mathbb{CP}^N$:

$$F : M \longrightarrow M,\ p \longmapsto (1, f_1(p), ..., f_N(p)).$$

Si cette application est un plongement lisse de M dans $\mathbb{CP}^N$, alors la variété M est analytique. D'après le théorème de Chow [2] qui dit que toute sous-variété analytique d'un espace projectif est algébrique, alors il est équivalent de dire que la variété M est algébrique c'est-à-dire définie par l'annulation simultanée d'un nombre fini de polynômes homogènes P_j,

$$M = \bigcap_j \left\{ z \in \mathbb{CP}^N : P_j(z) = 0 \right\}.$$

Par ailleurs, un théorème de Kodaira [2] affirme que si $\mathcal{D} \subset M$ est un diviseur positif, alors pour $k \in \mathbb{N}$, l'application F définie par les fonctions de l'espace $\mathcal{L}(k\mathcal{D})$ plonge M dans $\mathbb{CP}^N$ où $N = \dim \mathcal{L}(k\mathcal{D}) - 1$. En outre, il existe un diviseur positif si et seulement si M admet une 2-forme ω de type $(1,1)$, positive et fermée telle que sa classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$.

Rappelons qu'une métrique kählérienne ou forme de Kähler est une métrique hermitienne (i.e., une 2-forme de type (1,1)) dont la partie imaginaire est fermée. Une variété kählérienne est une variété complexe munie d'une métrique kählérienne. Les variétés kählériennes compactes forment une classe remarquable de variétés analytiques complexes. Nous nous intéresserons à la classe des variétés kählériennes, en prévilégeant les variétés projectives. Une des raisons est que ces dernières contiennent beaucoup de sous-variétés complexes alors que les variétés kählériennes n'en possèdent pas en général. On sait qu'on peut trouver des variétés complexes compactes non kählériennes (par exemple les variétés de Hopf et de Calabi-Eckmann) mais il est très difficile de construire ou de décider si une variété complexe est ou non kählérienne. Les variétés projectives complexes analytiques sont des exemples particuliers de variétés kählériennes compactes. Le théorème de Kodaira peut encore s'énnocer comme suit : Une variété complexe compacte admet un plongement lisse dans $\mathbb{CP}^N$ si et seulement si elle admet une métrique kählérienne dont la forme de Kähler est de classe entière. Un autre résultat intéressant concernant les variétés kählériennes a été obtenu par Moishezon (voir [9] ou [3]) : une variété complexe kählérienne compacte de dimension n est projective si et seulement si elle admet n fonctions méromorphes indépendantes.

Considérons maintenant un tore complexe $T^n = \mathbb{C}^n / L_\Omega$ de dimension n où $L_\Omega \simeq H_1(T, \mathbb{Z})$, est le réseau engendré par les colonnes $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ de la matrice des périodes $\Omega = (\lambda_1, ..., \lambda_{2n})$. Le tore T^n est une variété complexe compacte et lisse, de dimension complexe n. Une question se pose : quand un tore complexe T^n, peut-il être plongé dans un espace projectif et donc considéré comme variété projective ? Le tore T^n admet un plongement dans l'espace projectif $\mathbb{CP}^N$, s'il existe sur T^nune forme de Hodge, c'est-à-dire, une $(1,1)$-forme $\omega : L_\Omega \times L_\Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$, positive, fermée et à classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(T^n, \mathbb{Z})$. Les conditions sur ω sont équivalentes à celles-ci : il existe une matrice entière Q (matrice d'intersection) d'ordre $2n$, antisymétrique et satisfaisant aux relations bilinéaires de Riemann

$$\Omega Q \Omega^\intercal = 0, \qquad i\Omega Q \overline{\Omega}^\intercal > 0.$$

