

# Fonctions méromorphes et fonctions thêta sur les surfaces de Riemann

A. Lesfari

*Department of Mathematics*

*Faculty of Sciences*

*University of Chouaïb Doukkali*

*B.P. 20, 24000 El Jadida, Morocco.*

*lesfariahmed@yahoo.fr*

Theta functions play a major role in many current researches and are powerful tools for studying integrable systems. The purpose of this paper is to provide a short and quick exposition of some aspects of meromorphic theta functions for compact Riemann surfaces. The study of theta functions will be done via an analytical approach using meromorphic functions in the framework of Mumford. Some interesting examples will be given : the classical Kirchhoff equations in the cases of Clebsch and Lyapunov-Steklov, the Landau-Lifshitz equation and the sine-Gordon equation.

*AMS 2010 Subject Classification* : 30F10, 30D30, 14K25.

*Key words* : Riemann surfaces, meromorphic functions, theta functions.

## 1 Fonctions thêta

Soient  $X$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$  et  $B = (b_{jk})_{1 \leq j, k \leq g}$  une matrice carrée d'ordre  $g$ , symétrique et dont la partie imaginaire est définie positive. On considère la fonction thêta  $\theta(z|B)$  de Riemann définie à l'aide de la série :

$$\theta(z|B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i \langle Bm, m \rangle + 2\pi i \langle z, m \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^g \quad (1)$$

où  $\langle Bm, m \rangle = \sum_{j, k=1}^g b_{jk} m_j m_k$ ,  $\langle z, m \rangle = \sum_{j=1}^g z_j m_j$ . La convergence de cette série pour tout  $z \in \mathbb{C}^g$ , résulte du fait que  $\text{Im } B \geq 0$ . On montre que cette série converge absolument et uniformément sur des ensembles compacts et qu'en outre, la fonction  $\theta(z|B)$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}^g$ . On posera dans la suite  $\theta(z) \equiv \theta(z|B)$  lorsque la matrice  $B$  est fixée. Soit  $(e_1, \dots, e_g)$  une base de  $\mathbb{C}^g$  avec  $(e_j)_k = \delta_{jk}$ , et désignons par  $f_j = (b_{1j} \dots b_{gj})^\top$ , les colonnes de la matrice  $B$  ou sous forme condensée  $f_j = B e_j$ ,  $j = 1, \dots, g$ .

**Théorème 1** La fonction  $\theta$  satisfait aux équations fonctionnelles :

$$\theta(z + e_j) = \theta(z), \quad \theta(z + f_j) = e^{-\pi i b_{jj} - 2\pi i z_j} \cdot \theta(z). \quad (2)$$

Pour tout  $m, n \in \mathbb{Z}^g$ , on a

$$\theta(z + n + Bm) = e^{-\pi i \langle Bm, m \rangle - 2\pi i \langle m, z \rangle} \cdot \theta(z). \quad (3)$$

Les vecteurs de la forme  $n + Bm$  forment un réseau de périodes.

*Démonstration* : La première relation résulte de la formule (1). Concernant la seconde relation, on a

$$\begin{aligned} \theta(z + f_j) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i \langle Bm, m \rangle + 2\pi i \langle m, z + f_j \rangle}, \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i \langle B(n - e_j), n - e_j \rangle + 2\pi i \langle n - e_j, z + f_j \rangle}, \quad n \equiv m + e_j \\ &= e^{-\pi i \langle B e_j, e_j \rangle - 2\pi i \langle e_j, z \rangle} \cdot \theta(z), \\ &= e^{-\pi i b_{jj} - 2\pi i z_j} \cdot \theta(z), \end{aligned}$$

et la, relation (3) en résulte immédiatement.  $\square$

Les vecteurs  $e_1, \dots, e_g$  forment une base de périodes de la fonction  $\theta(z)$ . Les vecteurs  $f_j$  s'appellent les quasi-périodes de  $\theta(z)$ . La fonction  $\theta$  est quasi-périodique et elle est bien définie sur la variété jacobienne de  $X$ . Considérons maintenant une généralisation de la fonction thêta (1) appelée fonction thêta de caractéristiques  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  définie par

$$\begin{aligned} \theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z|B) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i \langle B(m + \alpha), m + \alpha \rangle + 2\pi i \langle z + \beta, m + \alpha \rangle}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^g \quad (4) \\ &= e^{\pi i \langle B\alpha, \alpha \rangle + 2\pi i \langle z + \beta, \alpha \rangle} \cdot \theta(z + \beta + B\alpha). \quad (5) \end{aligned}$$

Pour alléger les formules, on notera simplement :  $\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z) \equiv \theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z|B)$  lorsque la matrice  $B$  est fixée. En particulier,  $\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z) = \theta(z)$ . D'après la relation (3), on a aussi  $\theta \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} (z) = \theta(z)$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}^g$ . Dès lors, il suffit de considérer les fonctions  $\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z)$  où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_g)$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_g) \in \mathbb{R}^g$  sont tels que :  $0 < \alpha_j, \beta_j < 1$ ,  $j = 1, \dots, g$ .

**Théorème 2** La fonction  $\theta$  vérifie la propriété de périodicité suivante :

$$\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z)(z + n + Bm) = e^{-\pi i \langle Bm, m \rangle - 2\pi i \langle z, m \rangle + 2\pi i (\langle \alpha, n \rangle - \langle \beta, m \rangle)} \cdot \theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z).$$

*Démonstration* : Il suffit d'utiliser un raisonnement similaire à celui de la proposition précédente.  $\square$ .

Lorsque  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  et  $\beta_1, \dots, \beta_g$  ne prennent que les valeurs 0 ou  $\frac{1}{2}$ , on dira que  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  est une demi-période. En outre, une demi-période  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  est dite paire si  $4\langle \alpha, \beta \rangle \equiv 0 \pmod{2}$  et impaire sinon.

**Théorème 3** *La fonction  $\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z)$  est paire (resp. impaire) si la demi-période  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  est paire (resp. impaire). En outre, on a  $\theta(z) = \theta(-z)$ .*

*Démonstration* : En faisant la substitution  $z \mapsto -z$ ,  $m \mapsto -m - 2$ , dans la relation (4), on obtient immédiatement pour le terme général de la série,

$$e^{\pi i \langle B(-m-\alpha), -m-\alpha \rangle + 2\pi i \langle -z+\beta, -m-\alpha \rangle} = e^{\pi i \langle B(m+\alpha), m+\alpha \rangle + 2\pi i \langle z+\beta, m+\alpha \rangle} \cdot e^{4\pi i \langle \alpha, \beta \rangle}.$$

Or d'après la définition ci-dessus, le signe de  $e^{4\pi i \langle \alpha, \beta \rangle}$  est déterminé par la parité du nombre  $4\langle \alpha, \beta \rangle$ , et la dernière relation en résulte.  $\square$

Par exemple le nombre de demi-périodes paires est égal à  $2^{g-1}(2^g + 1)$  et celui de demi-périodes impaires à  $2^{g-1}(2^g - 1)$ .

