

# Table des matières

<b>1 Variétés différentiables et analytiques réelles</b>	<b>7</b>
1.1 Variétés topologiques . . . . .	7
1.2 Cartes et coordonnées locales . . . . .	8
1.3 Changement de cartes . . . . .	8
1.4 Cartes compatibles . . . . .	10
1.5 Variétés différentiables, analytiques et atlas . . . . .	11
1.6 Exercices et problèmes fondamentaux . . . . .	13
1.7 Applications différentiables . . . . .	27
1.8 Espaces tangents . . . . .	29
1.9 Fibrés tangents . . . . .	37
1.10 Applications tangentées . . . . .	39
1.11 Immersions, submersions, plongements et exercices . . . . .	42
1.12 Théorème du rang constant . . . . .	44
1.13 Sous-variétés, exemples et exercices . . . . .	47
1.14 Théorèmes de Sard et de Whitney . . . . .	60
<b>2 Champs de vecteurs</b>	<b>67</b>
2.1 Généralités . . . . .	67
2.2 Groupes à un paramètre de difféomorphismes ou flots . . . . .	69
2.3 Opérateurs différentiels . . . . .	72
2.4 Commutativité des champs de vecteurs . . . . .	73
2.5 Variétés difféomorphes aux tores réels . . . . .	78
<b>3 Variétés analytiques complexes</b>	<b>85</b>
3.1 Variétés analytiques complexes . . . . .	85
3.2 Exemples, exercices et problèmes fondamentaux . . . . .	90
3.3 Sous-variétés, exemples et exercices . . . . .	97
3.4 Ensembles analytiques . . . . .	98
3.5 Courbes algébriques et surfaces de Riemann . . . . .	99

<b>4</b>	<b>Groupes et algèbres de Lie</b>	<b>107</b>
4.1	Groupes de Lie . . . . .	107
4.2	Algèbres de Lie . . . . .	114
4.3	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie . . . . .	121
4.4	Application exponentielle . . . . .	127
<b>5</b>	<b>Principe variationnel</b>	<b>137</b>
5.1	Equation d'Euler-Lagrange . . . . .	137
5.2	Transformation de Legendre . . . . .	141
5.3	Equations canoniques de Hamilton . . . . .	143
5.4	Transformation canonique . . . . .	145
5.5	Equation d'Hamilton-Jacobi et applications . . . . .	146
<b>6</b>	<b>Variétés symplectiques</b>	<b>159</b>
6.1	Orbites adjointes et coadjointes d'un groupe de Lie . . . . .	160
6.2	Dérivée de Lie, produit intérieur et formule de Cartan . . . . .	167
6.3	Espaces vectoriels symplectiques . . . . .	177
6.4	Structure symplectique sur une variété différentiable . . . . .	178
6.5	Théorème de Darboux . . . . .	187
6.6	Champs de vecteurs hamiltoniens . . . . .	191
6.7	Les orbites coadjointes et leurs structures symplectiques . . . . .	207
<b>7</b>	<b>Systèmes intégrables</b>	<b>213</b>
7.1	Théorème d'Arnold-Liouville . . . . .	215
7.2	Systèmes complètement intégrables . . . . .	216
7.3	Méthode de la courbe spectrale . . . . .	218
7.4	Matrices de Jacobi et opérateurs aux différences . . . . .	226
7.5	Théorème de Griffiths . . . . .	233
7.6	Problèmes fondamentaux . . . . .	237
<b>8</b>	<b>Appendices</b>	<b>285</b>
8.1	Fonctions de plusieurs variables réelles . . . . .	285
8.2	Formes différentielles . . . . .	304
8.3	Fonctions de plusieurs variables complexes . . . . .	311
8.4	Fonctions elliptiques, courbes elliptiques et hyperelliptiques . . . . .	316
8.5	Propriétés des surfaces de Riemann . . . . .	335
8.6	Résultants, discriminants et rappel d'analyse matricielle . . . . .	363
8.7	Variétés abéliennes complexes . . . . .	367
	<b>Bibliographie</b>	<b>373</b>
	<b>Index</b>	<b>377</b>