En vertu de ces conditions, on peut choisir une nouvelle base de L_Ω sur $\mathbb{Z}$ de $2n$

vecteurs colonnes $\lambda_1, ..., \lambda_{2n}$ de telle façon que :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_\delta \\ -\Delta_\delta & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Omega = (\Delta_\delta, Z),$$

où

$$\Delta_\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_n \end{pmatrix},$$

et $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathbb{N}^*$, $\delta_j \mid \delta_{j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$, sont des diviseurs élémentaires et Z est une matrice vérifiant $Z^\intercal = Z$, $\mathrm{Im} Z > 0$. La $(1,1)$-forme ω peut donc s'exprimer comme étant $\omega = \sum_{j=1}^n \delta_j dx_j \wedge dx_{n+j}$, où $x_1, ..., x_{2n}$ sont des coordonnées relatives à la base $(\lambda_1, ..., \lambda_{2n})$ de telle façon que : $\int_{\lambda_j} dx_k = \delta_{jk}$. Les diviseurs élémentaires $\delta_1, \ldots, \delta_n$, sont reliés [2] par la formule : $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = \prod_{i=1}^n \delta_i$, et par un théorème de Lefschetz [2], les fonctions de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ ou $\mathcal{L}(2\mathcal{D})$ ou au plus $\mathcal{L}(3\mathcal{D})$, fournissent un plongement holomorphe de T^n dans $\mathbb{CP}^N$ (N large). Un tore complexe qui possède un plongement holomorphe dans un espace projectif s'appelle variété abélienne.

2 QUELQUES PROPRIÉTÉS DES VARIÉTÉS COMPLEXES

Le résultat suivant nous sera utile par la suite.

THÉORÈME 1 *Soit M une variété analytique complexe de dimension n. On suppose que cette variété est compacte, connexe et est munie de n champs de vecteurs holomorphes $X_1, ..., X_n$ commutatifs et indépendants. Alors M est difféomorphe à un tore complexe $\mathbb{C}^n/L$ où L est un réseau de $\mathbb{C}^n$.*

Démonstration : Aux champs de vecteurs $X_1, ..., X_n$ sont liés respectivement n groupes à un paramètre de difféomorphismes ou flots

$$g^{t_1}, ..., g^{t_n} : M \longrightarrow M, \quad (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Ces derniers commutent, i.e.,

$$g^{t_1} \circ ... \circ g^{t_n}(p) = g^{t_n} \circ ... \circ g^{t_1}(p), \quad p \in M,$$

puisque par hypothèse $X_1, ..., X_n$ commutent deux à deux. Il est donc naturel de considérer l'application $g^t : M \longrightarrow M$, en posant

$$g^t = g^{t_1} \circ ... \circ g^{t_n}, \quad t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Evidemment $g^{t+s} = g^t \circ g^s, \forall t, s \in \mathbb{C}^n$. Définissons l'application

$$G : \mathbb{C}^n \longrightarrow M, \quad t \longmapsto G(t) = g^t p.$$

Soit U un voisinage suffisamment petit du point $0 \in \mathbb{C}^n$ et soit V un voisinage du point $p \in M$. La composée de deux applications holomorphes étant holomorphe, on en déduit que la resriction de G à U :

$$U \longrightarrow V, \quad (t_1, ..., t_n) \longmapsto g^{t_1} \circ ... \circ g^{t_n}(p),$$

est holomorphe. De plus, comme $X_1, ..., X_n$ sont indépendants en chaque point de M, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t_1} g^{t_1} \circ ... \circ g^{t_n}(p) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t_n} g^{t_1} \circ ... \circ g^{t_n}(p) \end{pmatrix},$$