## 2 Fonctions méromorphes exprimées en termes de fonctions thêta

Considérons le cas des surfaces de Riemann de genre 1, c.-à-d., des courbes elliptiques. Rappelons qu'une fonction elliptique est une fonction méromorphe doublement périodique. La matrice  $B$  se réduit dans ce cas à un nombre que l'on note  $b$  avec  $\text{Im } B \geq 0$ . Les nombres 1 et  $b$  engendrent un parallélogramme des périodes noté  $\Omega$ . Les quatre fonctions thêta correspondant aux demi-périodes  $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$  sont  $i\theta_1(z) \equiv \theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z)$ ,  $\theta_2(z) \equiv \theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (z)$ ,  $\theta_3(z) \equiv \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z) = \theta(z)$ ,  $\theta_4(z) \equiv \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z)$ . Ces fonctions sont holomorphes sur  $\mathbb{C}$ . En outre, on déduit immédiatement du théorème 3 que  $\theta_1(z)$  est impaire et que  $\theta_2(z)$ ,  $\theta_3(z)$ ,  $\theta_4(z)$  sont paires. Pour déterminer les zéros des fonctions  $\theta_j$ , il suffit d'après le théorème 2 de les chercher dans le parallélogramme des périodes  $\Omega$ . Comme  $\theta_1(z)$  est impaire, alors  $\theta_1(0) = 0$  et les autres zéros de  $\theta_j(z)$  s'obtiennent via le théorème 2. Prenons par exemple le cas de  $\theta_3(z)$ . On a  $\theta_3(\frac{1}{2} + \frac{b}{2}) = 0$  et  $z = \frac{1}{2}(1 + b)$  est le seul zéro de cette fonction dans  $\Omega$ . En

effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{d\theta_3(z)}{\theta_3(z)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 (d\log \theta_3(z) - d\log \theta_3(z+b)) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_0^b (d\log \theta_3(z+1) - d\log \theta_3(z)). \end{aligned}$$

D'après le théorème 2, on a  $\theta_3(z+1) = \theta_3(z)$  et  $\theta_3(z+b) = e^{-\pi ib - 2\pi iz} \theta_3(z)$ , donc

$$\int_0^b (d\log \theta_3(z+1) - d\log \theta_3(z)) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 (d\log \theta_3(z) - d\log \theta_3(z+b)) &= \int_0^1 (d\log \theta_3(z) - d\log e^{-\pi ib - 2\pi iz} \theta_3(z)), \\ &= \int_0^1 2\pi i dz = 1. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{d\theta_3(z)}{\theta_3(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} d\theta_3(z) = 1.$$

Par conséquent, on a le résultat suivant :

**Théorème 4** *La fonction  $\theta(z)$  possède dans le parallélogramme des périodes  $\Omega$  (engendré par 1 et  $b$ ), un seul zéro au point  $z = \frac{1}{2}(1+b)$ .*

En posant  $z = x \in \mathbb{R}$ ,  $b = it$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , l'équation (1) s'écrit

$$\theta(x|it) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 t + 2\pi i m x} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\pi m^2 t} \cos 2\pi m x.$$

Cette fonction est périodique par rapport à  $x$ , c.-à-d.,  $\theta(x+1|it) = \theta(x|it)$ , et satisfait à l'équation de la chaleur

$$4\pi \frac{\partial \theta(x|it)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta(x|it)}{\partial x^2}.$$

L'unicité de cette solution résulte du fait que  $\lim_{t \rightarrow 0} \theta(x|it) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_m(x)$ , où

$\delta_m$  est la distribution de Dirac au point  $m$ . De même, la fonction  $\theta_1(z)$  vérifie une équation différentielle de 3<sup>ème</sup> ordre. En effet, il suffit d'utiliser la relation  $\wp(z) = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \log \theta_1(z) + C$ , où  $C$  est une constante,  $\wp(z)$  est la fonction de Weierstrass définie par

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ , est le réseau engendré par deux nombres complexes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  différents de 0 tels que :  $\text{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$ , et tenir compte de l'équation différentielle :

$$(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3, \quad (6)$$

où  $g_2 = 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}$ ,  $g_3 = 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}$ . Par ailleurs, on a les identités classiques [11] :

**Théorème 5** *La fonction thêta satisfait aux formules d'addition :*

$$\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z_1 + z_2) = \sum_{2\delta \in (\mathbb{Z}_2)^g} \hat{\theta} \begin{bmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} + \delta \\ \gamma + \varepsilon \end{bmatrix} (2z_1) \cdot \hat{\theta} \begin{bmatrix} \frac{\alpha-\beta}{2} + \delta \\ \gamma - \varepsilon \end{bmatrix} (2z_2),$$

où  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon \in \mathbb{R}^g$ ,

$$\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z) \equiv \theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z|B), \quad \hat{\theta} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z) \equiv \theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (z|2B).$$

$$\begin{aligned} & \theta \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} (z_1) \cdot \theta \begin{bmatrix} m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} (z_2) \cdot \theta \begin{bmatrix} m_3 \\ n_3 \end{bmatrix} (z_3) \cdot \theta \begin{bmatrix} m_4 \\ n_4 \end{bmatrix} (z_4) \\ &= \frac{1}{2^g} \sum_{2(a_1, a_2) \in (\mathbb{Z}_2)^{2g}} e^{-4\pi i \langle m_1, a_2 \rangle} \cdot \theta \begin{bmatrix} k_1 + a_1 \\ l_1 + a_2 \end{bmatrix} (w_1) \dots \theta \begin{bmatrix} k_4 + a_1 \\ l_4 + a_2 \end{bmatrix} (w_4), \end{aligned}$$

où  $(z_1, \dots, z_4) = (w_1, \dots, w_4)M$  avec

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Ici  $\begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_4 \\ n_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} k_4 \\ l_4 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs quelconques d'ordre  $2g$  avec

$$\left( \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_4 \\ n_4 \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} k_1 \\ l_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} k_4 \\ l_4 \end{pmatrix} \right) M,$$

et  $\mathbf{1}$  désigne la matrice unité d'ordre  $g$  ou  $2g$ .

En particulier, on a les formules :

$$\begin{aligned} \left( \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z) \right)^2 \cdot \left( \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0) \right)^2 &= \left( \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z) \right)^2 \cdot \left( \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (0) \right)^2 \\ &+ \left( \theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (z) \right)^2 \cdot \left( \theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (0) \right)^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left(\theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z)\right)^2 \cdot \left(\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0)\right)^2 &= \left(\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (z)\right)^2 \cdot \left(\theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (0)\right)^2 \\ &\quad - \left(\theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (z)\right)^2 \cdot \left(\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (0)\right)^2, \end{aligned}$$

ainsi que l'identité de Jacobi obtenue en posant  $z = 0$ ,

$$\left(\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (0)\right)^4 = \left(\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} (0)\right)^4 + \left(\theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} (0)\right)^4.$$

Nous allons voir comment exprimer les fonctions méromorphes sur le tore  $\mathbb{C}/\Lambda$ , en termes de la fonction thêta. Plusieurs approches sont possibles :

*Approche 1* : Rappelons que toute fraction rationnelle (donc fonction méromorphe sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ) peut s'écrire sous la forme

$$f(z) = \prod_{j=1}^m \frac{z - P_j}{z - Q_j}.$$

Par analogie, soient  $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_m$  des points de la surface de Riemann  $X$  et  $f(z)$  une fonction ayant des zéros aux points  $P_1, \dots, P_m$  et des pôles aux points  $Q_1, \dots, Q_m$ . On suppose que la condition (i) (ou ce qui est équivalent, la condition (ii)) du théorème d'Abel<sup>1</sup> est satisfaite. Comme  $X$  est de genre 1, alors il existe une seule différentielle holomorphe  $\omega$  sur  $X$ . Toujours d'après le théorème d'Abel, l'existence de la fonction  $f(z)$  impose la condition  $\sum_{j=1}^m P_j = \sum_{j=1}^m Q_j$ . Notons que pour  $m = 1$ ;  $P_1 = Q_1$  et le seul cas valable est  $f(z) = \text{constante}$ . Dans le cas où  $m \geq 2$ , alors la fonction  $f(z)$  s'exprime en fonction de  $\theta$  à l'aide de la formule

$$f(z) = C \prod_{j=1}^m \frac{\theta(z - P_j - \frac{1}{2}(1+b))}{\theta(z - Q_j - \frac{1}{2}(1+b))},$$

