L'objectif de nos recherches est l'étude de divers aspects algébriques, analytiques et géométriques d'un des objets les plus riches et les plus importants des mathématiques, qui est la source de plusieurs domaines de la recherche contemporaine. La théorie des systèmes dynamiques intégrables utilise actuellement un arsenal très riche d'idées et de méthodes mathématiques et représente un des domaines les plus actifs des mathématiques modernes. En particulier et comme en témoignent plusieurs travaux récents, le grand intérêt porté ces dernières années sur l'étude des systèmes dynamiques intégrables laisse à penser qu'un pont nouveau va être jeté entre les applications et les théories mathématiques abstraites les plus avancées. On ne compte plus les questions de géométrie, d'algèbre et d'analyse qui doivent faire appel aux systèmes intégrables. Une des difficultés de ces systèmes est liée au fait que c'est un domaine pluridisciplinaire qui allie plusieurs théories parmi lesquels on trouve entre autres : équations différentielles, topologie, géométrie complexe, groupes et algèbres de Lie, etc... Les outils et les méthodes utilisés sont très puissants mais inaccessibles en peu de temps. L'intérêt et la difficulté concernant ce domaine sont aussi dus au fait que les équations différentielles décrivant la nature sont presque toutes non-linéaires. La solution des problèmes dynamiques non-linéaires par quadratures est généralement impossible et une solution numérique ne montre pas leurs propriétés qualitatives. Cependant, jusqu'à récemment, mathématiciens et physiciens durent se contenter, soit d'approximations linéaires, soit de théorèmes d'existence de solutions. La découverte ces dernières années de classes importantes de systèmes intégrables montra combien de phénomènes importants furent manqués lors de l'étude de ces équations par des méthodes linéaires. En fait depuis longtemps, on avait utilisé dans tous les domaines les concepts de linéarisation et de superposition des modes. Les non-linéarités n'étaient traitées que comme des petites perturbations. Elles sont dorénavant examinées dans leur intégralité. Les premières études furent motivées par des problèmes de physique des plasmas, par la dynamique des fluides ou des chaînes. Citons à titre d'exemple l'équation de Korteweg-de-Vries qui décrit la propagation des ondes dans un canal infini peu profond. Cette équation est caractérisée par un terme tendant à disperser l'onde et un autre terme non-linéaire, tendant à concentrer l'onde. Un milieu dans lequel ces deux efforts se compensent sera propice à l'existence d'ondes solitaires ou solitons. Ce sont des ondes de formes définies progressant à des vitesses différentes et dont le profil est stable au cours de la propagation, par suite de cette compétition entre l'effet dispersif et l'effet non-linéaire. Généralement, on regroupe sous le vocable soliton des solutions d'équations d'ondes non-linéaires présentant les propriétés caractéristiques suivantes : elles sont localisées dans l'espace, durent indéfiniment et conservent leur amplitude et leur vitesse même à l'issue de plusieurs collisions avec d'autres solitons. En outre, ces ondes correspondent aux niveaux d'énergie de l'équation stationnaire de Schrödinger, ce qui a permet d'utiliser une analogie avec la mécanique quantique. La découverte de ce lien influença de nombreux domaines, des mathématiques à la technologie en passant par la physique et la biologie. A part l'équation de Korteweg-de-Vries, on peut citer parmi les équations non-linéaires ayant des solutions de type soliton, l'équation de Schrödinger non-linéaire qui gouverne la propagation d'une onde lumineuse dans une fibre optique dont le diamètre est faible comparé à la longueur d'onde, une autre équation aux dérivées partielles non-linéaire régit le transfert d'énergie (par hydrolyse d'adénosine triphosphate en adénosine di phosphate) le long des chaînes de protéines dans les organismes vivants. Entre-temps, le sujet a évolué vers des thèmes plus mathématiques, liés aux algèbres de Lie et à la géométrie algébrique, en vue de répondre aux problèmes fondamentaux concernant la nature des équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles complètement intégrables. En particulier un nombre considérable de ces équations est entré dans le cadre de la mécanique hamiltonienne et possèdent plusieurs, voir même une infinité, de lois de conservation, en plus de la conservation de l'énergie et du moment. Ces lois résultent parfois de symétries apparentes au niveau de l'espace géométrique des configurations, parfois de symétries cachées au sein de l'espace des phases. On sait actuellement que ces symétries cachées, plus difficiles à saisir, se traduisent naturellement en termes de la théorie des groupes de Lie, qui systématise par excellence l'étude des symétries et qui établit le lien avec la théorie spectrale. A leur