est inversible et d'après le théorème des fonctions réciproques l'application G est un difféomorphisme local. Nous allons montrer que G est surjective c'est-à-dire pour $q \in M$, il existe $t \in \mathbb{C}^n$ tel que : $G(t) = g^t p = q$ où $p \in M$. Comme G est un difféomorphisme local, alors pour tout z_1 appartenant à un voisinage de p, on peut trouver $t \in \mathbb{C}^n$ tel que : $g^t p = z_1$. Par hypothèse la variété M est connexe, donc il existe une courbe Γ reliant le point p à q. Par ailleurs, M étant compacte, il existe une boule ouverte B_1 contenant le point z_1. Soit $z_2 \in \Gamma \cap B_1$. Comme précédemment, on peut trouver $t' \in \mathbb{C}^n$ tel que : $g^{t'} z_1 = z_2$, et dès lors $z_2 = g^{t'+t} p$. De même, soit $z_3 \in \Gamma \cap B_2$ où B_2 est une boule ouverte dans M contenant z_2. Il existe $t'' \in \mathbb{C}^n$ tel que : $g^{t''} z_2 = z_3$, ce qui implique que $z_3 = g^{t''+t'+t} p$. De proche en proche, on montre l'existence de $t^{(k-1)} \in \mathbb{C}^n$ tel que : $g^{t^{(k-1)}} z_{k-1} = z_k$, où $z_k \in \Gamma \cap B_{k-1}$ avec B_{k-1} une boule ouverte dans M contenant z_{k-1}, d'où $z_k = g^{t^{(k-1)}+...+t''+t'+t} p$. Donc, on peut recouvrir la courbe Γ par un nombre fini de voisinages de p où le point q joue le rôle de z_k. Par conséquent, l'application G est surjective. Par contre, G n'est pas injective car sinon on aurait une bijection entre un compact M et un non compact $\mathbb{C}^n$, ce qui est absurde. Pour remédier à ce problème, on considère l'ensemble $L = KerG$. Celui-ci est non vide, stable pour l'addition, l'inverse de t est $-t$ et donc un sous-groupe de $\mathbb{C}^n$. Il ne dépend pas de p et il est discret puisque ses points ne possèdent pas de points d'accumulation dans $\mathbb{C}^n$. Par conséquent, L est un réseau dans $\mathbb{C}^n$. En faisant le quotient de $\mathbb{C}^n$ par L, on obtient une application injective $\mathbb{C}^n/L \longrightarrow M, [t] \longmapsto g^t p$, et par conséquent un difféomorphisme. Notons pour terminer que le réseau L peut s'écrire sous la forme $L = \mathbb{Z}e_1 \bigoplus ... \bigoplus \mathbb{Z}e_k, 1 \leq k \leq n$, où $e_1, ..., e_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants. La démonstration du théorème est ainsi achevée. $\square$

Notons tout d'abord qu'en dimension 1, tout tore complexe est une variété abélienne. Dans ce cas le plongement se réalise dans un espace projectif de dimension 2 et on obtient les modèles $\mathbb{C}/L_\Omega$ comme courbes projectives planes et il est plus facile dans ce cas de travailler avec les fonctions $\wp$ et $\wp'$ de Weierstrass. Dans ce qui va suivre, on s'intéressera donc au cas où la dimension de la variété est supérieur à 1. Signalons que pour montrer qu'une variété forme la partie affine d'une variété abélienne (par exemple), on peut être tenté de prendre le compactifié dans un espace projectif. Or on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2 *Soit $\overline{M}$ La fermeture projective d'une variété affine M dans l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^m$ de dimension m. Alors $\overline{M}$ n'est pas une variété abélienne et elle est singulière à l'infini.*

Démonstration : En effet, soient $Z_0, ..., Z_m$ des coordonnées homogènes dans l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^m$ et $\overline{M}$ la fermeture projective de M dans $\mathbb{CP}^m$. On va utiliser un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\overline{M}$ soit une variété abélienne considérée comme étant le quotient $\mathbb{C}^n/L$ de $\mathbb{C}^n$ par un réseau L isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. Donc $\overline{M}$ est lisse et isomorphe à une sous-variété fermée sans singularité et dès lors toute forme différentielle de la forme $d\tau_1 \wedge ... \wedge d\tau_n$ ($\tau_1, ..., \tau_n$ sont des coordonnées naturelles sur $\overline{M} \simeq \mathbb{C}^n/L$) est évidemment holomorphe et ne s'annule jamais. Pour aboutir à une contradiction, on va calculer le fibré canonique $K_{\overline{M}}$ de $\overline{M}$, à l'aide de la formule d'adjonction [2] :

$$K_{\overline{M}} = \left(K_{\mathbb{CP}^m} \otimes \left[\overline{M}\right]\right)\big|_{\overline{M}},$$

où $\left[\overline{M}\right]$ est le fibré en droites dans $\mathbb{CP}^m$. Soit

$$x_1 = \frac{Z_1}{Z_0},\ x_2 = \frac{Z_2}{Z_0},\ \ldots\ , x_m = \frac{Z_m}{Z_0},$$

les coordonnées affines dans $\mathbb{CP}^m \backslash \{Z_0 = 0\}$. Déterminons le diviseur de la forme $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$. Pour celà, considérons sur $\mathbb{CP}^m \backslash \{X_m = 0\}$ les coordonnées affines suivantes :

$$u_0 = \frac{Z_0}{Z_m},\ u_1 = \frac{Z_1}{Z_m},\ \ldots\ , u_{m-1} = \frac{Z_{m-1}}{Z_m}.$$