---

1. Soient  $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$  des points de  $X$ . Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes : (i) Il existe une fonction méromorphe  $f$  telle que :  $(f) = \sum_{j=1}^m q_j - \sum_{j=1}^m p_j$ . (ii) Il existe un chemin fermé  $\gamma$  tel que :  $\forall \omega \in \Omega^1(X)$ ,  $\sum_{j=1}^m \int_{p_j}^{q_j} \omega = \int_{\gamma} \omega$ . Soit  $\mathcal{D} = \sum_{j=1}^m n_j q_j \in \text{Div}(X)$ ,  $p \in X$ , fixé et soit  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  une base de différentielles holomorphes sur  $X$ . L'application

$$\varphi : \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Jac}(X), \quad \mathcal{D} \longmapsto \left( \sum_{j=1}^m n_j \int_p^{q_j} \omega_1, \dots, \sum_{j=1}^m n_j \int_p^{q_j} \omega_g \right),$$

est dite "application d'Abel-Jacobi". En particulier, si  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 = \sum_{j=1}^m q_j - \sum_{j=1}^m p_j$ , alors la condition (i) signifie que  $\mathcal{D} \in \text{Div}^0(X)$  ou encore  $\mathcal{D}_1$  est équivalent à  $\mathcal{D}_2$ . La condition (ii) peut s'écrire sous une forme condensée,  $\forall \omega \in \Omega^1(X)$ ,  $\int_{\mathcal{D}_1} \omega = \int_{\mathcal{D}_2} \omega$  ou encore sous la forme  $\varphi(\mathcal{D}) \equiv \left( \sum_{j=1}^m \int_{p_j}^{q_j} \omega_1, \dots, \sum_{j=1}^m \int_{p_j}^{q_j} \omega_g \right) \equiv 0 \text{ mod. } L$ , avec  $\varphi$  l'application définie par  $\varphi : \text{Div}^0(X) \longrightarrow \text{Jac}(X)$ .

où  $C$  est une constante. Notons que  $f(z+1) = f(z)$ . En outre, d'après la relation (1) et du fait que  $\sum_{j=1}^m P_j = \sum_{j=1}^m Q_j$ , on a aussi  $f(z+b) = f(z)$ . Donc  $f$  est doublement périodique. La fonction  $f$  est méromorphe avec des zéros en  $Q_j + \frac{1}{2}(1+b)$  et des pôles en  $P_j + \frac{1}{2}(1+b)$ .

Approche 2 : La fonction  $\log \theta(z)$  peut s'exprimer comme étant la somme d'une fonction doublement périodique de périodes 1,  $b$  et d'une fonction linéaire. Donc la fonction  $\frac{d^2}{dz^2} \log \theta(z)$  est doublement périodique et méromorphe sur  $X$ , avec un pôle double en  $z = \frac{1}{2}(1+b)$ . Cette fonction coïncide avec la fonction  $\wp(z)$  de Weierstrass :

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2} \log \theta(z) + C, \quad (7)$$

où  $C$  est une constante choisie de telle manière que le développement en série de Laurent de  $\wp(z)$  en  $z = 0$  n'a pas de terme constant. On montre que la fonction  $\theta(z)$  satisfait à une équation différentielle de 3<sup>ème</sup>-ordre. Il suffit d'utiliser la relation (1) et l'équation différentielle (6).

Approche 3 : Rappelons que les fonctions méromorphes avec des pôles simples sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  peuvent s'écrire sous la forme

$$f(z) = \sum_j \frac{\lambda_j}{z - P_j} + C,$$

où  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  et  $C$  une constante. Par analogie, on considère sur  $X$  la fonction

$$f(z) = \sum_j \lambda_j \frac{d}{dz} \log \theta(z - P_j) + C,$$

où  $P_j \in X$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  tel que  $\sum_j \lambda_j = 0$  et  $C$  est une constante. Cette fonction est doublement périodique et méromorphe avec des pôles simples en  $P_j + \frac{1}{2}(1+b)$  et de résidus  $\lambda_j$  en ces points.

Nous avons vu comment peuvent s'exprimer les fonctions méromorphes sur le tore  $\mathbb{C}/\Lambda$  en termes de fonction thêta. Par ailleurs, pour  $g = 1$ , on sait que  $X \simeq \mathbb{C}/\Lambda \simeq \text{Jac}(X)$ . Donc la construction qui a été faite précédemment sur le tore  $\mathbb{C}/\Lambda$  ou ce qui revient au même sur  $\text{Jac}(X)$  est aussi valable sur la surface de Riemann  $X$ . Par exemple, prenons le cas d'une fonction ayant des pôles en  $P_1, \dots, P_m$  et des zéros en  $Q_1, \dots, Q_m$  sur la surface de Riemann  $X$ . D'après le théorème d'Abel, on a  $\sum_{j=1}^m \varphi(P_j) = \sum_{j=1}^m \varphi(Q_j)$ , et on peut selon la méthode 1 décrite ci-dessus, exprimer la fonction  $f(P)$  en termes de fonction thêta à l'aide de la formule

$$f(P) = C \prod_{j=1}^m \frac{\theta(\varphi(P) - \varphi(Q_j) - \frac{1}{2}(1+b))}{\theta(\varphi(P) - \varphi(P_j) - \frac{1}{2}(1+b))}.$$

Passons maintenant au cas où la surface de Riemann  $X$  est de genre  $g > 1$ . Rappelons que le problème d'inversion de Jacobi [5], consiste à déterminer

$g$  points  $P_1, \dots, P_g$  sur  $X$  tels que :

$$\sum_{k=1}^g \int_{P_0}^{P_k} \omega_j \equiv z_j \pmod{L}, \quad j = 1, \dots, g$$

où  $(z_1, \dots, z_g) \in \text{Jac}(X)$ ,  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  une base de différentielles holomorphes sur  $X$ ,  $P_0$  un point de base sur  $X$  et  $L$  un réseau engendré par les vecteurs colonnes de la matrice des périodes. Autrement dit, le problème consiste à déterminer le diviseur  $\mathcal{D} = \sum_{j=1}^g P_j$  en termes de  $z = (z_1, \dots, z_g) \in \text{Jac}(X)$  tel que si  $\varphi$  est l'application d'Abel-Jacobi, alors l'équation  $\varphi(\mathcal{D}) = z$  soit satisfaite. Nous allons étudier le problème d'inversion de Jacobi à l'aide des fonctions thêta.

**Théorème 6** *Si la fonction définie par  $\zeta(P) = \theta(\varphi(P) - C)$ ,  $C \in \mathbb{C}^g$ , n'est pas identiquement nulle, alors elle admet  $g$  zéros (comptés avec leur ordre de multiplicité) sur la représentation normale  $X^*$  de  $X$ , que l'on désigne par le symbole  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ , où  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  est une base symplectique du groupe d'homologie  $H_1(X, \mathbb{Z})$ . En outre, si  $P_1, \dots, P_g$  désignent les zéros de cette fonction alors on a sur la variété jacobienne*

*Jac(X) la formule  $\sum_{k=1}^g \varphi(P_k) \equiv C - \Delta$ , (mod. périodes), où  $\Delta \in \mathbb{C}^g$  est le vecteur des constantes de Riemann défini par*

$$\Delta_j = \frac{1}{2}(1 + b_{jj}) - \sum_{k \neq j} \left( \int_{a_k} \omega_k(P) \int_{P_0}^P \omega_j \right), \quad j = 1, \dots, g. \quad (8)$$

*Démonstration* : Notons que  $X^*$  est un polygône à  $4g$  côtés identifiés deux à deux. Si l'on parcourt le bord  $\partial X^*$  de ce polygône, on constate que chaque côté est parcouru deux fois, l'un dans le sens de son orientation et l'autre dans le sens opposé. On a donc  $\partial X^* = \sum_{j=1}^g (a_j + b_j - a_j^{-1} - b_j^{-1})$ . On désigne par