tour, ces groupes de Lie donnent lieu à des courbes algébriques ou surfaces de Riemann, d'où résultent des tores, ce qui nous conduit au coeur même de la géométrie algébrique. Ces tores jouent un rôle prépondérant car les trajectoires des systèmes mentionnés précédemment, peuvent être toutes considérées comme étant enroulées sur ces tores. La solution de ces problèmes de mécanique a donné lieu à un foisonnement d'idées et de liens entre les domaines apparemment les plus distants, comme la théorie spectrale, la géométrie algébrique et la théorie des groupes de Lie. En retour, cette synthèse alimenta chacun de ces domaines en idées nouvelles. Tout chercheur ayant participé aux rencontres scientifiques de ces dernières années, où expérimentateurs, géomètres et algébristes se sont côtoyés, aura été frappé par l'énorme diversité de sujets. Actuellement, les applications de la théorie des systèmes complètement intégrables sont nombreuses, notamment en physique des particules, en dynamique des plasmas et des fluides, en mécanique statistique, en biologie de fibres. Des sociétés industrialisées ont mis au point, à la suite d'études sur les solitons, ce qu'on peut appeler des lasers solitaires. Ces derniers jouent un rôle important dans le domaine des télécommunications. Des signaux lumineux ultra-courts envoyés dans certaines fibres optiques faites d'un matériau bien précis, peuvent voyager sur de longues distances sans s'allonger ni s'atténuer. La construction de mémoires à temps de communication ultra-rapide et à faible consommation d'énergie, est basée sur le mouvement de tourbillons magnétiques dans la jonction diélectrique qui sépare deux supraconducteurs. Au niveau moléculaire, la théorie des solitons permet d'élucider le mécanisme de contraction des muscles striés. Dans la chaîne de peptides et d'hydrogène des protéines, les solitons naissent du mariage de la dispersion due aux vibrations intra-peptides et de la non-linéarité due à l'interaction de ces vibrations avec les déplacements de groupes peptides autour de leur position d'équilibre. Mais aussi la théorie des solitons a eu un impact sur les mathématiques pures; par exemple, il fournit la réponse au fameux problème de Schottky, posé il y a un siècle, sur les relations entre les périodes provenant d'une surface de Riemann.

Nos recherches portent sur une stratégie de résolution d'une classe importante d'équations différentielles non-linéaires. Plus précisément, elles visent une approche systématique dans la détection et la linéarisation des équations différentielles non-linéaires algébriquement intégrables. Les méthodes utilisées sont avant tout analytiques, mais très inspirées par des méthodes de géométrie complexe contemporaine. Quel est l'intérêt d'une telle approche ? D'abord, il est global et est donc invariant pour tout changement de coordonnées. Ensuite, les méthodes utilisées sont directes, puissantes et permettent d'obtenir des résultats précis sur le comportement des solutions. Une grande partie de nos travaux est consacrée à l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires algébriquement complètement intégrables. C'est probablement en consultant nos différentes publications, que le lecteur pourra le mieux se rendre compte de ce que notre travail doit être pluridisciplinaire, et allier les équations différentielles, la topologie différentielle, la géométrie algébrique complexe,... Les solutions méromorphes dépendant d'un nombre suffisant de paramètres libres jouent un rôle crucial dans l'étude des équations différentielles dites algébriquement intégrables. Cela veut dire que l'on demande que les invariants du système différentiel soient polynomiaux (dans des coordonnés adéquates) et que de plus les variétés complexes obtenues en égalant ces invariants polynomiaux à des constantes génériques forment la partie affine d'une variété abélienne de telle façon que les flots complexes engendrés par les invariants du système soient des lignes droites sur ces tores complexes. Indépendamment du fait que la plupart des exemples classiques et nouveaux de systèmes hamiltoniens complètement intégrables sont algébriquement complètement intégrables, une motivation plus profonde pour leur étude est la suivante : ces systèmes apparaissent systématiquement lorsque l'on étudie les déformations isospectrales d’opérateurs linéaires contenant une indéterminée rationnelle (en bref : paire de Lax). En fait, un théorème de Adler-Kostant-Symes appliqué aux algèbres de Kac-Moody (extensions formelles de dimension infinie d'une algèbre de Lie semi-simple) fournit de tels systèmes qui sont des déformations isospectrales et qui, par un théorème de van Moerbeke-Mumford, sont algébriquement complètement intégrables. Du point de vue de la mécanique, cela veut dire que les symétries cachées de beaucoup de systèmes algébriquement complètement intégrables s'expliquent par la théorie des groupes.