On a

$$u_0 = \frac{1}{x_m},\ u_1 = \frac{x_1}{x_m},\ \ldots\ , u_{m-1} = \frac{x_{m-1}}{x_m},$$

et dès lors

$$\omega = \frac{1}{u_0^{m+1}} du_0 \wedge du_1 \wedge \ldots \wedge du_{m-1}.$$

D'où, le diviseur de ω est $(\omega) = -(m+1)\,\mathbf{H}_\infty$, où $\mathbf{H}_\infty$ est un hyperplan dans $\mathbb{CP}^m$ et

$$K_{\mathbb{CP}^m} = [(\omega)] = [-(m+1)\,\mathbf{H}_\infty].$$

En remplaçant dans la formule d'adjonction précédente, on obtient $K_{\overline{M}} \sim [\mathbf{H}_\infty]|_{\overline{M}}$, et donc toute forme différentielle sur $\overline{M}$ doit avoir un zéro sur $\overline{M}$, ce qui est contradictoire. □

Donc d'après ce résultat, pour qu'une variété M soit par exemple la partie affine d'une variété abélienne, la variété $\overline{M}$ doit être singulière à l'infini c'est-à-dire le long du lieu $Z_0 = 0$. La théorie de la résolution des singularités de Hironaka [4, 5] via la délicate procédure "blow-up, blow-down" permet du moins théoriquement de résoudre ces singularités. Le résultat qui suit donne des conditions suffisantes pour qu'une variété complexe soit compacte, connexe, possède un plongement dans un espace projectif et soit difféomorphe à un tore complexe. En particulier, on montre que c'est une variété kählérienne. Nous montrerons dans le théorème suivant un résultat concernant les variétés de Hodge (ce sont des variétés kählériennes compactes dont la classe de cohomologie de la forme de Kähler est un multiple réel d'une classe entière) ainsi que celle des variétés abéliennes dont les applications sont immenses et importantes [1, 6, 8]. En tout cas, dans la pratique et en dimension supérieure les choses se compliquent considérablement (voir par exemple [1]).

THÉORÈME 3 *Soit*

$$\overline{A} = \bigcap_i \{z = (z_0, z_1, ..., z_n) \in \mathbb{CP}^n : P_i(z) = 0\},$$

une variété irréductible définie par l'annulation simultanée d'un nombre fini de polynômes homogènes P_i et soit $A = \overline{A} \cap \{z_0 \neq 0\}$, la variété affine irréductible lisse correspondante. Posons $\overline{A} \equiv A \cup \mathcal{V}$, i.e., $\mathcal{V} = \overline{A} \cap \{z_0 = 0\}$. Considérons l'application

$$f : \overline{A} \longrightarrow \mathbb{CP}^m, z \longmapsto f(z),$$

et introduisons les notations suivantes : $M = f(A)$, $\overline{M} = f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup ... \cup \mathcal{V}_n$ où $\mathcal{V}_i$ sont des sous-variétés de codimension $n-1$ et $\mathcal{W} \equiv f(\mathcal{V}) = f(\mathcal{V}_1) \cup ... \cup f(\mathcal{V}_n) \equiv \mathcal{W}_1 \cup ... \cup \mathcal{W}_n$. On suppose que :

(i) f applique de manière holomorphe A sur M.

(ii) la variété A est munie de n champs de vecteurs holomorphes $X_1, ..., X_n$ commutatifs, indépendants et que un des champs de vecteurs $X_k (1 \leq k \leq n)$ se prolonge de façon holomorphe sur un voisinage de $\mathcal{W}_k$ dans $\mathbb{CP}^m$.