$\zeta^-$  la valeur de la fonction  $\zeta(P)$  sur  $a_j^{-1}$ ,  $b_j^{-1}$  et par  $\zeta^+$  la valeur de  $\zeta(P)$  sur les segments  $a_j$ ,  $b_j$ . On utilisera des notations similaires  $\varphi^+$ ,  $\varphi^-$  pour l'application d'Abel  $\varphi(P)$ . Le nombre de zéros de la fonction  $\zeta$  sur  $X^*$  est

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X^*} d \log \zeta(P) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \left( \int_{a_k} + \int_{b_k} \right) (d \log \zeta^+ - d \log \zeta^-). \quad (9)$$

Notons que :  $\varphi_j^-(P) = \varphi_j^+(P) + b_{jk}$  si  $P \in a_k$  et  $\varphi_j^+(P) = \varphi_j^-(P) + \delta_{jk}$  si  $P \in b_k$ . D'après le théorème 4, on a

$$\begin{aligned} d \log \varphi^-(P) &= d \log \varphi^+(P) - 2\pi i \omega_k \text{ sur } a_k, \\ d \log \varphi^+(P) &= d \log \varphi^-(P) \text{ sur } b_k. \end{aligned}$$

Par conséquent, (2) implique

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial X^*} d \log \zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \int_{a_k} 2\pi i \omega_k = g,$$

ce qui montre que la fonction  $\zeta(P)$  admet  $g$  zéros sur  $X^*$ . Pour prouver la seconde partie du théorème, on considère l'intégrale

$$I_j = \int_{\partial X^*} \varphi_j(P) d \log \zeta(P), \quad j = 1, \dots, g.$$

En désignant par  $P_1, \dots, P_g$  les zéros de la fonction  $\zeta(P)$  et en tenant compte du théorème des résidus, on a  $I_j = \varphi_j(P_1) + \dots + \varphi_j(P_g)$ . En raisonnant comme précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \left( \int_{a_k} + \int_{b_k} \right) \left( \varphi_j^+ d \log \zeta^+ - \varphi_j^- d \log \zeta^- \right), \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \int_{a_k} \left( \varphi_j^+ d \log \zeta^+ - (\varphi_j^+ + b_{jk})(d \log \zeta^+ - 2\pi i \omega_k) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \int_{b_k} \left( \varphi_j^+ d \log \zeta^+ - (\varphi_j^+ - \delta_{jk}) d \log \zeta^+ \right), \\ &= \sum_{k=1}^g \left( \int_{a_k} \varphi_j^+ \omega_k - \frac{1}{2\pi i} b_{jk} \int_{a_k} d \log \zeta^+ + b_{jk} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{b_k} d \log \zeta^+. \end{aligned}$$

Notons que  $\int_{a_k} d \log \zeta^+ = 2\pi i n_k$ ,  $n_k \in \mathbb{Z}$ . De même, en désignant par  $Q_j$  (resp.  $Q_j^*$ ) le début (resp. fin) du contour  $b_j$ , alors

$$\begin{aligned} \int_{b_j} d \log \zeta^+ &= \log \zeta^+(Q_j^*) - \log \zeta^+(Q_j) + 2\pi i m_j, \quad m_j \in \mathbb{Z}, \\ &= \log \theta(\varphi(Q_j) + f_j - C) - \log \theta(\varphi(Q_j) - C) + 2\pi i m_j, \\ &= -\pi i b + 2\pi i C_j - 2\pi i \varphi_j(Q_j) + 2\pi i m_j, \end{aligned}$$

où  $f_j = (b_{1j} \dots b_{gj})^\top$ ,  $j = 1, \dots, g$ , désignent les colonnes de la matrice  $B$ . Dès lors,

$$I_j = C_j - \frac{1}{2} b_{jj} - \varphi_j(Q_j) + \sum_{k=1}^g \int_{a_k} \varphi_j(P) \omega_k \quad (\text{mod. périodes}).$$

Le début du contour  $a_j$  sera désigné par  $R_j$  et sa fin coïncide évidemment avec le début  $Q_j$  du contour  $b_j$ . On a

$$\begin{aligned}
I_j &= C_j - \frac{1}{2}b_{jj} - \varphi_j(Q_j) + \int_{a_j} \varphi_j(P)\omega_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^g \int_{a_k} \varphi_j(P)\omega_k, \\
&= C_j - \frac{1}{2}b_{jj} - \varphi_j(Q_j) + \frac{1}{2}(\varphi_j^2(Q_j) - \varphi_j^2(R_j)) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^g \int_{a_k} \varphi_j(P)\omega_k, \\
&= C_j - \frac{1}{2}b_{jj} - \varphi_j(R_j) - 1 + \frac{1}{2}((\varphi_j^2(R_j) + 1)^2 - \varphi_j^2(R_j)) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^g \int_{a_k} \varphi_j(P)\omega_k, \\
&= C_j - \frac{1}{2}(1 + b_{jj}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^g \int_{a_k} \varphi_j(P)\omega_k,
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

En général, le vecteur  $\Delta$  dépend de  $P_0$  sauf dans le cas particulier  $g = 1$  où  $\Delta = \frac{1}{2}(1 + b)$ . On montre que  $2\Delta = -\varphi(K)$ , où  $K$  est le diviseur canonique. Dès lors, en choisissant adroitement le point  $P_0$ , on peut exprimer  $K$  de manière tout à fait simple. Par exemple, considérons le cas où  $X$  est une courbe hyperelliptique de genre  $g$  d'équation affine  $w^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (\xi - \xi_j)$ , où tous les  $z_j$  sont distincts. Soit  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  une base symplectique du groupe d'homologie  $H_1(X, \mathbb{Z})$  et soit  $\sigma : X \rightarrow X$ ,  $(w, \xi) \mapsto (-w, \xi)$ , l'involution hyperelliptique (c.-à-d., qui consiste à échanger les deux feuillettes de la courbe  $X$ ) avec  $\sigma(a_j) = -a_j$  et  $\sigma(b_j) = -b_j$ . Notons que

$$\int_{a_j} \omega_k = - \int_{\sigma(a_j)} \omega_k = - \int_{a_j} \sigma^* \omega_k.$$

Alors, en choisissant  $P_0 = \xi_1$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta_j &= \frac{1}{2}(1 + b_{jj}) + \sum_{k \neq j} \int_{a_k} \omega_k \left( \int_{\xi_1}^{\xi_{2k+1}} \omega_j + \int_{\xi_{2k+1}}^P \omega_j \right), \quad j = 1, \dots, g, \\
&= \frac{1}{2}(1 + b_{jj}) + \sum_{k \neq j} \int_{\xi_1}^{\xi_{2k+1}} \omega_j \int_{a_k} \omega_k \\
&\quad + \sum_{k \neq j} \int_{\xi_{2k+1}}^{\xi_{2k+2}} \left( \left( \int_{\xi_{2k+1}}^P \omega_j \right) \omega_k(P) \left( \int_{\xi_{2k+1}}^{\sigma P} \omega_j \right) \omega_k(\sigma P) \right).
\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que  $\omega_k(\sigma P) = -\omega_k(P)$  et modulo une combinaison linéaire  $n + Bm$  (un réseau engendré par les vecteurs colonnes de la matrice

des périodes), on obtient ce cas la formule :  $\Delta_j = \sum_{k=1}^g b_{jk} + \frac{j}{2}$ ,  $1 \leq j \leq g$ .

Les zéros d'une fonction thêta sur  $\mathbb{C}^g$  forment une sous-variété de  $\text{Jac}(X)$  de dimension  $g - 1$  appelée diviseur thêta que l'on note  $\Theta = \{z : \theta(z) = 0\}$ . Elle est invariante par un nombre fini de translations et peut être singulière. L'équation (3) implique que  $\Theta$  est bien définie sur la variété jacobienne  $\text{Jac}(X)$ . Comme  $\theta(-z) = \theta(z)$ , on en déduit que  $\Theta$  est symétrique :  $-\Theta = \Theta$ .

**Théorème 7** (Riemann [4]). *La fonction  $\zeta(P) = \theta(\varphi(P) - C)$ ,  $C \in \mathbb{C}^g$ , est soit identiquement nulle, soit admet exactement  $g$  zéros  $Q_1, \dots, Q_g$  sur  $X$  tels que :  $\sum_{j=1}^g \varphi(Q_j) = C + \Delta$ , où  $\Delta$  est défini par (8).*

Ce résultat signifie que lorsqu'on plonge la surface de Riemann  $X$  dans sa variété jacobienne  $\text{Jac}(X)$  via l'application  $\varphi$  d'Abel, alors soit son image est entièrement incluse dans le diviseur thêta, soit elle la rencontre en exactement  $g$  points. En fait si  $\zeta(P)$  n'est pas identiquement nulle sur  $X$ , alors ses zéros coïncident avec les points  $P_1, \dots, P_g$  et déterminent la solution du problème inverse de Jacobi  $\varphi(\mathcal{D}) = z$  pour le vecteur  $z = C - \Delta$ . Rappelons que  $\mathcal{D} \in \text{Div}(X)$  est un diviseur spécial si et seulement si  $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) \geq 1$  et  $\dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) \geq 1$  où  $K$  est un diviseur canonique. Dans le cas où  $\mathcal{D} \geq 0$ , un diviseur est spécial si et seulement si  $\dim \Omega^1(\mathcal{D}) \neq 0$ . Notons aussi que les diviseurs spéciaux de la forme  $\mathcal{D} = P_1 + \dots + P_N$ ,  $N = \deg \mathcal{D} \geq g$ , coïncident avec les points critiques de l'application d'Abel-Jacobi,

$$\text{Sym}^N X \longrightarrow \text{Jac}(X), \quad \mathcal{D} \longmapsto \left( \int_0^{\mathcal{D}} \omega_1, \dots, \int_0^{\mathcal{D}} \omega_N \right),$$

ou ce qui revient au même  $\varphi(P_1, \dots, P_N) = \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_N)$ . Ces points critiques sont les points  $P_1, \dots, P_N$  où le rang de la différentielle de cette application est inférieur à  $g$ . D'après le théorème 7 fondamental de Riemann, la fonction  $\zeta(P) = \theta(\varphi(P) - C)$ , est identiquement nulle si et seulement si  $C \equiv \varphi(Q_1) + \dots + \varphi(Q_g) + \Delta$  où  $Q_1 + \dots + Q_g$  est un diviseur spécial.

**Théorème 8** *Soit  $z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$  un vecteur tel que la fonction  $\zeta(P) = \theta(\varphi(P) - z - \Delta)$ , n'est pas identiquement nulle sur  $X$ . Alors, la fonction  $\zeta(P)$  admet exactement  $g$  zéros  $P_1, \dots, P_g$  sur  $X$  qui déterminent la solution*

*du problème d'inversion de Jacobi  $\varphi(\mathcal{D}) = z$ , où  $\mathcal{D} = \sum_{j=1}^g P_j$ . Autrement dit, on a*

$$\varphi_j(P_1) + \dots + \varphi_j(P_g) = \sum_{k=1}^g \int_{P_0}^{P_k} \omega_j \equiv z_j, \quad 1 \leq j \leq g \quad (10)$$

*En outre, le diviseur  $\mathcal{D}$  est non spécial et les points  $P_1, \dots, P_g$  sont uniquement déterminés à partir du système (10).*

*Démonstration* : La première assertion résulte du théorème 1. En outre, le diviseur  $\mathcal{D} = \sum_{j=1}^g P_j$  n'est pas spécial car sinon la fonction  $\zeta(P)$  serait identiquement nulle d'après ce qui précède, ce qui est absurde. Quand au dernier point, supposons que le système (10) admet une autre solution  $Q_1, \dots, Q_g$ .

On aura sur la variété jacobienne  $\text{Jac}(X)$ ,  $\sum_{j=1}^g \varphi(P_j) \equiv \sum_{j=1}^g \varphi(Q_j)$ , (mod.  $L$ ),

où  $L$  est le réseau engendré par la matrice des périodes. D'après le théorème d'Abel, cela signifie qu'il existe une fonction méromorphe sur  $X$  ayant des zéros en  $Q_1, \dots, Q_g$  et des pôles en  $P_1, \dots, P_g$ . Or on vient de montrer que le diviseur est non spécial, donc une telle fonction doit être une constante, ce qui entraîne que  $P_j = Q_j$ ,  $j = 1, \dots, g$ .  $\square$

Par exemple, si  $\mathcal{D} = \sum_{j=1}^g P_j$  est un diviseur non spécial sur une surface de Riemann  $X$  de genre  $g$ , alors la fonction  $\theta(\varphi(P) - \varphi(\mathcal{D}) - \Delta)$ , admet exactement  $g$  zéros sur  $X$  aux points  $P = P_1, \dots, P_g$ .

On a la caractérisation suivante du diviseur thêta :

**Théorème 9** *On a  $\theta(C) = 0$ , si et seulement s'il existe  $P_1, \dots, P_{g-1} \in X$  avec point de base  $P_0$ , tels que :*

$$C \equiv \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_{g-1}) + \Delta = \sum_{j=1}^{g-1} \int_{P_0}^{P_j} \omega + \Delta$$

*Démonstration* : Reprenons la fonction  $\zeta(P) = \theta(\varphi(P) - C)$  et supposons d'abord qu'elle est non nulle sur  $X$ . D'après le théorème 6, cette fonction admet  $g$  zéros  $P_1, \dots, P_g$  sur  $X$  et

$$C \equiv \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_g) + \Delta. \quad (11)$$

L'ensemble de ces zéros étant unique et comme par hypothèse  $\theta(C) = 0$ , alors  $P_g = P_0$ . Dès lors  $\varphi(P_g) = \varphi(P_0) = 0$  et d'après (11), on a

$$C \equiv \varphi(P_1) + \dots + \varphi(P_{g-1}) + \Delta.$$

Passons maintenant au cas où la fonction  $\zeta(P)$  n'est pas identiquement nulle sur  $X$ . D'après le théorème 6, on a

$$C \equiv \varphi(Q_1) + \dots + \varphi(Q_g) + \Delta, \quad (12)$$

où  $Q_1 + \dots + Q_g$  est un diviseur spécial. Ce dernier implique l'existence sur  $X$  d'une fonction non constante  $\zeta$  méromorphe ayant des pôles en  $Q_1, \dots, Q_g$  avec  $\zeta(P_0) = 0$ . Dès lors,  $\varphi(P_1 + \dots + P_{g-1} + P_0) \equiv \varphi(Q_1 + \dots + Q_g)$ , en vertu du théorème d'Abel où  $P_1 + \dots + P_{g-1} + P_0$  est le diviseur des zéros de  $\zeta$ . Il suffit dès lors de remplacer dans (12),  $\varphi(Q_1 + \dots + Q_g)$  par  $\varphi(P_1 + \dots + P_{g-1} + P_0)$  tout en tenant compte du fait que  $\varphi(P_0) = 0$ .  $\square$