(iii) Pour tout $p \in \mathcal{W}_k$, la courbe intégrale $f(t) \in \mathbb{CP}^m$ du champ de vecteurs X_k passant par $f(0) = p \in \mathcal{W}_k$ est telle que :

$$\{f(t) : 0 <\mid t \mid< \varepsilon, t \in \mathbb{C}\} \subset f(\overline{A}).$$

Alors
a) La variété $\overline{M}$ est compacte, connexe et admet un plongement dans l'espace projective $\mathbb{CP}^m$.
b) La variété $\overline{M}$ est difféomorphe à un tore complexe de dimension n. En outre, les champs de vecteurs $X_1, ..., X_n$ se prolongent de façon holomorphe et demeurent indépendants sur la variété $\overline{M}$.
c) $\overline{M}$ est une variété kählérienne.
d) La variété $\overline{M}$ est de Hodge. En particulier, la variété A forme la partie affine d'une variété abélienne $\overline{M}$.

Démonstration : La condition (iii) signifie que les orbites de X_k passant à travers $\mathcal{W}_k$ pénétrent immédiatement dans la partie affine ; en particulier le champ de vecteurs X_k ne s'annule en aucun point de $\mathcal{W}_k$.
a) Une étape cruciale consiste à montrer que les orbites passant à travers $\mathcal{W}_k$ forment une variété lisse $\Sigma_p, p \in \mathcal{W}_k$ telle que : $\Sigma_p \backslash \mathcal{W}_k \subseteq M$. Soit $p \in \mathcal{W}_k$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $g^t_{X_k}$ le flot correspondant au champ de vecteurs X_k et $\{g^t_{X_k} : t \in \mathbb{C}, 0 <\mid t \mid< \varepsilon\}$, l'orbite passant à travers le point p. D'après les conditions (i) et (ii) le champ de vecteurs X_k est holomorphe sur un voisinage de $\mathcal{W}_k$ et ne s'annule en aucun point de $\mathcal{W}_k$, donc le flot $g^t_{X_k}$ peut-être redréssé dehors après un changement de coordonnées holomorphes. Soit $\mathcal{H} \subset \mathbb{CP}^m$ un hyperplan transversal à la direction du flot au point p et soit Σ_p l'élément dans $\mathbb{CP}^m$, formé par le diviseur $\mathcal{W}_k$ et les orbites ci-dessus. Posons $\mathcal{W}' = \mathcal{H} \cap \Sigma_p$ et donc localement on a $\Sigma_p = \mathcal{W}' \times \mathbb{C}^n$. Montrons que Σ_p est lisse. Montrons tout d'abord que $\mathcal{W}'$ est lisse. En effet, supposons que $\mathcal{W}'$ est singulière en 0 ce qui implique que Σ_p est aussi singulière le long de la trajectoire (axe

des t) laquelle pénètre immédiatement dans la partie affine $f(A)$ donc celle-ci est singulière ce qui est absurde (d'après la condition (i)). Donc W' est lisse et en vertu du théorème des fonctions implicites la variété Σ_p est lisse. Considérons maintenant l'application

$$\overline{A} \subset \mathbb{CP}^n \longrightarrow \mathbb{CP}^m, \quad z \longmapsto f(z),$$

où $z = (z_0, z_1, ..., z_n)$ sont des coordonnées homogènes et $\overline{M} = f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. Rappelons que le flot existe dans tout voisinage de p dans $\mathbb{CP}^m$ et il a été redréssé dehors précédemment. Dès lors, puisque Σ'_p est la fermeture d'une variété affine alors Σ'_p doit être transversale à l'hyperplan $\mathcal{H}$ comme pécédemment (i.e., $\Sigma'_p = \mathcal{W}'' \times \mathbb{C}^n$ localement). Dans un voisinage ($\subset \mathbb{CP}^m$) de p, on a $\Sigma_p = \overline{M}$ et $\Sigma_p \backslash \mathcal{W}_k \subseteq M$ car sinon, il existe un élément $\Sigma'_p \subset \overline{M}$ tel que :