**Théorème 10** Soient  $\mathcal{D}$  un diviseur non spécial de degré  $g$ ,  $\mathcal{D}'$  un diviseur positif de degré  $n$ ,  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  une base de différentielles holomorphes sur  $X$ ,  $\varphi(P) = \left( \int_{P_0}^P \omega_1, \dots, \int_{P_0}^P \omega_g \right)$  l'application d'Abel de point de base  $P_0$ ,  $\eta$  une différentielle normalisée de 3<sup>ème</sup> espèce<sup>2</sup> sur  $X$  ayant des pôles sur  $\mathcal{D}'$  et de résidus  $-1$ ,  $U = (U_1, \dots, U_g)$  le vecteur des périodes avec  $U_k = \int_{b_k} \eta$  et enfin  $\Delta$  le vecteur défini à l'aide des constantes de Riemann par (8). Si  $\psi$  est une fonction méromorphe sur  $X$  ayant  $g+n$  pôles sur  $\mathcal{D} + \mathcal{D}'$ , alors cette fonction s'exprime en termes de fonction thêta à l'aide de la formule

$$\psi(P) = A \frac{\theta(\varphi(P) - \varphi(\mathcal{D}) + U - \Delta)}{\theta(\varphi(P) - \varphi(\mathcal{D}) - \Delta)} e^{\int_{P_0}^P \eta}, \quad A = \text{constante.}$$

*Démonstration* : Il est à noter que le contour d'intégration dans les intégrales  $\int_{P_0}^P \eta$  et  $\int_{P_0}^P \omega_j$ ,  $j = 1, \dots, g$ , est le même. La fonction  $\psi(P)$  admet des pôles uniquement sur  $\mathcal{D} + \mathcal{D}'$ . Montrons que cette fonction est bien définie sur  $X$ ; c.-à-d., elle ne dépend pas du chemin d'intégration. Autrement dit qu'elle ne change pas lorsque  $P$  parcourt un cycle quelconque

$\gamma = \sum_{k=1}^g (n_k a_k + m_k b_k) \in H_1(X, \mathbb{Z})$ , ( $n_k, m_k \in \mathbb{Z}$ ). Les expressions  $\int_{P_0}^P \eta$  et  $\varphi(P) = \left( \int_{P_0}^P \omega_1, \dots, \int_{P_0}^P \omega_g \right)$  se transforment respectivement comme suit :

$$\int_{P_0}^P \eta + \sum_{k=1}^g m_k \int_{b_k} \eta = \int_{P_0}^P \eta + 2i \langle m, U \rangle, \quad m = (m_1, \dots, m_g) \in \mathbb{Z}^g,$$

et  $\varphi(P) \mapsto \varphi(P) + n + Bm$ ,  $n = (n_1, \dots, n_g) \in \mathbb{Z}^g$ . Par ailleurs, en utilisant la formule (4), on obtient

$$\frac{\theta(\varphi(P) - \varphi(\mathcal{D}) + U - \Delta)}{\theta(\varphi(P) - \varphi(\mathcal{D}) - \Delta)} = \frac{e^{-\pi i \langle Bm, m \rangle - 2\pi i \langle m, \varphi(P) - \varphi(\mathcal{D}) + U - \Delta \rangle}}{e^{-\pi i \langle Bm, m \rangle - 2\pi i \langle m, \varphi(P) - \varphi(\mathcal{D}) - \Delta \rangle}} = e^{-2\pi i \langle m, U \rangle},$$

et le résultat découle de la transformation ci-dessus.  $\square$

Sur la surface de Riemann  $X$  de genre  $g$ , des fonctions singulières possédant  $g$  pôles et des singularités essentielles, jouent un rôle crucial lors de l'étude des systèmes intégrables, notamment l'équation de Korteweg-de Vries (K-dV),  $\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ , l'équation Kadomtsev-Petviashvili (KP),  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( 4 \frac{\partial u}{\partial t} - 12u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) = 0$ , l'équation de Schrödinger nonlinéaire  $i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + |\psi|^2 \psi = 0$ , l'équation de Boussinesq  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} = 0$ , l'équation de Camassa-Holm  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + 3u \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ , dont les solutions exactes sont des solitons [14], c.-à-d., des ondes de formes définies progressant à des vitesses différentes. Nous allons voir par analogie au

2. Une différentielle (abélienne) méromorphe sur  $X$  est dite de 3<sup>ème</sup> espèce si elle n'a que des pôles simples (et son résidu est non nul en au moins un point de  $X$ ).

théorème précédent, comment exprimer ces fonctions (connues sous le nom de fonctions de Baker-Akhiezer) en termes de fonctions thêta et en même temps prouver leur existence. Soient  $Q_1, \dots, Q_n$  des points sur une surface de Riemann  $X$  de genre  $g$  et  $z_j$  des paramètres locaux tels que :  $z_j(Q_j) = \infty$ . On associe à chaque point  $Q_j$  un polynôme arbitraire noté  $q_j(z_j)$ . Soient  $\mathcal{D} = P_1 + \dots + P_g$  un diviseur positif sur  $X$  et  $\psi(P)$  une fonction (dite fonction de Baker-Akhiezer) satisfaisant aux conditions suivantes : (i)  $\psi(P)$  est méromorphe sur  $X \setminus \{Q_1, \dots, Q_n\}$  et admet des pôles uniquement aux points  $P_1, \dots, P_n$  du diviseur  $\mathcal{D}$ . (ii) La fonction  $\psi(P)e^{-q_j(z_j(P))}$  est analytique au voisinage de  $Q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . On peut remplacer la condition (ii) par celle-ci : la fonction  $\psi$  admet aux points  $Q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , une singularité essentielle de la forme  $\psi(P) \sim ce^{q_j(z_j(P))}$  où  $c$  est une constante. Ces fonctions  $\psi(P)$  forment un espace vectoriel que l'on note  $L \equiv L(\mathcal{D}; Q_1, \dots, Q_n, q_1, \dots, q_n)$ .

**Théorème 11** *Soit  $\mathcal{D} = P_1 + \dots + P_g$  un diviseur non spécial de degré  $g$ . Alors l'espace  $L$  est de dimension 1 et sa base est décrite à l'aide de*

$$\psi_1(P) = \frac{\theta(\varphi(P) - \varphi(\mathcal{D}) + V - \Delta)}{\theta(\varphi(P) - \varphi(\mathcal{D}) - \Delta)} e^{\int_{P_0}^P \eta}, \quad (13)$$

où  $\eta$  est une différentielle normalisée de  $2^{\text{ème}}$  espèce<sup>3</sup> ayant des pôles aux points  $Q_1, \dots, Q_n$ , les parties principales coïncident avec les polynômes  $q_j(z_j)$ , où  $j = 1, \dots, n$ ,  $V = (V_1, \dots, V_g)$  avec  $V_k = \int_{b_k} \eta$ ,  $k = 1, \dots, g$ ,

$$\varphi(P) = \left( \int_{P_0}^P \omega_1, \dots, \int_{P_0}^P \omega_g \right),$$

l'application d'Abel de point de base  $P_0$ ,  $\Delta$  est le vecteur défini à l'aide des constantes de Riemann par (9). Le contour d'intégration dans les intégrales  $\int_{P_0}^P \eta$  et  $\int_{P_0}^P \omega_j$ ,  $j = 1, \dots, g$  est le même.