$$\{g^t_{X_k} : t \in \mathbb{C}, 0 <\mid t \mid< \varepsilon\} = (\Sigma_p \cap \Sigma'_p) \backslash p \subset M,$$

d'après la condition (iii). Autrement dit, $\Sigma_p \cap \Sigma'_p =$ axe des t et M serait singulière le long des axes des t, ce qui est absurde (d'après la condition (i)). Montrons maintenant que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont connexes. Comme la variété A et la section générique hyperplane $\mathcal{H}_{gen.}$ de $\overline{A}$ sont irréductibles, alors toutes les sections hyperplanes sont connexes et par conséquent $\mathcal{V}$ est connexe. Montrons que $\mathcal{W}$ est aussi connexe. Soit $G_f \subset \mathbb{CP}^n \times \mathbb{CP}^m$ le graphe de l'application f, lequel est irréductible ensemble avec $\overline{A}$. Il s'ensuit de l'irréductibilité de G_f qu'une section générique hyperplane $G_f \cap (\mathcal{H}_{gen.} \times \mathbb{CP}^m)$ est connexe et par conséquent la section hyperplane spéciale $G_f \cap (\{z_0 = 0\} \times \mathbb{CP}^m)$ est aussi connexe. Comme la projection est une application qui conserve la connexité par continuité, on en déduit que

$$Proj_{\mathbb{CP}^m}[G_f \cap (\{z_0 = 0\} \times \mathbb{CP}^m)] = f(\mathcal{V}) \equiv \mathcal{W},$$

est connexe. La variété

$$\overline{M} = A \cup \bigcup_{p \in \mathcal{W}_k} \Sigma_p = M \cup \mathcal{W}_k \subseteq \mathbb{CP}^m,$$

est compacte, connexe et possède un plongement dans l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^m$ via l'application f.

b) Soient $g^{t_1}, ..., g^{t_n}$ les flots engendrés respectivement par les champs de vecteurs $X_1, ..., X_n$ sur A et choisissons un point $p_1 \in \overline{M} \backslash A$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et pour tout $t_1 \in \mathbb{C}$ tels que : $0 < |t_1| < \varepsilon$, alors $q \equiv g^{t_1}(p_1)$ est bien défini et appartient à A en vertu de l'hypothèse (iii). Soit $U(q) \subseteq M$ un voisinage de q et posons

$$g^{t_2}(p_2) = g^{-t_1} \circ g^{t_2} \circ g^{t_1}(p_2), \quad \forall p_2 \in U(p_1) \equiv g^{-t_1}(U(q)).$$

Notons que cette définition a bien un sens car g^{t_2} est indépendant de t_1 puisque

$$\begin{aligned} g^{-(t_1+\varepsilon)} \circ g^{t_2} \circ g^{t_1+\varepsilon}(p_2) &= g^{-(t_1+\varepsilon)} \circ g^{t_2} \circ g^{t_1} \circ g^{\varepsilon}(p_2), \\ &= g^{-(t_1+\varepsilon)} \circ g^{\varepsilon} \circ g^{t_2} \circ g^{t_1}(p_2), \\ &= g^{-t_1} \circ g^{t_2} \circ g^{t_1}(p_2), \end{aligned}$$

en vertu de la commutativité des champs de vecteurs. La fonction $g^{t_2}(p_2)$ est holomorphe en p_2 et t_2. Le même raisonnement reste valable pour les fonctions $g^{t_3}(p_3), ..., g^{t_n}(p_n)$ avec

$$g^{t_n}(p_n) = g^{-t_{n-1}} \circ g^{t_n} \circ g^{t_{n-1}}(p_n), \quad \forall p_n \in U(p_{n-1}) \equiv g^{-t_{n-1}}(U(q)).$$

Les champs de vecteurs $X_1, ..., X_n$ se prolongent de façon holomorphe et demeurent indépendants sur la variété $\overline{M}$. Fixons maintenant $p \in \overline{M}$ et considérons

$$\mathbb{C}^n \longrightarrow \overline{M}, \quad t = (t_1, ..., t_n) \longmapsto g^t p = g^{t_1} \circ \ldots \circ g^{t_n}(p).$$