*Démonstration* : La fonction  $\psi_1(P)$  possède des pôles sur le diviseur  $\mathcal{D}$  et des singularités essentielles aux points  $Q_1, \dots, Q_n$ . La fonction  $\psi_1(P)$  est bien définie ; elle ne dépend pas du chemin d'intégration. En utilisant les notations et un raisonnement similaire à ceux du théorème 10, on obtient le rapport

$$\frac{\theta(\varphi(P) - \varphi(\mathcal{D}) + V - \Delta)}{\theta(\varphi(P) - \varphi(\mathcal{D}) - \Delta)} = e^{-2\pi i \langle m, V \rangle},$$

et le résultat découle de la transformation utilisée dans la preuve du théorème précédent. Par ailleurs, d'après le théorème de Riemann-Rock [5], la dimension de l'espace  $L$  est égale à  $\deg \mathcal{D} - g + 1$ . Comme  $\deg \mathcal{D} = g$ , alors la dimension de l'espace en question est égal à 1, ce qui prouve l'unicité de la fonction  $\psi_1$  à une constante multiplicative près. Soit  $\psi \in L$  une

---

3. Une différentielle (abélienne) méromorphe sur  $X$  est dite de  $2^{\text{ème}}$  espèce si elle a des pôles et si son résidu est nul en chaque point de  $X$ .

fonction quelconque. Dès lors, le quotient  $\frac{\psi}{\psi_1}$  est une fonction méromorphe avec  $g(= \deg \mathcal{D})$  pôles. Le diviseur des pôles de  $\frac{\psi}{\psi_1}$  coïncide avec le diviseur  $\mathcal{D}' = P'_1 + \dots + P'_g$  des zéros de  $\psi_1(P)$  et on doit avoir  $\varphi(\mathcal{D}') - \varphi(\mathcal{D}) = V$ . En choisissant les polynômes  $q_j$  avec des coefficients suffisamment petits ou ce qui revient au même, les vecteurs de  $V$  suffisamment petits, alors la fonction thêta qui se trouve dans le numérateur de l'expression ci-dessus n'est pas identiquement nulle. Par conséquent, son diviseur des pôles  $\mathcal{D}'$  n'est pas spécial et donc  $\frac{\psi}{\psi_1}$  est une constante.  $\square$

### 3 Exemples

Il est bien connu que les solutions de nombreux systèmes intégrables sont données en termes de fonctions thêta associées à des surfaces de Riemann compactes. Nous verrons ci-dessous de telles solutions pour certains problèmes.

Comme premier exemple, on considère le mouvement d'un solide dans un fluide parfait décrit à l'aide des équations de Kirchhoff [3] :

$$\dot{p} = p \wedge \frac{\partial H}{\partial l}, \quad \dot{l} = p \wedge \frac{\partial H}{\partial p} + l \wedge \frac{\partial H}{\partial l}, \quad (14)$$

où  $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $l = (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{R}^3$  et  $H$  l'hamiltonien. Le système (14) possède les trois intégrales premières suivantes :

$$H_1 = H, \quad H_2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \quad H_3 = p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3. \quad (15)$$

On distingue deux cas intégrables : cas de Clebsch et cas de Lyapunov-Steklov. Dans le cas de Clebsch, on a  $H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (a_k p_k^2 + b_k l_k^2)$ , avec la condition  $(a_2 - a_3)b_1^{-1} + (a_3 - a_1)b_2^{-1} + (a_1 - a_2)b_3^{-1} = 0$ . Le système ci-dessus s'écrit sous la forme d'un champ de vecteurs hamiltonien. Une quatrième intégrale première est fournie par

$$H_4 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (b_k p_k^2 + \varrho l_k^2), \quad (16)$$

où  $\varrho$  est une constante satisfaisant à

$$\varrho = b_1(b_2 - b_3)(a_2 - a_3)^{-1} = b_2(b_3 - b_1)(a_3 - a_1)^{-1} = b_3(b_1 - b_2)(a_1 - a_2)^{-1}.$$

La méthode de résolution obtenue par Kötter [9] est extrêmement compliquée et repose sur un choix astucieux de deux variables  $s_1$  et  $s_2$ . En utilisant la

substitution  $b_k \rightarrow \rho b_k$ ,  $1 \leq k \leq 3$ , et une combinaison linéaire appropriée de  $H_1$  et  $H_2$ , on peut réécrire les équations précédentes sous la forme

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = A, \quad b_1 p_1^2 + b_2 p_2^2 + b_3 p_3^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = B,$$

$$b_1 l_1^2 + b_2 l_2^2 + b_3 l_3^2 - b_2 b_3 p_1^2 - b_1 b_3 p_2^2 - b_1 b_2 p_3^2 = C, \quad p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 = D,$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des constantes. Introduisons des coordonnées  $\varphi_k$ ,  $\psi_k$ ,  $1 \leq k \leq 3$ , en posant  $\varphi_k = p_k T_{+1} + l_k S_{+1}$  et  $\psi_k = p_k T_{-1} + l_k S_{-1}$ , où

$$T_{\pm 1} = \frac{\sqrt{\prod_{j=1}^3 (z_1 - b_j)}}{\sqrt{z_1 - b_k} \sqrt{\frac{\partial R}{\partial z_1}}} + i \frac{\sqrt{\prod_{j=1}^3 (z_2 - b_j)}}{\sqrt{z_2 - b_k} \sqrt{\frac{\partial R}{\partial z_2}}}$$

$$S_{\pm 1} = \frac{\sqrt{z_1 - b_k}}{\sqrt{\frac{\partial R}{\partial z_1}}} + i \frac{\sqrt{z_2 - b_k}}{\sqrt{\frac{\partial R}{\partial z_2}}}, \quad R(z) = \prod_{i=1}^4 (z - z_i),$$

et  $z_1, z_2, z_3, z_4$  sont les racines de l'équation

$$A^2 \left( z^2 - z \sum_{k=1}^3 b_k \right) + Bz - C + 2D \sqrt{\prod_{k=1}^3 (z - b_k)} = 0.$$

Soient  $s_1$  et  $s_2$  les racines de l'équation

$$\psi_1^2 (\nu_1^2 - s)^{-1} + \psi_2^2 (\nu_2^2 - s)^{-1} + \psi_3^2 (\nu_3^2 - s)^{-1} = 0,$$

où

$$\nu_k = \left( \frac{\sqrt{z_3 - b_k}}{\sqrt{\frac{\partial R}{\partial z_3}}} + i \frac{\sqrt{z_4 - b_k}}{\sqrt{\frac{\partial R}{\partial z_4}}} \right) \left( \frac{\sqrt{z_1 - b_k}}{\sqrt{\frac{\partial R}{\partial z_1}}} + i \frac{\sqrt{z_2 - b_k}}{\sqrt{\frac{\partial R}{\partial z_2}}} \right)^{-1}, \quad 1 \leq k \leq 3.$$

On peut exprimer les variables  $p_1, p_2, p_3, l_1, l_2, l_3$  en terme de  $s_1$  et  $s_2$  (voir [9]). Après quelques manipulations algébriques, on obtient

$$\dot{s}_1 = \frac{(as_1 + b) \sqrt{P_5(s_1)}}{s_2 - s_1}, \quad \dot{s}_2 = \frac{(as_2 + b) \sqrt{P_5(s_2)}}{s_1 - s_2},$$

où  $a, b$  sont des constantes et  $P_5(s)$  est un polynôme de degré cinq ayant la forme suivante :  $P_5(s) = s(s - \nu_1^2)(s - \nu_2^2)(s - \nu_3^2)(s - \nu_1^2 \nu_2^2 \nu_3^2)$ . Par conséquent, l'intégration s'effectue au moyen de fonctions hyperelliptiques de genre 2 et les solutions peuvent s'exprimer en termes de fonctions thêta. Le problème de ce mouvement est un cas limite du flot géodésique sur  $SO(4)$ . Rappelons que pour un système algébriquement complètement intégrable [1], on demande que les invariants du système différentiel soient polynomiaux (dans des coordonnées adéquates) et que de plus les variétés complexes obtenues en

égalant ces invariants polynomiaux à des constantes génériques forment la partie affine d'un tore complexe algébrique (variété abélienne) de telle façon que les flots complexes engendrés par les invariants soient linéaires sur ces tores complexes. Les solutions méromorphes dépendant d'un nombre suffisant de paramètres libres jouent un rôle crucial dans l'étude de ces systèmes. On montre [1, 6] que le système différentiel en question est algébriquement complètement intégrable et le flot correspondant évolue sur une surface abélienne  $\widetilde{M}_c \cong \mathbb{C}^2/L_\Omega$  où le réseau  $L_\Omega$  est engendré par la matrice des périodes

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & c \\ 0 & 4 & c & b \end{pmatrix}, \quad \text{Im} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} > 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{C}).$$

La surface affine  $M_c$  définie en égalant les invariants du système à des constantes génériques, se complète en  $\widetilde{M}_c$  par l'adjonction d'une courbe lisse  $\mathcal{D}$  de genre 9, laquelle est un revêtement ramifié le long d'une courbe elliptique  $\mathcal{E}$ . L'application  $\widetilde{M}_c \rightarrow \mathbb{CP}^7$ ,  $(t_1, t_2) \mapsto [1, X_1(t_1, t_2), \dots, X_7(t_1, t_2)]$ , est un plongement de  $\widetilde{M}_c$  dans l'espace projectif  $\mathbb{CP}^7$  où  $(1, X_1, \dots, X_7)$  forme une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$  des fonctions méromorphes ayant au plus un pôle simple sur  $\mathcal{D}$  (les fonctions  $X_1, \dots, X_7$  s'exprime de manière simple en fonction de  $x_1, \dots, x_6$ ). Les solutions du système différentiel en question sont données en termes de fonctions thêta par

$$X_k(t) = \frac{\theta_k[(t_1^0, t_2^0) + t(n_1, n_2)]}{\theta_0[(t_1^0, t_2^0) + t(n_1, n_2)]}, \quad k = 1, \dots, 7$$

où  $(\theta_0, \dots, \theta_7)$  forme une base de l'espace vectoriel des fonctions thêta associées à  $\mathcal{D}$  (les deux fonctions thêta  $\theta_0, \theta_7$  sont impaires tandis que les six fonctions thêta  $\theta_1, \dots, \theta_6$  sont paires. Pour le cas de Lyapunov-Steklov, on a

$$H_1 = H = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (a_k p_k^2 + b_k l_k^2) + \sum_{k=1}^3 c_k p_k l_k,$$

$a_1 = A^2 b_1 (b_2 - b_3)^2 + B$ ,  $a_2 = A^2 b_2 (b_3 - b_1)^2 + B$ ,  $a_3 = A^2 b_3 (b_1 - b_2)^2 + B$ ,  $c_1 = A b_2 b_3 + C$ ,  $c_2 = A b_1 b_3 + C$ ,  $c_3 = A b_1 b_2 + C$ , où  $A, B$  et  $C$  sont des constantes. Une quatrième intégrale première est fournie par

$$H_4 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (d_k p_k^2 + l_k^2) - A \sum_{k=1}^3 b_k p_k l_k,$$

où  $d_1 = A^2 (b_2 - b_3)^2$ ,  $d_2 = A^2 (b_3 - b_1)^2$ ,  $d_3 = A^2 (b_1 - b_2)^2$ . Un calcul long [12] et délicat montre que dans ce cas aussi, l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions hyperelliptiques de genre deux et les solutions peuvent s'exprimer en termes de fonctions thêta.

Un autre exemple concerne l'équation de Landau-Lifshitz [2, 11] :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = S \times \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + S \times JS,$$

où  $S = (S_1, S_2, S_3)$ ,  $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$  et  $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ . Cette équation décrit les effets d'un champ magnétique sur les matériaux ferromagnétiques. Les solutions réelles (avec l'anisotropie magnétique de type axe d'aimantation facile) sont données par

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\theta(\omega + d + m)\theta(\omega + d + m + r) - \theta(\omega + d)\theta(\omega + d + r)}{\theta(\omega + d)\theta(\omega + d + m + r) - \theta(\omega + d + r)\theta(\omega + d + m)}, \\ S_2 &= -i \frac{\theta(\omega + d + m)\theta(\omega + d + m + r) + \theta(\omega + d)\theta(\omega + d + r)}{\theta(\omega + d)\theta(\omega + d + m + r) - \theta(\omega + d + r)\theta(\omega + d + m)}, \\ S_3 &= \frac{\theta(\omega + d)\theta(\omega + d + m + r) + \theta(\omega + d + r)\theta(\omega + d + m)}{\theta(\omega + d)\theta(\omega + d + m + r) - \theta(\omega + d + r)\theta(\omega + d + m)}. \end{aligned}$$

Ici la fonction theta est liée à une courbe hyperelliptique de genre  $g$ , le vecteur  $d \in \mathbb{C}^g$  est tel que :  $\text{Im } d = -\frac{1}{2}\text{Im } r$ ,  $m = (m_1, \dots, m_g)$ ,  $\omega = \frac{1}{2\pi}(Ux + Vt)$  et  $r = \int_{\bullet_+}^{\bullet_-} du$ ; le chemin de l'intégration doit être fixé.

Nous citons encore un autre exemple qui concerne l'équation de sine-Gordon [2] :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sin \varphi.$$

C'est une équation d'onde non-linéaire aux applications multiples en physique. Sa solution peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(x, t) = 2i \ln \frac{\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (Ux + Vt + W|B)}{\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (Ux + Vt + W|B)} + C + 2\pi m,$$

où  $U, V, W \in \mathbb{C}^g$ ,  $C \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Par ailleurs l'étude des fonctions thêta d'une surface de Riemann du genre  $g$  peut être faite à partir du point de vue de la fonction tau d'une hiérarchie d'équations de soliton [13]. Les fonctions tau sont des fonctions spécifiques du temps, construites à partir de sections d'un fibré déterminant sur une variété grassmannienne de dimension infinie et généralisent les fonctions thêta de Riemann.

## Références

- [1] M. Adler and P. van Moerbeke, Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras. A series of modern surveys in mathematics, Volume **47**, Springer-Verlag, 2004.
- [2] A.I. Belokolos, V.Z. Bobenko, V.Z. Enol'skii, A.R. Its and V.B. Matveev, *Algebro-Geometric approach to nonlinear integrable equations*. Springer-Verlag 1994.

- [3] B.A. Dubrovin, *Theta functions and non-linear equations*. Russian Math. Surveys 36 : 2, (1981), 11-92.
- [4] J. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*. Lecture notes in mathematics, Vol. 352, Springer-Verlag, 1973.
- [5] P.A. Griffiths, J. Harris, *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience 1978.
- [6] L. Haine, *Geodesic flow on  $SO(4)$  and Abelian surfaces*. Math. Ann., 263, (1983), 435-472.
- [7] J.-I. Igusa, *Theta-functions*. Springer Berlin Heidelberg 1972.
- [8] D.A. Korotkin, *Introduction to the functions on compact Riemann surfaces and theta-functions*. ArXiv :solv-int/9911002,(1999), 1-31.
- [9] F. Kötter, *Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit I, II*. J. Reine Angew. Math. 109, (1892), 51-81, 89-111.
- [10] F. Kötter, *Die von Steklow und Lyapunov entdeckten integralen Fälle der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit Sitzungsber. Königlich Preussische Akad. d. Wiss. Berlin 6, (1900), 79-87*.
- [11] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies*. Phys. Zeitsch. der Sow., 8 : (1935), 153-169.
- [12] A. Lesfari, *Integrable systems and complex geometry*. Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. **30**, 4(2009), 292-326.
- [13] A. Lesfari, *Algèbres de Lie affines et opérateurs pseudo-différentiels d'ordre infini*. Maths report, Vol. **14** (64), No.1, (2012), 43-69.
- [14] A. Lesfari, *Etude des équations stationnaire de Schrödinger, intégrale de Gelfand-Levitan et de Korteweg-de-Vries. Solitons et méthode de la diffusion inverse*. Aequat. Math., Vol. 85, (2013), 243-272.
- [15] D. Mumford, *Tata lectures on theta I, II*. Progress in Math., Birkhäuser, Boston, 1983.