Comme $\overline{M}$ est compact, on montre comme dans le théorème 1 que l'ensemble $L = \{t \in \mathbb{C}^n : g^t p = p\}$ est un réseau de $\mathbb{C}^n$ considéré comme espace vectoriel réel, de rang $2n$ et donc engendré par $2n$ vecteurs (dans $\mathbb{C}^n$) $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. En faisant le quotient de $\mathbb{C}^n$ par L, on déduit du théorème 1, que $\overline{M}$ est difféomorphe au tore complexe $\mathbb{C}^n/L$.
c) Munissons la variété complexe $\overline{M}$ de la métrique hermitienne

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} dt_k \otimes d\overline{t_k},$$

et soit ω la $(1,1)$-forme fondamentale associée à cette métrique. On a

$$\omega = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} ds^2 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{k=1}^{n} dt_k \wedge d\overline{t_k}.$$

Comme ω est fermée, on en déduit que ds^2 est une métrique kählérienne et que la variété $\overline{M}$ est kählérienne.
d) Nous avons vu dans la question précédente que sur la variété kählérienne $\overline{M}$ sont définies les périodes de ω. Si toutes ces périodes sont entières (éventuellement après multiplication par un nombre), on obtient une variété de Hodge. Plus précisement, les intégrales $\int_{\gamma_k} \omega$ de la forme ω où γ_k sont des cycles à deux dimensions dans $H_2(\overline{M}, \mathbb{Z})$, déterminent les périodes de ω. Comme celles-ci sont des nombres entiers, alors la variété $\overline{M}$ est de Hodge. La variété $\overline{M}$ est munie de n champs de vecteurs holomorphes, indépendants en chaque point et commutants. D'après b), la variété $\overline{M}$ est un tore complexe et comme celui-ci possède un plongement projectif, alors M est une variété abélienne. Une autre preuve consiste à utiliser le résultat que l'on vient de démontrer puisque tout tore de Hodge est abélien, la réciproque est aussi vraie. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Un tore complexe étant une variété kählérienne, on déduit du théorème de Moishezon le résultat suivant :

COROLLAIRE 4 *Un tore complexe $T^n = \mathbb{C}^n/L_\Omega$ est une variété abélienne si et seulement si il admet n fonctions méromorphes indépendantes.*

Références

[1] M. ADLER, P. VAN MOERBEKE, Algebraic completely integrable systems : a systematic approach, I, II, III. Séminaire de Mathématique N.S, Rapport N^0 110, p.1-145, SC/MAPA - Institut de mathématique pure et appliquée, UCL, 1985.

[2] P.A. GRIFFITHS, J. HARRIS, Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, 1978.

[3] HARTSHORNE, R., Algebraic geometry, Springer-Verlag, 1977.

[4] HIRONAKA, H., Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero : I, Ann. of Math., 2nd Ser., Vol. 79, No. 1 (1964) 109-203

[5] HIRONAKA, H., Resolution of Singularities of an Algebraic Variety Over a Field of Characteristic Zero : II, Ann. of Math., 2nd Ser., Vol. 79, No. 2 (1964) 205-326

[6] A. LESFARI, Abelian surfaces and Kowalewski's top, Ann. Scient. École Norm. Sup., Paris sér. 4, 21 (1988) 193-223.

[7] A. LESFARI, Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences, Elem. Math., 58 (2003) 6-20.

[8] A. LESFARI, Abelian varieties, surfaces of general type and integrable systems, Beiträge Algebra Geom., Vol.48, 1 (2007) 95-114.

[9] MOISHEZON, B.G., On n-dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions, Amer. Math. Soc. Transl. 63 (1967) 51-177.

[10] D. MUMFORD, Abelian varieties, Oxford University press, 1974.

[11] D. MUMFORD, Algebraic geometry I : complex projective varieties, Springer-Verlag, 1975.

[12] WEIL, A., Variétés kählériennes, Hermann, Paris, 1971.

A. Lesfari
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Chouaïb Doukkali
B.P. 20, El-Jadida, Maroc.
E-mail : Lesfariahmed@yahoo.fr